Министерство Образования и Науки
Республики Армения
Ереванский Государственный Университет

На правах рукописи

Далалян Самвел Грантович

КАТЕГОРНАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К АЛГЕБРАИЧЕСКИМ КРИВЫМ. ОБОБЩЕННАЯ ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел

ЕРЕВАН 2010

Содержание

Введение

Общая характеристика работы

Диссертация носит итоговый характер, она базируется на 24-х из общего числа порядка 50-и математических публикаций автора и охватывает результаты в трех различных направлениях математики.

Стержнем диссертации является категорная теория Галуа, которой посвящена ее первая часть. Здесь же излагаются примыкающие категорные результаты, относящиеся к теории объектов с бинарной операцией и единственности разложения объекта в несократимое объединение неразложимых составляющих (подобъектов).

Вторая часть посвящена приложениям к теории алгебраических кривых, точнее, теории многообразий Прима (двулистных) накрытий алгебраических кривых. В третьей части (диссертации) изложены результаты по обобщенной жордановой нормальной форме линейного оператора.

Актуальность темы. Одними из главных направляющих векторов развития математики выступают два взаимосвязанных явления (процесса): абстрактизация, то есть повышение степени абстрактности, и обобщения, то есть поступательное движение от частного к общему.

На современном этапе развития математики одним из характерных проявлений процесса абстрактизации математики выступает ее категоризация. Первая часть диссертации посвящена в основном категоризации теории Галуа, а также вопросам единственности разложения объекта на неразложимые составляющие и теории объектов с одной бинарной операцией.

Одной из бурно развивающихся областей современной математики, где в последние десятилетия зафиксирован впечатляющий прогресс, повлиявший на общее развитие математики, ее общий облик является алгебраическая геометрия. Вторая часть диссертации посвящена теории алгебраических кривых, в основном – теории многообразий Прима двулистных накрытий алгебраических кривых.

В плане обобщения известных результатов интересной и важной задачей является переход от конкретных полей, скажем, вещественных чисел или комплексных чисел к произвольным полям, выяснение вопроса, как при этом видоизменяется математическая теория. В третьей части диссертации классическая теория приведения матрицы линейного оператора к нормальному виду обобщается на случай произвольного основного поля k без ограничения на характеристический полином оператора.

Цель работы. Общая цель работы – получить новые результаты в названных направлениях, развить соответствующие теории. Более конкретные цели по различным частям диссертации кратко можно охарактеризовать следующим образом.

Основная цель первой части - развить категорную теорию Галуа, которая объединяла бы, включала в себя как частные случаи различные конкретные теории Галуа, в том числе, классическую теорию Галуа, дифференциальную теорию Галуа и др., получить аналог основной теоремы классической теории Галуа в общем случае.

Целью первого аппендикса первой части диссертации является перенесение результатов Крулля-Ремака-Шмидта-Атьи о существовании и единственности разложения объектов определенных типов в несократимое объединение (прямую сумму, прямое произведение) неприводимых составляющих (подобъектов) в ситуацию общих (абстрактных) категорий с таким обобщением этих результатов, который охватывал бы также теорему Пуанкаре о полной приводимости абелевых многообразий. Цель второго аппендикса – заложить основы единого категорного изучения объектов с одной бинарной операцией.

Основная цель второй части диссертации – изучение многообразий Прима двулистных накрытий алгебраических кривых, имеющих не более двух точек ветвления, исследование случаев их совпадения с якобиевыми многообразиями алгебраических кривых.В первой главе изучаются примианы накрытий гиперэллиптических кривых, во второй и третьей главах – тригональных кривых. Во второй главе развивается основной технический аппарат –общий метод башен алгебраических кривых и их конечнолистных накрытий, который активно используется в последующих главах. Главной целью четвертой главы является классификация и описание тетрагональных кривых.

Наконец, цель третьей части – обобщить теорему Жордана о строении линейного оператора на конечномерном векторном пространстве на самый общий случай: линейного оператора с произвольным характеристическим многочленом на векторном пространстве, определенном над произвольным полем.

Методика. В диссертации используются методы теории Галуа и линейной алгебры, категорные и алгебро-геометрические методы, а также развитый во второй главе второй части „метод башен кривых и накрытий“.

Научная новизна. Все авторские результаты диссертации являются новыми.

Важнейшими из этих результатов являются: аналоги основной теоремы теории Галуа в случае общих (первая глава первой части) и регулярных (вторая глава первой части) категорий; основная теорема первого аппендикса о единственности представления объекта в виде несократимого объединения неприводимых подобъектов; основная теорема второго аппендикса о представлении, ассоциированном с бинарами; описание многообразий Прима двулистных накрытий алгебраических кривых с не более, чем двумя точками ветвления при гиперэллиптической (глава 1 части II) и тригональной (главы 2 и 3 части II) накрываемой кривой; развитие „метода башен кривых и накрытий“ для исследования многообразий Прима (вторая глава второй части), классификация и описание тетрагональных кривых по соответствующей группе Галуа (четвертая глава второй части), „сепарабельная обобщенная теорема Жордана о нормальном виде линейного оператора“ (гл.1, часть III), "общая обобщенная теорема Жордана о нормальном виде линейного оператора“ (главы 2 и 3 части III); критерий сужаемости поля скаляров линейного оператора (гл. 2, чать III); алгоритм построения обобщенной жордановой нормальной формы (второго рода) линейного оператора и соответствующего базиса.

К этому перечню надо добавить результаты, приведенные в заключении: об N-категориях; о применении 2-категорий в категорной теории Галуа; о слайс-классификации категорий коалгебр для комонад; о существовании ненаследственных мономорфизмов в категорной теории групп, об одном подходе к вопросу категоризации оснований алгебраической геометрии.

Практическая и теоретическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут найти (и частично уже нашли) применение в конкретных („частных“) теориях Галуа, в теории алгебраических кривых и многообразий Прима, в теоретической физике, в теоретической и прикладной линейной алгебре.

Апробация. Результаты, связанные с темой диссертации, в разное время докладывались на научных семинарах в Математическом Институте им. В. А. Стеклова в Москве, в Московском Государственном Университете имени Ломоносова, в Ереванском Государственном Университете, в Институте Математики НАН Армении, в Математическом Центре парижской Ecole Polytechnique в Палезо, а также на (международных) конференциях в Ереване, Ярославле, Минске, Кишиневе, Новосибирске, Тебризе, Тегеране, Пловдиве, Монтерее (США).

Результаты, изложенные в диссертации, успели получить определенное признание. Они цитируются А.Н.Тюриным [111], У.В.Десалом и С.Рамананом [82], В.И.Каневым [94], [95], В.В.Шокуровым [115], В.С.Куликовым и П.В.Курчановым [106], И.А.Таймановым [109], А.Н.Паршиным и И.Р.Шафаревичем [108], А.Верра [104], Р.Л.Фернандесом и П.Ванаеке [89], В.Драговичем и Б.Гаджичем [84] – [87], В.И.Каневым и Г.Ланге [96] и др. Результаты, изложенные в первой главе второй части, получили название теории Мамфорда-Далаляна. Однако, появились также статьи, где эти результаты используются со ссылкой на одного Мамфорда ([78], [79], [80]).

Публикации. Тема диссертации освещена в 26 статьях и тезисах докладов на различных конференциях, список которых прилагается.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех основных частей, заключения и списка литературы. Первая часть содержит три главы и два Appendix-а, вторая часть состоит из четырех глав, третья – из трех. Главы разбиваются на параграфы. В каждой главе, в основном, излагается содержание одной-двух статей автора. Диссертация изложена на 273 страницах. Список литературы содержит 132 наименования.

Обзор содержания диссертации

Перейдем к краткому описанию содержания диссертации.

Каждая из трех частей диссертации начинается с небольшого предисловия (краткого исторического обзора, ни в коем случае не претендующего на полноту), вводящего в предмет исследования этой части. Все утверждения диссертации, а также формулы нумеруются лексикографически в пределах каждой части, главы, каждого параграфа. Символ $\square$ указывает конец доказательства.

В части I собраны категорные результаты.

В первой главе этой части результаты основной теоремы классической теории Галуа переносятся (по мере возможности) на общие абстрактные категории.

В первом параграфе первой главы определяются и исследуются полугруппы и группы, естественно ассоциируемые с морфизмами произвольной категории.

Определение 1.1.1. Для произвольных объектов A и B на $\mathrm{End}\, A \times \mathrm{Mor}\,(A,B) \times \mathrm{End} B$ определим тернарное отношение равенством $\alpha\varphi = \varphi\beta$. Будем называть α *перестановочным слева*, β – *перестановочным справа* эндоморфизмом, (α,β) – *парой ассоциированных перестановочных эндоморфизмов относительно морфизма* φ.

Множество всех пар ассоциированных перестановочных эндоморфизмов определяет транзитивное полугрупповое соответствие $\mathcal{E}(\varphi)$ на $\mathrm{End} A \times \mathrm{End} B$, а множество всех пар ассоциированных перестановочных автоморфизмов – транзитивное групповое соответствие $\mathcal{A}(\varphi)$ на $\mathrm{Aut} A \times \mathrm{Aut} B$ (предложение 1.1.1). Стандартным образом определяются правые и левые образы подмножеств относительно соответствия $\mathcal{E}(\varphi)$ и отображения

$$\mathbf{B}(\mathrm{End}(A))\,\varphi_{\mathcal{E}}\,\mathbf{B}(\mathrm{End}(B)),\ \mathbf{B}(\mathrm{End}(B))\,\varphi^{\mathcal{E}}\,\mathbf{B}(\mathrm{End}(A))$$

и аналогично $\varphi_{\mathcal{A}}$ и $\varphi^{\mathcal{A}}$ для $\mathcal{A}(\varphi)$. Доказывается, что они изотонны, композиции $\varphi_{\mathcal{E}} \circ \varphi^{\mathcal{E}}$, $\varphi^{\mathcal{E}} \circ \varphi_{\mathcal{E}}$, $\varphi_{\mathcal{A}} \circ \varphi^{\mathcal{A}}$, $\varphi^{\mathcal{A}} \circ \varphi_{\mathcal{A}}$ – увеличивающие отображения, а отображения $\varphi_{\mathcal{E}}$, $\varphi^{\mathcal{E}}$ и $\varphi_{\mathcal{A}}$, $\varphi^{\mathcal{A}}$ квазиобратны друг к другу, наконец, отображения $\varphi_{\mathcal{E}}$ и $\varphi^{\mathcal{E}}$ переводят подполугруппы с единицей в подполугруппы с единицей, а отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ и $\varphi^{\mathcal{A}}$ переводят подгруппы в подгруппы (предложение 1.1.2). С помощью последнего свойства определяются *аллотропная* полугруппа $S^{(\varphi)} = (\operatorname{End} A)\varphi_{\mathcal{E}}$, *аллотропная* группа $G^{(\varphi)} = (\operatorname{Aut} A)\varphi_{\mathcal{A}}$, *изотропная* полугруппа $S^{\varphi} = \{1_A\}\varphi_{\mathcal{E}}$, *изотропная* группа $G^{\varphi} = \{1_A\}\varphi_{\mathcal{A}}$. Двойственно определяются коаллотропные и коизотропные полугруппы и группы.

Если φ мономорфизм, то имеем гомоморфизм полугрупп $S^{(\varphi)}\,\varphi^{\mathcal{E}}\operatorname{End} A$ с образом $S_{(\varphi)}$, и гомоморфизм групп $G^{(\varphi)}\,\varphi^{\mathcal{A}}\operatorname{Aut} A$ с образом $G_{(\varphi)}$ и ядром G^{φ} (предложение 1.1.3). При изоморфизме $A\varphi B$ имеем изоморфизмы полугрупп эндоморфизмов

$$(\operatorname{End} A)\varphi_{\mathcal{E}}(\operatorname{End} B)\,|\;\; \alpha\varphi_{\mathcal{E}} = \varphi^{-1}\alpha\varphi,\;\; (\operatorname{End} B)\varphi^{\mathcal{E}}(\operatorname{End} A)\,|\;\; \beta\varphi^{\mathcal{E}} = \varphi\alpha\varphi^{-1}$$

и аналогичные изоморфизмы групп автоморфизмов $\operatorname{Aut} A$ и $\operatorname{Aut} B$. Полугруппа изотропии S^{φ} и группа изотропии G^{φ} инвариантны относительно сопряжений элементами аллотропной группы $G^{(\varphi)}$ (предложение 1.1.5). Поэтому нормализаторы полугруппы изотропии S^{φ} и группы изотропии G^{φ} в группе $\operatorname{Aut} B$ содержат аллотропную группу $G^{(\varphi)}$.

Далее исследуется поведение полугрупп и групп, ассоциированных с морфизмами $A\varphi B$, $B\psi C$, $A\chi C$ в том случае, когда χ является композицией φ и ψ. Если $\chi = \varphi\psi$ и φ – изоморфизм, то имеем равенство изотропных полугрупп $S^{\chi} = S^{\psi}$ и групп $G^{\chi} = G^{\psi}$. Поэтому корректно определяются понятия изотропной полугруппы и изотропной группы подобъекта с помощью его произвольного представителя. Двойственно вводятся понятия коизотропной полугруппы и группы факторобъекта.

Во втором параграфе изучаются морфизмы, стандартно ассоциируемые с подмножествами полугруппы эндоморфизмов объекта.

Определение 1.2.1. Морфизм $K\kappa A$ называется *неподвижным* или *стабильным* относительно множества эндоморфизмов $M \subset \operatorname{End} A$, если он стабилен относительно всех $\alpha \in M$: $\kappa\alpha_* = \kappa \cdot \alpha = \kappa$

Обозначим через $\breve{A}_M$ и $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$, соответственно, классы всех морфизмов в объект A и всех подобъектов этого объекта, стабильных относительно M. Принадлежащий классу $\breve{A}_M$ мономорфный правый наибольший общий делитель этого класса называется *стабилизацией* объекта A по M.

Стабилизация любого объекта по произвольному подмножеству его полугруппы эндоморфизмов в случае существования определяется с точностью до умножения слева на изоморфизмы, т.е. по существу является подобъектом рассматриваемого объекта, определенным однозначно. Точнее, он является наибольшим подобъектом класса $\mathbf{P}_M(A)$.

Определение 1.2.3. Морфизм $K\kappa A$ называется *совершенной* стабилизацией, если является стабилизацией по единственной полугруппе эндоморфизмов $S \subset \mathrm{End}A$, замкнутой относительно обращения элементов.

Главными результатами этого параграфа являются следующие две теоремы.

Теорема 1.2.7. *Если морфизм $K\kappa A$ является стабилизацией, то*

(i) нормализатор его изотропной полугруппы S^κ в группе $AutA$ содержит аллотропную группу $G^{(\kappa)}$ и содержится в аллотропной полугруппе $S^{(\kappa)}$ морфизма κ;

(ii) нормализатор изотропной группы G^κ морфизма κ в $AutA$ совпадает с аллотропной группой $G^{(\kappa)}$ этого морфизма.

Теорема 1.2.13. *Пусть $\chi = \varphi\psi$ – совершенная стабилизация с группой изотропии G, а ψ – стабилизация с группой изотропии H. Тогда H является подгруппой группы G, причем φ является стабилизацией по $G\psi^a \cong G/H$ в том случае, когда H – нормальный делитель группы G. Обратно, если φ – стабилизация по множеству автоморфизмов, перестановочных с ψ, то H – нормальный делитель G.*

В третьем параграфе вводится понятие соответствия Галуа между ординалами, соответствующей ему операции замыкания и доказывается основная теорема 1.3.3.

Определения 1.3.1 и 1.3.2. Пара отображений ординалов $\mathcal{X}w_*\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}w^*\mathcal{X}$, где (а) w_* и w^* – антиизотонные отображения; (б) w_*w^* and w^*w_* – увеличивающие отображения, называется *соответствием Галуа*. Элементы $\bar{u} = uw_*w^*$ и $\bar{v} = vw^*w_*$ называются *замыканиями*, соответственно, элементов $u \in \mathcal{X}$ и $v \in \mathcal{Y}$ относительно соответствия Галуа

w.

Полученные для такого общего соответствия Галуа и ассоциированной с ним операции замыкания свойства применяются в следующей ситуации. Пусть A объект произвольной категории. Определяется соответствие $r(A)$ из $\check{A}$ в $\hat{A}\times\hat{A}$ как класс всех троек морфизмов $(\varphi,\psi_1,\psi_2)\in\check{A}\times(\hat{A}\times\hat{A})$, удовлетворяющих равенству $\varphi\psi_1=\varphi\psi_2$. Пара $\mathbf{r}(A)$ отображений $\mathbf{B}(\check{A})r(A)_*\mathbf{B}(\hat{A}\times\hat{A})$ и $\mathbf{B}(\hat{A}\times\hat{A})r(A)^*\mathbf{B}(\check{A})$ являются соответствиями Галуа.

Теорема 1.3.3. *Предположим, что объект A обладает свойствами:*

(а) любой морфизм в объект A разлагается в композицию кообраза и образа;

(б) для любого семейства подобъектов объекта A существует сумма (= композит);

(в) образ каждого класса $\mathcal{A}\in\mathbf{B}(\hat{A}\times\hat{A})$ относительно $r(A)^*$ супернормален.

Тогда следующие классы биективны.

(i) Класс $\mathbf{B}_0(\check{A})$ элементов $a\in\mathbf{B}(\check{A})$, замкнутых относительно $\mathbf{r}(A)$.

(i′) Класс $\mathbf{P}_0(A)$ всех подобъектов объекта A, являющихся универсальными уравнителями подклассов $\mathcal{A}$ класса $\hat{A}\times\hat{A}$.

(ii) Класс $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ элементов $\mathcal{A}\in\mathbf{B}(\hat{A}\times\hat{A})$, замкнутых относительно $\mathbf{r}(A)$.

(ii′) Класс $\mathbf{P}_0(AutA)$ всех подгрупп группы $AutA$, являющихся группами изотропии подклассов a класса $\check{A}$.

Теоремы 1.2.13 и 1.3.3 являются аналогами основной теоремы классической теории Галуа в общекатегорной ситуации.

Во второй главе первой части рассматриваются категории, более близкие к категории полей и для них получается полный аналог основной теоремы классической теории Галуа.

В первом параграфе определяются и изучаются левые (двойственно – правые) и двусторонние множества частных морфизма, в частности, связи этих множеств с (ко)изотропными группами.

Во втором параграфе вводится ключевое для всей главы понятие регулярного морфизма.

Определение 2.2.1. Морфизм $A\varphi B$ называется *регулярным* относительно морфизма $B\psi C$, если из равенства $\varphi\psi=\varphi\psi'$ следует равенство $\psi'=\psi\gamma$ при некотором автоморфизме γ.

Исследуются свойства регулярности. Выводятся некоторые достаточные условия для регулярности расширения полей (предложение 2.2.2 и следствие из него).

В третьем параграфе *нормальность* морфизма $A\varphi B$ относительно морфизма $B\psi C$ определяется условием: $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi' \Longrightarrow \psi' = \beta\psi, \quad \beta \in AutB$. Изучаются свойства нормальности морфизма, устанавливается связь между этим понятием и нормальными расширениями полей (предложение 2.3.4).

Следующие три параграфа посвящены вопросам сепарабельности.

В четвертом параграфе определяется *степень сепарабельности* $\mathrm{sep}_\chi\varphi$ морфизма $A\varphi B$ в морфизме $A\chi C$ как мощность $|\varphi\backslash\chi|$ множества левых частных $\varphi\backslash\chi$. Если морфизм φ регулярен в морфизме χ, то множество левых частных $\varphi\backslash\chi$ биективно множеству левых смежных классов $G^\psi\backslash G^\chi$ при любом $\psi \in \varphi\backslash\chi$. Поэтому $\mathrm{sep}_\chi\varphi$ равна индексу подгруппы G^ψ изотропной группы G^χ. Если морфизм φ нормален в морфизме χ, то $\varphi\backslash\chi$ биективно изотропной группе G^φ, следовательно, $\mathrm{sep}_\chi\varphi = |G^\varphi|$. Доказывается свойство мультипликативности степени сепарабельности: если слои $\psi\backslash v$ всех точек $v \in \varphi\backslash u$ равномощны, то $\mathrm{sep}_u\chi = \mathrm{sep}_u\varphi \cdot \mathrm{sep}_v\psi$.

С помощью степени сепарабельности в пятом параграфе определяются *чистая несепарабельность* морфизма $A\varphi B$ относительно морфизма BvW (в морфизме $u = \varphi v$) посредством условия $|\varphi\backslash u| = \mathrm{sep}_u\varphi = 1$ и исследуются свойства чистой несепарабельности.

В шестом параграфе определяется *сепарабельность мономорфизма $A\varphi B$ относительно мономорфизма BvW* требованием, чтобы из равенства множеств частных $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$ для правых мономорфных делителей $X\eta B$ и $X'\eta' B$ морфизма φ следовало существование изоморфизма $X\sigma X''$ такого, что $\eta' = \sigma\eta$.

Морфизм $A\varphi B$ называется *сепарабельным в морфизме AuW*, если φ сепарабельно относительно любого $v \in \varphi\backslash u$. В случае регулярности морфизма φ в u сепарабельность φ в u сводится к сепарабельности φ относительно некоторого $v \in \varphi\backslash u$. Исследуются свойства сепарабельности. Введенное общекатегорное понятие сепарабельности морфизма $A\varphi B$ в морфизме AuW в категории полей совпадает с классическим понятием сепарабельности алгебраического расширения полей φ, если в качестве u взять, например, алгебраическое замыкание поля A.

Седьмой параграф посвящен морфизмам Галуа. Морфизм $A\chi C$ называется морфизмом Галуа относительно CwW (или в $u = \chi w$), если он регулярен, нормален и сепарабелен относительно w (соотв., в u). Определяемый морфизмом Галуа подобъект объекта C называется подобъектом Галуа. Группа изотропии G^χ морфизма Галуа χ называется группой Галуа. Любой морфизм $B\psi C$ делящий χ справа, также будет морфизмом Галуа. Соответствующие им подгруппы группы Галуа называются подгруппами Галуа. Здесь доказывается основной результат второй главы.

Теорема 2.7.6. *Пусть $A\chi C$ – морфизм Галуа относительно CwW (в $u = \chi w$) и $\chi = \varphi\psi$ – произвольное разложение. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) Морфизм ψ является морфизмом Галуа относительно w (в $v = \psi w$);

(б) Если существует композит любых двух морфизмов в объекте C, то существуют стабилизации по всем подгруппам Галуа H группы Галуа G^χ и индуцированная пара отображений составляет соответствие Галуа с множествами замкнутых элементов $\mathcal{P}_\chi(C)$ и $\mathcal{P}_{Gal}(G)$, которые a pasteriori *биективны.*

(в) Если морфизм φ является морфизмом Галуа относительно v (в u), то группа Галуа G^ψ является нормальным делителем группы Галуа G^χ. Обратная импликация выполняется в случае, когда для всяких двух морфизмов в объект C существует композит и каждый морфизм множества частных $\varphi\backslash u$ делится на ψ. При этом группа Галуа G^φ изоморфна факторгруппе $G^\chi\backslash G^\psi$.

Заключительный восьмой параграф этой главы посвящен регулярным замыканиям. Объект A называется *регулярно замкнутым*, если из регулярности морфизма $A\varphi B$ относительно некоторого морфизма $B\varphi C$ (или в морфизме $\chi = \varphi\psi$) следует, что φ – изоморфизм. Морфизм AuW называется *регулярным замыканием* объекта A, если (i) объект W регулярно замкнут; (ii) морфизм $A\varphi B$ регулярен относительно морфизма $B\psi C$ (в $\chi = \varphi\psi$) тогда и только тогда, когда $u = \chi w$ делится на χ. В случае существования, регулярное замыкание объекта A определяется однозначно, с точностью до изоморфизма объекта W.

Теорема 2.7.6 принимает вполне классический вид, если предположить, что объект A обладает регулярным замыканием, а объект C – композитами подобъектов. Таким образом, в классическом виде теорема Галуа верна для произвольных категорий с регулярными замыканиями и композитами подобъектов.

В третьей главе вводится понятие нормализации мономорфизма в общих категориях, устанавливаются условия его существования (теоремы 3.2.1 и 3.2.6). Доказывается, что степень сепарабельности мономорфизма $A\varphi B$ в мономорфизме AuW равна индексу группы изотропии его нормализации $A\chi C$ в u относительно группы изотропии мономорфизма $\psi \in \varphi\backslash\chi$ (теорема 3.3.1).

Главный результат первого приложения – основная теорема пар. 6 о единственности несократимого разложения объекта в объединение конечного числа неприводимых подобъектов в категории с нулевыми морфизмами при некоторых дополнительных условиях и следствие из нее, охватывающие не только случай прямой суммы подобъектов и изоморфизма соответствующих неприводимых компонент (пар. 7), но и изогению объекта произведению простых подобъектов, как в случае абелевых многообразий ([42], теорема Пуанкаре о полной приводимостн и следствия из нее).

Во втором Appendix-е строится иерархия категорий бинаров $\mathcal{C}^T$ типа T, вводятся понятия предкатегории и предфунктора и с помощью забывающего функтора и некоторой процедуры „вспоминания“ определяются инъективные функторы $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^T)\, e^{\mathcal{F}}\, \mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})^T$ для произвольной категории $\mathcal{C}$ и предкатегории $\mathcal{D}$. Доказывается, что при некоторых ограничениях на тип T или категорию $\mathcal{C}$ этот функтор обратим (теорема 5.3.1).

Вторая часть диссертации – алгеброгеометрическая. Как известно, одной из важнейших задач алгебраической геометрии является определение бирационального типа алгебраического многообразия, вычисление инвариантов бирациональных преобразований. Если такая классификация для алгебраических кривых и алгебраических поверхностей была сравнительно давно и хорошо известна, для трехмерных многообразий уже вопрос рациональности и унирациональности кубики в $\mathbb{P}^4$ оказался очень трудным и был решен только в 1972 году Клеменсом и Гриффитсом с применением теории многообразий Прима ([81]). Не только в этом случае, но и в ряде других (например, пересечения трех квадрик, расслоения на коники [110], [112], [76], [77]) средний якобиан возникает как многообразие Прима двулистного накрытия кривых и появляется необходимость отличения многообразия Прима от якобиана кривой. В этом вопросе основополагающим является следующий результат Мамфорда ([101]).

Теорема. Пусть $\pi : \tilde{C} \to C$ – неразветвленное двулистное накрытие кривых, (P, Ξ) – соответствующее главно поляризованное многообразие Прима. Тогда, если род $g(C) \geq 5$ и кривая C не гиперэллиптична, то $\dim \mathrm{sing}\Xi \leq g-5$, причем равенство $\dim \mathrm{sing}\Xi = g-5$ возможно только в следующих случаях:

1) C - тригональ, т.е. трехлистное накрытие проективной прямой;

2) C – суперэллиптическая кривая, т.е. двулистное накрытие эллиптической кривой;

3) C – неособая плоская кривая степени 5;

4) C – некая специальная кривая рода 5.

Главная цель второй части диссертации – исследование случаев совпадения многообразий Прима с якобианами кривых.

Категория алгебраических кривых и их конечнолистных накрытий, определенных над полем $\mathbf{k}$, двойственна категории конечных расширений трансцендентного расширения $\mathbf{k}[t]$ этого поля и имеет различные геометрические интерпретации (которые в достаточно полном объеме представлены в статье автора [20]). Группа автоморфизмов накрытия кривых суть группа Галуа соответствующего расширения полей. Поэтому теория алгебраических кривых является полигоном для применения результатов теории Галуа.

Основной объект изучения – двулистное накрытие $\pi : \tilde{C} \to C$ (полных неособых) алгебраических кривых и ассоциированное с таким накрытием многообразие Прима P_π, то есть связная компонента нуля норменного отображения якобианов $Nm : J(\tilde{C}) \to J(C)$. Если число точек ветвления накрытия π не превосходит двух, то каноническая главная поляризация $\Theta(\tilde{C})$ якобиана $J(\tilde{C})$ высекает на P_π удвоенную главную поляризацию Ξ_π. В главах 1 – 3 изучаются случаи изоморфизма главно поляризованного примиана (P_π, Ξ_π)

канонически поляризованному якобиану $(J(X), \Theta(X))$ некоторой кривой X.

В первой главе второй части рассматривается случай, когда C – гиперэллиптическая кривая, т.е. допускает двулистное („гиперэллиптическое“) накрытие $h : C \to \mathbb{P}^1$.

В первом параграфе разбирается случай неразветвленного накрытия. Такие накрытия биективны множеству $J_2(C)$ точек второго порядка якобиана $J(C)$. Устанавливается биекция между точками $J_2(C)$ и парами взаимно дополняющих подмножеств четной мощности множества точек ветвления накрытия π. Пусть C_1 и C_2 – гиперэллиптические кривые, соответственно разветвленные над точками этих пар подмножеств. Доказывается, что главно поляризованное многообразие Прима P_π, Ξ_π изоморфно произведению $(J(C_1), \Theta(C_1)) \times (J(C_2), \Theta(C_2))$. Этот результат был одновременно получен Д. Мамфордом и автором, имел приложения в теоретической физике ([84] – [87]) и получил название „теория Мамфорда – Далаляна“.

Во втором параграфе приводится сводка основных определений и соглашений.

В третьем параграфе изучаются двулистные накрытия $\pi : \tilde{C} \to C$, для которых имеется двулистное накрытие $h : C \to X$ со сквозным накрытием $\pi \circ h$, являющимся накрытием Галуа с клейновой группой Галуа $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Факторизуя $\tilde{C}$ по действию подгрупп группы $\mathbb{K}$, получаем башню с клейновой группой Галуа. На множестве Cov_C всех таких накрытий вводится групповая структура посредством указанных башен и изучаются ее свойства. Доказывается, что если в клейновой башне все кривые за исключением, может быть, π - разветвленные накрытия, то многообразие Прима P_π изогенно произведению многообразий Прима $P_{h'}$ и $P_{h''}$ накрытий h' и h'' построенной клейновой башни, характеризуется ядро изогении, получается соответствующее соотношение на канонические поляризации примианов. При $X = \mathbb{P}^1$ $P_{h'}$ и $P_{h''}$ превращаются в канонически поляризованные якобианы.

В четвертом параграфе изучаются примианы разветвленных (в двух точках) двулистных накрытий гиперэллиптических кривых. Для них строится башня кривых и их двулистных накрытий, сквозное накрытие которой является накрытием Галуа с группой Галуа, изоморфной группе (симметрий) квадрата Q. Оказывается, что если две точки ветвления накрытия π не инволютивны относительно гиперэллиптической инволюции, то в „башне квадрата“ имеется гиперэллиптическая кривая, (поляризованный) якобиан которой изоморфен (канонически поляризованному) примиану накрытия π.

В пятом параграфе изучается отображение Прима, определяемое сопоставлением элементу семейства двулистных накрытий кривых соответствующего многообразия Прима, и показывается, что существует целая плоскость накрытий с одинаковым многообразием Прима, хотя на общем слое отображения оно инъективно.

Первый раздел второй главы посвящен изложению техники „метода башен кривых и накрытий“. В первом параграфе строится категория алгебраических кривых и их конечнолистных накрытий. Следующие четыре параграфа посвящены построению и изучению башен кривых и накрытий со сквозным накрытием Галуа, изоморфным симметрической группе S_3 (пар. 2), группе квадрата Q (пар. 3), симметрической группе S_4 (пар. 4), знакопеременной группе A_4 (пар. 5). В этих параграфах вычисляются характеристики накрытий, их точки ветвления, роды кривых этих башен, изучаются возможности изоморфизма этих кривых, их получения как расслоенных произведений и факторизаций по действию групп автоморфизмов из других кривых башни или процедуры нормализации накрытий этих башен, способы конструирования этих башен и взаимосвязи между ними ("свойство обратимости конструкции“), а также исследуются другие подобные вопросы.

В первом параграфе второго раздела этой главы доказывается функториальность отображения Прима. Во втором параграфе доказывается, что в башнях с группой Галуа S_4 и A_4 существуют двухлистное накрытие π и четырехлистное накрытие q с изогенными многообразиями Прима

$$\alpha : P_\pi \to P_q, \qquad \alpha' : P_q \to P_\pi,$$

так что $\alpha' \circ \alpha = 2_{P_\pi}, \quad \alpha^*(\rho_q) = 2\rho_\pi$, где ρ_q, ρ_π – поляризации примианов, индуцированные каноническими поляризациями соответствующих якобианов. Если накрываемая кривая накрытия π тригональна и π разветвлено не более, чем над двумя точками, лежащими в одном слое тригонального накрытия, то главно поляризованные абелевы многообразия (P_π, Ξ_π) и $(J(Y), \theta(Y))$ изоморфны. (Здесь Y – накрывающая кривая накрытия q.) Таким образом, основной результат этой главы обобщает известный результат Рецилласа [102]. С применением свойства обратимости конструкции башен с группой Галуа S_3 или S_4 следует обобщение „теоремы Торелли“ об инъективности отображения Прима для семейства двулистных накрытий, удовлетворяющих условиям предыдущего утверждения.

В третьей главе проясняется ситуация в более общем случае. По двулистному накрытию $\pi : \tilde{C} \to C$ и трехлистному накрытию $t : C \to X$ полных неособых кривых строятся четырехлистное накрытие $q : Y \to X$ и двулистное накрытие $p : \tilde{Y} \to Y$ так, что многообразия Прима двулистных накрытий связаны парой гомоморфизмов, индуцирующих взаимно обратные изоморфизмы при $X = \mathbb{P}^1$ и некотором ограничительном условии на ветвления. Эта конструкция обобщает известную тетрагональную конструкцию Донаги и позволяет сделать некоторые замечания к его гипотезам .

После построения в пар. 1 двух башен для случаев нормального и не нормального накрытия t, во втором параграфе с помощью двойных классов смежности группы Галуа вычисляются ветвления нужных накрытий этих башен и выводится соотношение на роды соответствующих кривых, превращающееся в равенство, когда X проективная прямая или эллиптическая кривая.

В третьем параграфе доказывается основной результат о существовании изогенного вложения $\alpha : P_\pi \to P_p$ и сюръективного гомоморфизма $\alpha' : P_p \to P_\pi$, для которых $\alpha' \cdot \alpha = 4P_\pi$. При этом

$$\ker\alpha \supset \pi^*(\ker t_*) \cap P_\pi, \qquad \ker\alpha' \supset p^*(\ker q_*) \cap P_p,$$

а канонические поляризации ρ_π и ρ_p примианов P_π и P_p связаны соотношением

$$\hat{\alpha} \cdot \rho_p \cdot \alpha = 4\rho_\pi.$$

Таким образом, многообразие Прима двулистного накрытия тригональной кривой, разветвленного над двумя точками, не принадлежащими одному дивизору тригонального ряда, совпадает с многообразием Прима двулистного накрытия кривой с рядом g^1_4.

В четвертой главе второй части диссертации исследуются алгебраические кривые, несущие полные линейные ряды g^1_4 без неподвижных точек, то есть четырехлистные накрытия проективной прямой $\mathbb{P}^1$. Такие кривые называются тетрагоналями, а соответствующие ряды и накрытия – тетрагональными. Интерес к тетрагоналям обусловлен, в частности, той ролью, которую они играют в теории многообразий Прима: все исключительные случаи вышеприведенной теоремы Мамфорда об особенностях индуцированной поляризации примианов двулистных накрытий кривых можно отнести к тетрагоналям, если гиперэллиптические и тригональные накрытия рассматривать как вырождения накрытия тетрагонального.

В первом параграфе исследуется вопрос единственности ряда данного порядка на кривой. Доказывается, что если на негиперэллиптической кривой существуют полные линейные ряды Яри $g_p^1 \neq g_q^1$ без неподвижных компонент, то на ней существует полный линейный ряд g_r^1, $r \leq p+q-1$. Полностью описываются случаи существования на кривой двух тригональных, тригонального и тетрагонального, двух тетрагональных рядов. В частности, доказывается, что на кривых рода $g > 9$ может существовать тольно единственный тетрагональный ряд. На тетрагональных кривых малых родов ряд g_4^1 может определяться неоднозначно. Например, на любой негиперэллиптической, нетригональной кривой рода 5 существует, по крайней мере, одно однопараметрическое семейство тетрагональных рядов. Отметим, что с вопросом о единственности тетрагонального ряда на кривой связано решение проблемы Торелли для отображения Прима ([111], [77], [94], [90].

Во втором параграфе производится классификация тетрагоналей на основе группы Галуа нормализации тетрагонального накрытия, даются необходимые и достаточные условия принадлежности тетрагонали к тому или иному классификационному типу в терминах (а) дивизоров ветвлений, (б) ассоциированного расширения полей, (в) строения тетрагонального ряда. Таким образом характеризуются пять классификационных типов. Два классификационных типа представляют нормальные тетрагональные накрытия, соответственно, с клейновой и/или циклической группой Галуа. Три классификационных типа представляют не нормальные тетрагональные накрытия с нормализацией, имеющей группу Галуа, изоморфную, соответственно, диэдральной группе Q, знакопеременной группе A_4, симметрической группе S_4.

Следующие параграфы посвящены определению классификационных типов и описанию тетрагональных кривых и соответствующих тетрагональных рядов для кривых некоторых частных видов: суперэллиптических (пар. 3), неособых плоских квинтик (пар. 4), тригонально-тетрагональных (пар. 5).

Посвященная обобщению жордановой нормальной формы третья часть диссертации состоит из небольшого предисловия и трех глав.

Теория различных нормальных (канонических) форм для линейных операторов на конечномерных линейных (векторных) пространствах изучалась еще Вейерштрассом [124] и Жорданом [120] (см. Исторический очерк к Главам VI и VII трактата [117]). Классическая теорема Жордана утверждает, что если k - алгебраически замкнутое поле, L - конечномерное линейное пространство размерности n, определенное над k, A - произвольный линейный оператор на L, то найдется базис $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$, в котором матрица $A_{\mathbf{e}}$ оператора A будет прямой суммой квадратных блоков J_i, на главной диагонали которых стоят некоторые элементы a_i поля k, непосредственно выше и правее этих элементов стоят единичные элементы поля k, а остальные места заполнены его нулями. При этом a_i являются корнями характеристического многочлена $\chi_A(t) = \det(tE - A_{\mathbf{e}})$ оператора A (здесь E - единичная матрица соответствующего порядка), а прямые слагаемые J_i определяются однозначно (с точностью до произвольных перестановок).

На самом деле известные доказательства этой теоремы проходят при более слабом условии, когда характеристический многочлен оператора A разлагается над k на линейные множители. С каждой нормальной формой (матрицы) оператора A связано разложение оператора A в прямую сумму подоператоров A_i, являющихся суть ограничением A на подпространство L_i пространства L, равного сумме всех этих L_I. Каждое такое разложение максимально, т.е. все A_i - неразложимые операторы. Любые два разложения указанного вида переводятся друг в друга автоморфизмом (= обратимым линейным преобразованием) пространства L. С точки зрения теории матриц, суть вышеприведенного результата заключается в том, что в каждом классе сопряженности матриц можно выбрать (в каком-то смысле единственный) „хороший“ нормальный представитель.

Мальцев предлагает сделать следующие изменения в конструкции Жордана. Он заменяет диагональные элементы a_i сопровождающими матрицами неприводимых (над k) делителей характеристического многочлена $\chi_A(t)$. В классическом случае эти два объекта совпадают. Единичные элементы он заменяет единичными матрицами E (соответствующего порядка). При вышеуказанных ограничениях на поле k, оказывается верной соответствующим образом обобщенная теорема Жордана. Полученные обобщенную жорданову форму и составляющие ее обобщенные жордановы клетки (блоки) назовем обобщенной жордановой формой и обобщенными жордановыми клетками Мальцева или первого рода. Жордановы клетки первого рода неразложимы и классическая теорема Жордана следует из данного обобщения. Но это обобщение оставляет желать лучшего, потому что стесняющие ограничения на поле k не удается полностью снять.

В первой главе третьей части доказывается, что для обобщенных жордановых форм первого рода основная теорема верна, когда неприводимые делители характеристического многочлена $\chi_A(t)$ сепарабельны над k. Существуют линейные операторы, не удовлетворяющие этому условию сепарабельности, которые невозможно привести к обобщенной жордановой форме первого рода.

Первые два параграфа этой главы имеют вводный характер. В третьем параграфе изучается процедура расширения поля скаляров (процесс, аналогичный процедуре комплексификации вещественного поля), с помощью которой общий случай редуцируется к случаю алгебраически замкнутого поля скаляров. В четвертом параграфе доказывается, так называемая, „сепарабельная теорема". В пятом параграфе строится пример линейного оператора над полем $\mathbb{F}_2(u)$, где u – трансцендентный элемент, который неприводим к обобщенному жорданову виду первого рода.

Для того, чтобы обобщенная теорема Жордана оказалась верной для любого оператора A при произвольном основном поле k, надо сделать небольшое изменение в предлагаемой Мальцевым конструкции: единичную матрицу $\mathbf{E}$ надо заменить матрицей $\mathbf{F}$ (естественно, того же порядка), в левом нижнем углу которой стоит единица, а все остальные элементы – нули. Таким образом получаются обобщенная жорданова матрица и обобщенная жорданова клетка второго рода.

Во второй главе этой части теорема о существовании и единственности обобщенной жордановой формы второго рода выводится из обычной теоремы Жордана переходом к алгебраическому замыканию поля k (процедура расширения поля скаляров) и специальным алгоритмом сборки обобщенных жордановых клеток второго рода.

Здесь во втором параграфе строится функтор расширения поля скаляров, позволяющий сопоставить каждому линейному оператору $\mathcal{A}$, определенному над полем $\mathbf{k}$, некоторый ассоциированный оператор $\mathcal{A}_K$, определенный над расширением K поля $\mathbf{k}$.

В третьем параграфе изучается вопрос, какие операторы над K получаются таким образом. Доказывается следующий критерий сужаемости поля скаляров.

Теорема 11.3.1. Пусть K - расширение поля $\mathbf{k}$. Обычная жорданова нормальная матрица J с элементами из поля K (и следовательно, любая матрица над K, приводимая над K к жорданову нормальному виду J) будет матрицей некоторого оператора $\mathcal{A}_K$, где $\mathcal{A}$ - оператор над $\mathbf{k}$, если и только если выполняются следующие условия:

(i) характеристический многочлен $F_J(t)$ матрицы J принадлежит $\mathbf{k}[t]$;

(ii) число h_{ijs} жордановых клеток J_{ijk} матрицы J, имеющих порядок s и диагональные элементы λ_{ij}, являющиеся корнями неприводимого над $\mathbf{k}$ многочлена $P_i(t)$, не зависит от j;

(iii) порядок s_{ijk} жордановой клетки J_{ijk} матрицы J кратен степени несепарабельности ν_i многочлена $P_i(t)$ над $\mathbf{k}$.

В заключительном четвертом параграфе этой главы доказывается основная теорема.

Теорема 11.1.1. [Теорема о квазициклическом максимальном разложении (ТКМР)] Пусть $\mathbf{k}$ – произвольное поле, L – конечномерное линейное пространство над $\mathbf{k}$, $\mathcal{A}$ – линейный оператор на L, $m_{\mathcal{A}}(t)$ – минимальный полином оператора $\mathcal{A}$ и $m_{\mathcal{A}}(t) = p_1^{\mu_1}(t) \dots p_l^{\mu_l}(t)$ – (унитарное) неприводимое разложение $m_{\mathcal{A}}(t)$ над полем $\mathbf{k}$.

Тогда найдется базис $\mathbf{e}$ в L такой, что матрица $\mathcal{A}_{\mathbf{e}}$ оператора $\mathcal{A}$ в $\mathbf{e}$ есть прямая сумма неразложимых матриц

$$P = (\oplus_{ij} P_{1ij}) \oplus \ldots \oplus (\oplus_{ij} P_{lij}),$$

где каждая матрица P_{kij} $(k = 1, \ldots, l;\ i = \mu_k, \ldots, 1;\ j = 1, \ldots, n_{ki} - n_{k(i+1)})$ – квазициклическая матрица с i сопровождающими матрицами $[p_k(t)]$ на главной диагонали, а j параметризует все такие блоки. Здесь

$$n_{ki} = \dim_{K_k} \left(L_{ki}/L_{k(i-1)} \right), \quad L_{ki} = \ker \left(p_k(\mathcal{A})^i \right), \quad K_k = \mathbf{k}[t]/p_k(t)$$

при $i = 1, \ldots, \mu_k$ и $n_{k(\mu_k+1)} = 0$.

Любые два таких представления различаются только порядками прямых слагаемых. Таким образом, система, состоящая из:

(a) всех (унитарных) неприводимых делителей $p_k(t)$ минимального полинома $m_{\mathcal{A}}(t)$,

(b) кратностей μ_k этих делителей,

(c) размерностей n_{ki} для каждого $k = 1, \ldots, l$ и $i = 1, \ldots, \mu_k$

является полной системой инвариантов оператора $\mathcal{A}$.

В третьей главе дается прямое геометрическое доказательство вышеприведенной обобщенной теоремы Жордана второго рода, основанное на построении соответствующего базиса.

В первую очередь, линейный оператор разлагается в прямую сумму примарных операторов (пар. 2). В третьем параграфе строятся и изучаются фильтрации подпространств, связанные со степенями примарных операторов. С использованием этих фильтраций, в четвертом параграфе строится специальный, так называемый, поликвазициклический базис для примарного оператора. Наконец, в пятом параграфе завершается доказательство основной теоремы.

В вещественном случае $k = \mathbb{R}$ вместо сопровождающих матриц неприводимых многочленов второго порядка можно использовать матричное представление комплексных чисел, являющихся корнями характеристического многочлена оператора. Получающийся результат упомянут в заключении. В заключении же кратко излагаются результаты о связи обобщенной жордановой формы второго рода с рациональной (естественной) канонической формой.

Подчеркнем, что полученная обобщенная жорданова форма второго рода линейного оператора (= поликвазициклическая форма) идеально удобна. Она пригодна в случае произвольного основного поля $\mathbf{k}$ и любого оператора A над $\mathbf{k}$. Из нее можно получить и (обычную) жорданову, и рациональную каноническую формы. Итак, поликвазициклическая форма связывает классическую жорданову форму и рациональную каноническую форму. Другие известные канонические формы для специальных линейных операторов (формы Постникова и Мальцева) также можно получить из нее.

Во избежание чрезмерного разбухания (объема) диссертации, ряд новых результатов по теме диссертации, полученных автором (некоторые совместно со своими учениками), исключен из основной части диссертации и приводится только в заключении. Это до сих пор неопубликованные результаты об интерпретации категорной теории Галуа в рамках теории 2-категорий, а также опубликованные результаты, касающиеся слайс классификации категорий коалгебр для комонад (совместная статья автора с А. Петросяном), существования ненаследственных мономорфизмов в категорной теории групп (Г. Асатрян), категоризации оснований алгебраической геометрии и, так называемых, почти категорий.

Сделаем одно предупреждение о внутренних ссылках в диссертации. Если в ссылке на некоторый факт диссертации часть не указана, то подразумевается та часть диссертации, в которой стоит ссылка.

Часть I

Категорная теория Галуа

Первая часть диссертации состоит из трех основных глав, посвященных категорной теории Галуа, и двух приложений (аппендиксов), посвященных вопросу единственности разложения объекта в несократимое объединение неприводимых подобъектов (Appendix 1), и основаниям теории бинаров, т.е. объектов с одной бинарной операцией (Appendix 2).

Краткий обзор развития идей Галуа

Полное и окончательное решение вопроса разрешимости полиномиального уравнения от одного неизвестного в радикалах, финально оформившееся в классическую теорию Галуа, базируется на трех фундаментальных достижениях. Первым из них является введение понятия поля и переход от рассмотрения неприводимого многочлена к ассоциированному расширению поля коэффициентов этого многочлена. Во-вторых, это введение понятия группы, рассмотрение группы автоморфизмов расширения полей и построение соответствия Галуа между промежуточными полями и подгруппами этой группы. Наконец, третий этап – перевод на язык полей и групп проблемы разрешимости полиномиального уравнения в радикалах и решение возникающей теоретико – групповой задачи. Сердцевиной и главным звеном этой программы является второй пункт, в рамках которого доказывается следующая теорема.

Основная теорема классической теории Галуа

Пусть поле K является расширением Галуа конечной степени поля k, G – группа Галуа этого расширения.

а) Соответствие Галуа устанавливает биекцию между промежуточными полями E рассматриваемого расширения и подгруппами H группы G.

б) Поле K является расширением Галуа поля E.

в) Поле E является расширением Галуа поля k в том и только том случае, если подгруппа H нормальна в G; группа Галуа этого расширения изоморфна факторгруппе G/H.

Главным первоисточником этих результатов является [62], современные изложения имеются в [3], [68], [121]. Здесь нас будут интересовать, главным образом, те результаты, которые связаны с обобщениями основной теоремы или доказательством ее аналогов.

Прежде всего, основная теорема теории Галуа была перенесена на случай расширений полей бесконечной степени ([41]). Оказалось, что утверждения п.п. б) и в) справедливы и для бесконечных расширений Галуа. Однако в этом случае нарушается свойство п. а): разным подгруппам группы G может соответствовать одно и то же промежуточное поле E. Для восстановления биективности надо рассматривать только „замкнутые“ подгруппы группы G, каковыми являются наибольшие подгруппы, соответствующие промежуточным расширениям ([9]). Здесь замкнутость можно понимать как в смысле соответствия Галуа, так и, эквивалентно, относительно топологии на группе Галуа, имеющей в качестве базы окрестностей единицы все подгруппы группы G, являющиеся группами Галуа промежуточных расширений Галуа конечной степени над k.

Последний результат допускает максимальное в теории полей обобщение: при произвольном расширении K поля k с группой k-автоморфизмов G соответствием Галуа устанавливается биекция между множеством всех промежуточных полей E, над которыми K является расширением Галуа, и множеством всех компактных подгрупп группы G ([53], [18], [69], [17]).

В [20] теория Галуа переносится на тела, точнее, доказывается утверждение п. а) основной теоремы в случае подтела k инвариантных элементов тела K относительно конечной группы внешних автоморфизмов G, действующих на тело K. Этот результат дополняется утверждением о равенстве степени верхнего подрасширения, определенного промежуточным телом E, порядку соответствующей подгруппы H, а степени нижнего подрасширения – индексу H в G.

Основную теорему удается перенести и на некоммутативные кольца линейных преобразований векторного пространства над телом ([19]). При этом она претерпевает изменения, уже встречавшиеся в случае произвольного расширения полей и вызванные тем феноменом, что как "замкнутые"подкольца, так и "замкнутые"подгруппы не совпадают с множествами, соответственно, всех промежуточных подколец и всех подгрупп уже в случае конечной группы Галуа. Основные технические трудности связаны именно с описанием „замкнутых“ подколец и „замкнутых“ подгрупп ([19], [50], [51], [54]).

Как частный результат развитой теории получается полный аналог классической основной теоремы для случая подтела k данного тела K, образованного элементами, инвариантными относительно конечной группы его произвольных (а не только внешних) автоморфизмов. Однако „замкнутыми“ оказываются все подтела, но не все подгруппы. Этот результат удается распространить на случай бесконечной группы Галуа, только когда она состоит из внешних автоморфизмов ([19]).

Известны обобщения п. а) основной теоремы на случай, когда K – коммутативное кольцо без нетривиальных идемпотентов, являющееся конечно порожденным проективным модулем над подкольцом k элементов, инвариантных относительно группы Галуа G ([66], [11], [13], [44], [10]).

Весьма плодотворным оказалось приложение идей классической теории Галуа к обыкновенным дифференциальным уравнениям ([36], [37], [38], [39], [49], [48]), обзорно [35]. Параллельная теория была развита для дифференциальных полей с аналогичной основной теоремой, подвергшейся двум модификациям. Во-первых, место расширений Галуа обычных полей занимают расширения Пикара - Вессио (или, более общо, сильно нормальные расширения [66]) дифференциальных полей. В частности, это относится к исходному расширению K над k, причем предполагается, что k имеет алгебраически замкнутое поле констант характеристики нуль. Во-вторых, биекция множества промежуточных дифференциальных полей устанавливается, как и в случае расширения Галуа бесконечной степени для обычных полей, не со всеми подгруппами „дифференциальной“ группы Галуа, а только с ее „алгебраическими“ (замкнутыми в смысле соответствия Галуа) подгруппами. Группа Галуа расширения Пикара-Вессио является алгебраической матричной группой. Венцом теории является результат о том, что разрешимости компоненты единицы дифференциальной группы Галуа соответствует разрешимость дифференциального уравнения в квадратурах ([35]).

В самое последнее время была развита теория Галуа для пучков множеств, доказан аналог основной теоремы. (точнее п. а) этой теоремы) и полученные результаты были применены к предсхемам ([73]). Несколько особняком от общей канвы развития стоит, так называемая, треугольная теория Галуа ([5]).

Отметим также статьи ([64], [63], [7], [2], [55], [57] – [61]), которые содержат приложение идей классической теории Галуа к банаховым алгебрам. Согласно ([67]) имеется также небольшое число работ, посвященных теории Галуа общих алгебраических систем ([40], [1]).

Понятия и результаты, двойственные к тем, что составляют классическую теорию Галуа, а также ее вышеприведенные модификации, возникают в тесно связанных друг с другом теориях римановых поверхностей, алгебраических функций и алгебраических кривых, и в общем виде – в алгебраической геометрии (в частности, в связи с вопросами униформизации алгебраических многообразий (см. [69]).

Так, в [71] определяется группа монодромии римановой поверхности (более точно, конечнолистного накрытия комплексной сферы, которое ассоциировано с римановой поверхностью по построению), являющаяся ни чем иным, как группой Галуа соответствующего конечного расширения полей рациональных функций.

В [15] вводится понятие группы накрывающих преобразований накрытия $p : Y \to X$ топологических пространств и доказывается, что в случае, когда X – риманова поверхность, а накрытие p индуцировано расширением L, получающимся присоединением к полю K мероморфных функций на X алгебраической функции, являющейся корнем целого многочлена с коэффициентами из K, группа накрывающих преобразований изоморфна группе автоморфизмов поля L над К. При этом накрытие Галуа можно определить либо требованием, чтобы соответствующее расширение полей мероморфных функций было расширением Галуа, либо эквивалентным условием транзитивности действия группы накрывающих преобразований на любом слое накрытия. Отметим, что, в частности, универсальное накрытие любого связного многообразия X есть накрытие Галуа и его группа Галуа изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(X)$ ([30]). Именно такой подход, основанный на использовании групп Галуа, позволяет ввести понятие фундаментальной группы для произвольных схем ([46] и обзорно [45]).

Сопоставление

$$\text{a curve} \longmapsto \text{field of rational functions on the same curve} \qquad (*)$$

устанавливает двойственность между категориями полных неособых алгебраических кривых над фиксированным полем k и конечных расширений трансцендентного расширения $k(t)$ поля k. К сожалению, для многообразий высших размерностей такой двойственности не существует: гладкая полная модель соответствует полю степени трансцендентности $>$ 2 неоднозначно даже с точностью до бирегулярного изоморфизма ([72]). Замечание, что нормальное накрытие алгебраического многообразия X имеет бирациональный характер, т.е. зависит только от (конечного сепарабельного) расширения L поля K рациональных функций многообразия X, верное для алгебраических многообразий произвольной размерности, позволяет перенести всю терминологию для расширений полей на конечные накрытия нормальных алгебраических многообразий вместе с некоторыми двойственными результатами ([52]).

В [66] „в наиболее общем смысле“ теория Галуа трактуется как „теория, изучающая те или иные математические объекты на основе их группы автоморфизмов“. Значит естественно было ожидать развитие теории Галуа в рамках теории категорий. Однако автору такие попытки не известны. Первым шагом в этом направлении представляется настоящая работа. Под разрабатываемой „категорной теорией Галуа“ подразумевается теория, которая ставит своей целью изучение зависимости между группой автоморфизмов (и более общо – полугруппой эндоморфизмов) объекта и его подобъектами (двойственно, фактобъектами) в абстрактной и по возможности максимально общей категории. При этом оказывается, что часто удобнее вместо подобъектов и факторобъектов данного объекта рассматривать морфизмы в него и из него или даже их семейства. С одной стороны, категорная теория Галуа может быть рассмотрена как одна из параллелей классической теории Галуа наряду с ее вышеприведенными аналогами и обобщениями. Вместе с тем, она занимает в этой цепи особое место в силу объемлющего, объединяющего и унифицирующего характера теоретико-категорного метода. Его специфика проявляется также в том, что в то время, как результаты категорной теории Галуа навеяны, а иногда просто скалькированы с классической или параллельных теорий Галуа, их доказательства полностью отличаются от известных, опирающихся на теоретико-множественный подход доказательств. Возможность категорного обобщения теории Галуа показывает ее истиное место в математике.

Отметим, что частные теории Галуа служат не только эталоном для подражания для категорной теории, но и возможной областью приложений. Так, интерес автора к разрабатываемой тематике был обусловлен его работами ([3], [5]) (в которых факторизацией по подгруппам группы Галуа строятся башни накрытий кривых и исследуются многообразия Прима этих накрытий), стремлением строго обосновать применение теории Галуа.

Следует отметить, что увлечение категорной теорией Галуа было лишь эпизодом в математической биографии автора, связанным с вышеуказанными вопросами теории многообразий Прима. Между тем, в течение последней пары десятилетий в области категорной теории Галуа активно работала группа специалистов теории категорий, среди которых особо можно выделить Г. Джанелидзе ([21] – [34]).

Глава 1

Общая категорная теория Галуа

В первой главе развивается „теория Галуа“ для общих (абстрактных) категорий. В частности, на общие абстрактные категории переносится основная теорема классической теории Галуа.

Глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе изучаются группы и полугруппы, стандартно ассоциируемые с произвольным морфизмом. Во втором параграфе вводятся понятия стабилизации и, двойственно, факторизации объекта по подмножеству его эндоморфизмов и исследуются их свойства. Здесь доказывается теорема 1.2.13, являющаяся обобщением п.(в) основной теоремы классической теории Галуа. В третьем параграфе приводится конструкция соответствия Галуа и ассоциированного с ним оператора замыкания, доказываются результаты, обобщающие утверждение п. (а) основной теоремы классической теории Галуа (теорема 1.3.3).

Сводка некоторых обозначений и соглашений

Морфизм φ из объекта A в объект B обозначается $A\varphi B$, множество всех морфизмов из объекта A в объект B обозначается $\mathrm{Mor}(A, B)$. Композиция морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ записывается слева направо как $\varphi\psi$ или $\varphi \circ \psi$. Полугруппа эндоморфизмов объекта A обозначается $\mathrm{End}\, A$, а группа автоморфизмов – $\mathrm{Aut}\, A$, их единичный элемент – 1_A.

Класс всех подклассов класса A (в частности, множество всех подмножеств множества

A) обозначается $\mathbf{B}(A)$ и называется булианом A. Если $A\varphi B$ – отображение множеств или классов, образ A в B обозначается $A\varphi$, а прообраз B в A – $b\varphi^{-1}$.

Частично упорядоченные множества и классы называются ординалами. Отображение $A\varphi A$ ординала A называется увеличивающим, если $a\varphi \geq a$ для любого $a \in A$. Двойственно определяется уменьшающее отображение. Морфизмы $A\varphi B$ и $B\psi A$ называются квазиобратными друг к другу, если $\varphi\psi\varphi = \varphi$ и $\psi\varphi\psi = \psi$.

Класс всех морфизмов в объект A обозначается $\check{A}$, класс всех морфизмов из объекта A – через $\hat{A}$. С каждым морфизмом $A\varphi B$ ассоциированы отображения $\check{A}\varphi_*\check{B}$, $\kappa\varphi_* = \kappa\circ\varphi$ и $\hat{B}\varphi^*\hat{A}$, $\lambda\varphi^*\varphi\circ\lambda$. Класс всех подобъектов объектов A обозначается $\mathbf{P}(A)$, факторобъектов – $\mathbf{Q}(A)$. Подобъект и факторобъект записываются с помощью любого представляющего их морфизма. Свободно используется теоретико-категорная терминология, принятая в [70]. В частности, это касается терминов конус, коконус, разделяющий конус, коразделяющий (плотный) коконус. Отметим одно отличие в терминологии по сравнению с [70]. Расслоенные произведения называются коамальгамами, двойственно, корасслоенные произведения - амальгамами.

Формулировки двойственных понятий и свойств в тексте приводятся в исключительных случаях. Для названий двойственных понятий используется приставка "ко", ссылка на дуальные к сформулированным утверждения осуществляется с помощью верхнего индекса „звездочка“.

1.1 Полугруппы и группы, ассоциированные с морфизмами

Определение 1.1.1. Для произвольных объектов A и B рассмотрим тернарное отношение, определяемое равенством $\alpha\varphi = \varphi\beta$, где $\alpha \in \mathrm{End}\, A$, $\beta \in \mathrm{End} B$ и $\varphi \in \mathrm{Mor}\,(A, B)$. Будем называть α *перестановочным слева*, β – *перестановочным справа* эндоморфизмом, (α, β) – *парой ассоциированных перестановочных эндоморфизмов относительно морфизма* φ.

Множество всех пар ассоциированных перестановочных эндоморфизмов определяет соответствие $\mathcal{E}(\varphi)$ на $\mathrm{End}A \times \mathrm{End}B$, а множество всех пар ассоциированных перестановочных автоморфизмов – соответствие $\mathcal{A}$ на $\mathrm{Aut}A \times \mathrm{Aut}B$.

Предложение 1.1.1. *(а) Соответствие $\mathcal{E}(\varphi)$ – полугрупповое, соответствие $\mathcal{A}(\varphi)$ – групповое.*

(б) Соответствия $\mathcal{E}(\varphi)$ и (φ) транзитивны в следующем смысле:

$$\mathcal{E}(\varphi)\cdot\mathcal{E}(\varphi)^t\cdot\mathcal{E}(\varphi)\subset\mathcal{E}(\varphi), \qquad \mathcal{E}(\varphi)^t\cdot\mathcal{E}(\varphi)\cdot\mathcal{E}(\varphi)^t\subset\mathcal{E}(\varphi)^t,$$

$$\mathcal{A}(\varphi)\cdot\mathcal{A}(\varphi)^t\cdot\mathcal{A}(\varphi)\subset\mathcal{A}(\varphi), \qquad \mathcal{A}(\varphi)^t\cdot\mathcal{A}(\varphi)\cdot\mathcal{A}(\varphi)^t\subset\mathcal{A}(\varphi)^t,$$

где значок t показывает транспонированное соответствие.

Стандартным образом определяются правые и левые образы подмножеств относительно соответствий $\mathcal{E}(\varphi)$ и $\mathcal{A}(\varphi)$. Так, правый образ $a\varphi_{\mathcal{E}}$, подмножества $a\subset \mathrm{End}\,A$ относительно соответствия $\mathcal{E}(\varphi)$ состоит из всех $\beta\in\mathrm{End}\,B$, для которых существуют $\alpha\in a$ такие, что $(\alpha,\beta)\in\mathcal{E}(\varphi)$. Таким образом получаем отображения

$$\mathbf{B}(\mathrm{End}(A))\,\varphi_{\mathcal{E}}\,\mathbf{B}(\mathrm{End}(B)), \qquad \mathbf{B}(\mathrm{End}(B))\,\varphi^{\mathcal{E}}\,\mathbf{B}(\mathrm{End}(A)),$$

$$\mathbf{B}(\mathrm{Aut}(A))\,\varphi_{\mathcal{A}}\,\mathbf{B}(\mathrm{Aut}(B)), \qquad \mathbf{B}(\mathrm{Aut}(B))\,\varphi^{\mathcal{A}}\,\mathbf{B}(\mathrm{Aut}(A)).$$

Предложение 1.1.2. *Отображения $\varphi_{\mathcal{E}}$, $\varphi^{\mathcal{E}}$, $\varphi_{\mathcal{A}}$, $\varphi^{\mathcal{A}}$ удовлетворяют следующим свойствам*

(а) Все они изотонны.

(б) Композиции $\varphi_{\mathcal{E}},\circ\varphi^{\mathcal{E}}$, $\varphi^{\mathcal{E}}\circ\varphi_{\mathcal{E}}$, $\varphi_{\mathcal{A}},\circ\varphi^{\mathcal{A}}$, $\varphi^{\mathcal{A}}\circ\varphi_{\mathcal{A}}$ – увеличивающие отображения.

(в) Отображения $\varphi_{\mathcal{E}}$, $\varphi^{\mathcal{E}}$ и $\varphi_{\mathcal{A}}$, $\varphi^{\mathcal{A}}$ квазиобратны друг к другу.

(г) Отображения $\varphi_{\mathcal{E}}$ и $\varphi^{\mathcal{E}}$ переводят подполугруппы с единицей в подполугруппы с единицей, а отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ и $\varphi^{\mathcal{A}}$ переводят подгруппы в подгруппы.

Доказательство. Утверждения (а) и (б) справедливы для отображений, ассоциированных с произвольным соответствием, а (г) – для произвольных полугрупповых и групповых соответствий ([12], гл.1, пар. 2). На булианах множеств подразумевается естественный порядок по включению. Что касается утверждения (в), включение $a\,\varphi_{\mathcal{E}}\,\varphi^{\mathcal{E}}\,\varphi_{\mathcal{E}} \supset \varphi_{\mathcal{E}}$ следует из (а), (б), а обратное включение вытекает из свойства транзитивности соответствия $\mathcal{E}(\varphi)$

□

Применив свойство (г) к тривиальному и тотальному подполугруппам полугруппы $\operatorname{End} A$ и подгруппам группы $\operatorname{Aut} A$, получаем следующие образы:

$S^{(\varphi)} = (\operatorname{End} A)\varphi_{\mathcal{E}}$ – полугруппа правых перестановочных с φ эндоморфизмов или, иначе говоря, *аллотропная* полугруппа морфизма φ;

$G^{(\varphi)} = (\operatorname{Aut} A)\varphi_{\mathcal{A}}$ – группа правых перестановочных с φ автоморфизмов, т. е. *аллотропная* группа морфизма φ;

$S^{\varphi} = \{1_A\}\varphi_{\mathcal{E}}$ – полугруппа правых изотропных относительно φ эндоморфизмов или *изотропная* полугруппа морфизма φ;

$G^{\varphi} = \{1_A\}\varphi_{\mathcal{A}}$ – группа правых изотропных для φ автоморфизмов, т. е. *изотропная* группа морфизма φ.

Двойственные коаллотропные и коизотропные полугруппы и группы обозначаются аналогично с помощью нижнего индекса.

Предложение 1.1.3. *Если φ мономорфизм, то*

(а) $\mathcal{E}(\varphi)$ – график гомоморфизма полугрупп $S^{(\varphi)}\,\varphi^{\mathcal{E}}\operatorname{End} A$ с образом $S_{(\varphi)}$,

а) $\mathcal{A}(\varphi)$ – график гомоморфизма групп $G^{(\varphi)}\,\varphi^{\mathcal{A}}\operatorname{Aut} A$ с образом $G_{(\varphi)}$ и ядром G^{φ}.

Доказательство. Если $\alpha_1\varphi = \alpha_2\varphi = \varphi\beta$, то $\alpha_1 = \alpha_2$ ввиду мономорфности φ, поэтому $\varphi^{\mathcal{E}}$ и $\varphi^{\mathcal{A}}$ – отображения. Гомоморфность этих отображений следует из того, что соответствия $\mathcal{E}(\varphi)$ и $\mathcal{A}(\varphi)$ замкнуты относительно покомпонентного умножения. Утверждения об образах очевидны, а $\ker\varphi_{\mathcal{A}} = G^{\varphi}$, потому что равенство $\varphi\beta = 1\varphi$ по определению изотропной группы означает, что $\beta \in G^{\varphi}$. □

Следствие 1.1.4. *Если φ – биморфизм, то соответствия $\mathcal{E}(\varphi)$ и $\mathcal{A}(\gamma)$ определяют изоморфизмы полугрупп $S^{(\varphi)}\,\varphi^{\mathcal{E}}S_{(\varphi)}$ и групп $G^{(\varphi)}\,\varphi^{\mathcal{A}}G_{(\varphi)}$, обратными к которым будут $S_{(\varphi)}\,\varphi_{\mathcal{E}}\,S^{(\varphi)}$ и $G_{(\varphi)}\,\varphi_{\mathcal{A}}\,G^{(\varphi)}$ соответственно.*

Следствие немедленно вытекает из доказанного предложения и двойственного к нему утверждения.

В частности, при изоморфизме $A\varphi B$ имеем изоморфизмы полугрупп эндоморфизмов

$$(\mathrm{End}\, A)\varphi_{\mathcal{E}}(\mathrm{End}\, B) \mid \ \alpha\varphi_{\mathcal{E}} = \varphi^{-1}\alpha\varphi, \ \ (\mathrm{End}\, B)\varphi^{\mathcal{E}}(\mathrm{End}\, A) \mid \ \beta\varphi^{\mathcal{E}} = \varphi\alpha\varphi^{-1}$$

и групп автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, A$, и $\mathrm{Aut}\, B$.

Предложение 1.1.5. *Полугруппа изотропии S^{φ} и группа изотропии G^{φ} инвариантны относительно сопряжений элементами аллотропной группы $G^{(\varphi)}$.*

Доказательство. Для произвольных эндоморфизмов $\beta \in G^{(\varphi)}$ и $b \in S^{\varphi}$

$$\varphi\beta b = \alpha\varphi b = \alpha\varphi = \varphi\beta.$$

откуда следует, что $\beta b\beta^{-1} \in S^{\varphi}$. Поэтому $\beta S^{\varphi}\beta^{-1} \subset S^{\varphi}$. Поменяв β на β^{-1}, получим обратное включение. Если $b \in G^{\varphi}$, то точно так же получается равенство $\beta G^{\varphi}\beta^{-1} = G^{\varphi}$. □

Следствие 1.1.6. *Нормализаторы полугруппы изотропии S^{φ} и группы изотропии G^{φ} в группе* $\mathrm{Aut}B$ *содержат аллотропную группу $G^{(\varphi)}$.*

Как будет показано в следующем параграфе, для определенного класса морфизмов верно и обратное включение.

В следующих пунктах исследуем поведение полугрупп и групп, ассоциированных с морфизмами $A\varphi B$, $B\psi C$, $A\chi C$ в том случае, когда χ является композицией φ и ψ.

Предложение 1.1.7. *Если $\chi = \varphi\psi$ и ψ – изоморфизм, то*

$$S^{(\chi)} = \psi^{-1}S^{(\varphi)}\psi, \ \ S^{\chi} = \psi^{-1}S^{\varphi}\psi, \ \ G^{(\chi)} = \psi^{-1}G^{(\varphi)}\psi, \ \ G^{\chi} = \psi^{-1}G^{\varphi}\psi.$$

Доказательство. Пусть $\beta \in \mathrm{End}B$ и $\gamma = \beta\psi_{\mathcal{E}} = \psi^{-1}\beta\psi \in \mathrm{End}\, C$. Тогда, как нетрудно проверить, $\gamma \in G^{(\chi)}$, если и только если $\beta \in G^{(\varphi)}$. Это означает, что $G^{(\chi)} = \psi^{-1}G^{(\varphi)}\psi$. Аналогично доказываются остальные три равенства. □

Предложение 1.1.8. *Если $\chi = \varphi\psi$, то выполняются следующие свойства.*

(а) Соответствия $\mathcal{E}(\chi)$ и $\mathcal{A}(\chi)$ содержат соответственно произведения соответствий $\mathcal{E}(\varphi) \cdot \mathcal{E}(\psi)$ в качестве подполугруппы и $\mathcal{A}(\varphi) \cdot \mathcal{A}(\psi)$ – в качестве подгруппы.

(б) Изотропная полугруппа S^{ψ} является подполугруппой изотропной полугруппы S^{χ}, а изотропная группа G^{ψ} – подгруппой изотропной группы G^{χ}.

(в) Правые образы $(S_{(\varphi)} \cap S_{(\chi)})\, \varphi_{\mathcal{E}}$ и $(S_{(\varphi)} \cap S_{(\chi)})\, \varphi_{\mathcal{E}}$ являются подполугруппами полугрупп $S^{(\psi)} \cap S^{(\chi)}$ и $S^{(\psi)} \cap S^{\chi}$ соответственно. Аналогично

$$(G_{(\psi)} \cap G^{(\varphi)})\, \psi_{\mathcal{E}} \leq G^{(\psi)} \cap G^{(\chi)}, \quad (G_{(\psi)} \cap G^{\varphi})\, \psi_{\mathcal{E}} \leq G^{(\psi)} \cap G^{\chi}.$$

(г) Правые образы $(S_{(\varphi)} \cap S^{(\chi)})\, \varphi_{\mathcal{E}}$ и $(S_{(\varphi)} \cap S^{\chi})\, \varphi_{\mathcal{E}}$ содержат подполугруппы $(S^{(\varphi)} \cap S_{\psi}$ и $S^{(\varphi)} \cap S_{\psi}$ соответственно. Аналогично

$$(G_{(\varphi)} \cap G_{(\chi)})\, \varphi_{\mathcal{A}} \geq G^{(\varphi)} \cap G_{(\psi)}, \quad (G_{(\varphi)} \cap G_{\chi})\, \varphi_{\mathcal{A}} \geq G^{(\varphi)} \cap G_{\psi}.$$

(д) Если ψ – мономорфизм, то $S_{\chi} = S_{\varphi}$, $G_{\chi} = G_{\varphi}$

$$S_{(\psi)} \cap S^{\varphi} = (S^{(\psi)} \cap S^{\chi})\, \psi^{\mathcal{E}}, \quad G_{(\psi)} \cap G^{\varphi} = (G^{(\psi)} \cap G^{\chi})\, \psi^{\mathcal{A}},$$
$$(S_{(\psi)} \cap S^{\varphi})\, \psi_{\mathcal{E}} = S^{(\psi)} \cap S^{\chi}, \quad (G_{(\psi)} \cap G^{\varphi})\, \psi_{\mathcal{E}} = G^{(\psi)} \cap G^{\chi}.$$

Прежде, чем перейти к доказательству, сделаем два замечания. Только утверждение п. (а) из вышеприведенных является самодвойственным. При переходе к двойственным утверждениям включения не меняются на противоположные.

Доказательство. Проведем детальное доказательство только для п. (а). Прежде всего, произведение соответствий для φ и ψ лежит в одноименном соответствии для χ, потому что из равенств $\alpha\varphi = \varphi\beta$ и $\beta\psi = \psi\gamma$ следует $\alpha\chi = \chi\gamma$. Проверим замкнутость относительно покомпонентной композиции произведения одноименных соответствий для φ и ψ. Пары (α, γ) и (α', γ') принадлежат произведению соответствий для φ и ψ тогда и только тогда, когда для некоторых β и β' выполняются равенства $\alpha\varphi = \varphi\beta$, $\beta\psi = \psi\gamma$ и $\alpha'\varphi = \varphi\beta'$, $\beta'\psi = \psi\gamma'$. Но тогда $(\alpha\alpha')\varphi = \varphi(\beta\beta')$ и $(\beta\beta')\psi = \psi(\gamma\gamma')$, т.е.,

$(\alpha\alpha', \gamma\gamma')$ также принадлежит произведению рассматриваемых соответствий. Наконец, если $(\alpha, \gamma) \in \mathcal{A}(\varphi) \cdot \mathcal{A}(\psi)$, то $\alpha\varphi = \varphi\beta$ и $\beta\psi = \psi\gamma$ при некотором $\beta \in \mathrm{Aut}B$. Поэтому $\alpha^{-1}\varphi = \varphi\beta^{-1}$, $\beta^{-1}\psi = \psi\gamma^{-1}$, следовательно, $(\alpha^{-1}, \gamma^{-1}) \in \mathcal{A}(\varphi) \cdot \mathcal{A}(\psi)$.

(б) Достаточно заметить, что $\psi\gamma = \psi$ влечет $\chi\gamma = \chi$.

(в,г) Если $\alpha\varphi = \varphi\beta$ and $\beta\psi = \psi\gamma$, то $\alpha\chi = \chi\gamma$. Из этого факта следуют первое и третье соотношения п.п. (в,г). Подставив в приведенной импликации $\alpha = 1$, можно получить доказательства второго и четвертого соотношений п. (в), а подстановкой $\gamma = 1$ – доказательство второго и четвертого соотношений п. (г).

(д) Если $\alpha\varphi\psi = \alpha\chi = \chi = \varphi\psi$, то, сокращая на мономорфизм ψ, получаем $\alpha\varphi = \varphi$. Поэтому справедливы включения, обратные к включениям п. (б)*, что доказывает первые два равенства п. (д).

Из равенств $\beta\psi = \psi\gamma$ и $\chi\gamma = \chi$ следует равенство $\varphi\beta\psi = \varphi\psi\gamma = \varphi\psi$ и после сокращения на мономорфизм ψ получаем $\varphi\beta = \varphi$. Поэтому справедливы включения, обратные ко второму и четвертому включениям п. (г), что доказывает вторую пару равенств п. (д). Третья пара равенств получается из второй, если учесть, что при мономорфном ψ $\psi^{\mathcal{E}}$ является гомоморфным отображением, а $\psi_{\mathcal{E}}$ задает его полный прообраз. □

Предложение 1.1.9. *Если* $\chi = \varphi\psi$, *то* $G^{(\psi)} \cap G^{\chi}$ *является подгруппой нормализатора* G^{ψ} *в* G^{χ}.

Доказательство. Если $\gamma \in G^{(\psi)} \cap G^{\chi}$, то $\gamma \in G^{\chi}$ и $\psi\gamma = \beta\psi$ для некоторого автоморфизма β. Используя свойства 1.1.8.(д) и 1.1.7, получаем $G^{\psi} = G^{\beta\psi} = G^{\psi\gamma} = \gamma^{-1}G^{\psi}\gamma$. Это означает, что γ принадлежит нормализатору G^{ψ} в G^{χ}. □

Замечание 1.1.10. Единственным препятствием для справедливости аналога доказанного предложения, получаемого заменой $G^{(\psi)}$ на $S^{(\psi)}$ и G^{ψ} на S^{ψ}, является то обстоятельство, что появляющийся в доказательстве эндоморфизм β, вообще говоря, не эпиморфен, поэтому не действует свойство предложения 1.1.8 (д)*.

Чтобы поправить дело, достаточно $S^{(\psi)}$ заменить правым образом $\hat{E}(B)\psi_{\mathcal{E}}$ полугруппы $\hat{E}(B)$ эпиморфных эндоморфизмов объекта B.

Если $\chi = \varphi\psi$ и φ – изоморфизм, то в силу 1.9(д)* имеем равенство изотропных полугрупп $S^\chi = S^\psi$ и групп $G^\chi = G^\psi$. Поэтому корректно определяются понятия изотропной полугруппы и группы подобъекта с помощью его произвольного представителя.

Двойственно вводятся понятия коизотропной полугруппы и группы факторобъекта.

Определение 1.1.2. Суммой или композитом семейства подобъектов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathbf{I}$ называется их объединение $K\kappa A$ (т.е. точная верхняя грань), обладающая следующим дополнительным свойством: коконус $(K_i\kappa_i K,\ i \in \mathbf{I})$, однозначно определяемый условием $\sigma_i\kappa = \kappa_i$, $i \in \mathbf{I}$, плотный в смысле [70], то есть если для морфизмов $K\varphi_1 B$ и $K\varphi_2 B$ все композиции $\kappa_i\varphi_1$ и $\kappa_i\varphi_2$ совпадают, то $\varphi_1 = \varphi_2$.

Предложение 1.1.11. *Пусть $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathbf{I}$ – произвольное семейство подобъектов, $K_0\kappa_0 A$ содержит все κ_i. Тогда $S^{\kappa_0} \leq \cap_{i\in\mathbf{I}} S^{\kappa_i}$ и $G^{\kappa_0} \leq \cap_{i\in\mathbf{I}} G^{\kappa_i}$. Если κ_0 – композит подобъектов κ_i, $i \in \mathbf{I}$, то справедливы и обратные включения, т.е.*

$$S^{\kappa_0} = \cap_{i\in\mathbf{I}} S^{\kappa_i}, \quad G^{\kappa_0} = \cap_{i\in\mathbf{I}} G^{\kappa_i}.$$

Доказательство. Поскольку $\kappa_i \leq \kappa_0$, то согласно предложению 1.1.8 (б) $G^{\kappa_i} \geq G^{\kappa_0}$, $S^{\kappa_i} \geq S^{\kappa_0}$, следовательно, $\cap_{i\in\mathbf{I}} G^{\kappa_i} \geq G^{\kappa_0}$, $\cap_{i\in\mathbf{I}} S^{\kappa_i} \geq S^{\kappa_0}$. Чтобы доказать обратное включение, заметим, что для любого α из $\cap_{i\in\mathbf{I}} S^{\kappa_i}$ выполняются равенства $\kappa_i\alpha = \kappa_i 1$ при всех $i \in \mathbf{I}$. Поэтому по определению композита $\kappa\alpha = \kappa 1$, то есть $\alpha \in S^\kappa$. $\square$

Замечание 1.1.12. Утверждения доказанного предложения справедливы в более общей ситуации. Для любого семейства морфизмов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathcal{I}$, если морфизм $K\kappa A$ делит это семейство морфизмов, т.е. $\kappa_i = \sigma_i\kappa$ для подходящих $K_i\sigma_i K$ при всех $i \in \mathcal{I}$, верны включения $\cap_{i\in\mathbf{I}} S^{\kappa_i} \geq S^\kappa$, $\cap_{i\in\mathbf{I}} G^{\kappa_i} \geq G^\kappa$ Обратные включения справедливы, если коконус $K_i\sigma_i K$, $i \in \mathbf{I}$ station кoразделяющий (плотный).

Замечание 1.1.13. Для пересечения $K\kappa A$ семейства объектов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathbf{I}$ можно доказать только, что изотропная полугруппа S^κ содержит композит всех изотропных полугрупп S^{κ_i}, а изотропная группа G^κ – композит всех изотропных групп G^{κ_i}, где $i \in \mathbf{I}$.

Более общо, эти включения справедливы для произвольного морфизма $K\kappa A$, кратного семейству морфизмов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathbf{I}$.

Обозначим через $\mathbf{P}(\mathrm{End}A)$ множество всех подполугрупп полугруппы $\mathrm{End}A$, а через $\mathbf{P}(\mathrm{Aut}A)$ – множество всех подгрупп группы $\mathrm{Aut}A$. Они являются ординалами относительно операции включения. Класс $\check{A}$ всех морфизмов в объект является предординалом с отношением делимости морфизмов (которое, очевидно, рефлексивно, транзитивно, но не антисимметрично). Однако класс $\mathbf{P}(A)$ подобъектов объекта A уже является ординалом.

Сопоставление морфизму или подобъекту его изотропных полугруппы и группы определяет отображения

$$\check{A}\, e_0 \mathbf{P}(\mathrm{End}A), \quad \check{A}\, a_0\, \mathbf{P}(\mathrm{Aut}A), \quad \mathbf{P}(A)\, e\, \mathbf{P}(\mathrm{End}A), \quad \mathbf{P}(A)\, a\, \mathbf{P}(\mathrm{Aut}A),$$

которые согласно предложению 1.1.8 (б) антиизотонны.

Если морфизм $K\kappa A$ имеет кообраз $K\kappa_c K_c$, то дополнительный к нему морфизм $K_c\kappa_c' A$ равенством $\kappa_c\kappa_c' = \kappa$ определяется однозначно и согласно предложению 1.1.8 (д)* имеет те же изотропные полугруппу и группу, что и морфизм κ. Сам кообраз морфизма $K\kappa A$ определяется однозначно как факторобъект объекта K. Если дополнительный к кообразу морфизм κ_i' мономорфен, то он задает подобъект объекта A.

Предположим, что все морфизмы $\kappa \in \check{A}$ имеют кообраз и дополнительные к кообразам морфизмы мономорфны (это условие, в частности, выполняется, если все $\kappa \in \check{A}$ разлагаются в композицию кообраза и образа). Тогда сопоставление морфизму κ дополнительного к его кообразу морфизма κ', определяет отображение $\check{A}\, c\, \mathbf{P}(A)$, которое согласно вышесказанному удовлетворяет равенствам $c\, e = e_0$, $c\, a = a_0$.

Распространим понятия изотропных полугруппы и группы на семейства морфизмов (и семейства подобъектов) $\kappa_{\mathcal{I}} = (K_i\kappa_i A,\ i \in \mathbf{I})$, определив изотропную полугруппу $S^{\kappa_{\mathcal{I}}}$ как множество всех эндоморфизмов, а изотропную группу $G^{\kappa_{\mathcal{I}}}$ как множество всех автоморфизмов α объекта A, удовлетворяющих равенствам $\kappa_i\alpha = \kappa_i$ при всех $i \in \mathbf{I}$. Таким образом, по определению изотропные полугруппа и группа семейства морфизмов (или семейства подобъектов) совпадают с пересечением, соответственно, изотропных полугрупп и групп всех морфизмов (или подобъектов) этого семейства.

Соответственно определяются отображения

$$\mathbf{B}(\check{A})\tilde{e}_0\mathbf{P}(\mathrm{End}A),\quad \mathbf{B}(\check{A})\tilde{a}_0\mathbf{P}(\mathrm{Aut}A),\quad \mathbf{B}(\mathbf{P}(A))\tilde{e}\mathbf{P}(\mathrm{End}A),\quad \mathbf{B}(\mathbf{P}(A))\tilde{a}\mathbf{P}(\mathrm{Aut}A).$$

Эти отображения антиизотонны и переводят объединения в пересечения. Кроме того композит образов элементов булианов содержится в образе пересечения этих элементов.

Действительно, антиизотонность отображений сразу следует из определений. Для любых элементов булианов (т.е. семейств) $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ из соотношений $\mathcal{I} \leq \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$, $\mathcal{J} \leq \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ и антиизотонности следует, что $\mathcal{I}\tilde{e} \geq (\mathcal{I} \cup \mathcal{J})\tilde{e}$, $\mathcal{J}\tilde{e} \geq (\mathcal{I} \cup \mathcal{J})\tilde{e}$ и значит $\mathcal{I}\tilde{e} \cap \mathbf{J}\tilde{e} \geq (\mathcal{I} \cap \mathcal{J})\tilde{e}$. Обратно, если $\alpha \in \mathcal{I}\tilde{e} \cap \mathcal{J}\tilde{e}$, то $\kappa\alpha = \kappa$ для любого κ, принадлежащего $\mathcal{I}$ или $\mathcal{J}$, поэтому $\alpha \in (\mathcal{I} \cup \mathcal{J})\tilde{e}$. Наконец, если α принадлежит композиту образов $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$, то $\alpha = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$, причем для каждого α_i выполняются равенства $\kappa\alpha_i = \kappa$ либо для всех $\kappa \in \mathcal{I}$, либо для всех $\kappa \in \mathbf{J}$. Поэтому $\kappa\alpha = \kappa$ для любого $\kappa \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, то есть $\alpha \in (\mathcal{I} \cap \mathcal{J})\tilde{e}$.

Далее, если предположить, что существуют композиты произвольных семейств подобъектов, то, сопоставляя каждому семейству подобъектов композит этого семейства, получим отображение $\mathbf{B}(\mathbf{P}(A))\,\sigma], \mathbf{P}(A)$, которое, как легко проверяется, изотонно и удовлетворяет равенствам $\sigma e = \tilde{e}$, $\sigma a = \tilde{a}$.

Соответствующее отображение определяется и для булиана класса морфизмов в объект A сопоставлением семейству морфизмов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathbf{I}$ дополнительного морфизма к кообразу этого семейства $K_i\sigma_i K$, $i \in \mathbf{I}$, естественно, в предположении, что кообраз всегда определен. Напомним, что кообразом семейства (коконуса) морфизмов $K_i\kappa_i A$, $i \in \mathbf{I}$ называется коразделяющий (плотный) коконус $K_i\sigma_i K$, $i \in \mathbf{I}$, для которого существует дополнительный морфизм $K\kappa A$, удовлетворяющий следующим свойствам:

(i) $\sigma_i\kappa = \kappa_i$ при всех $i \in \mathbf{I}$;

(ii) если для коразделяющего коконуса $K_i\sigma'_i K'$, $i \in \mathbf{I}$ существует дополнительный морфизм $K'\kappa' A$, подчиняющийся равенствам $\sigma'_i\kappa' = \kappa_i$, $i \in \mathbf{I}$, то $\sigma_i = \sigma'_i\sigma'$, $i \in \mathbf{I}$ при некотором морфизме $K'\sigma' K$.

Полученное отображение $\mathbf{B}(\check{A})\sigma_0\check{A}$ также изотонно и удовлетворяет равенствам $\sigma_0 e_0 =$

$\tilde{e}_0$, $\sigma_0 a_0 = \tilde{a}_0$. Полученные результаты соберем в

Предложение 1.1.14. *(а) Сопоставление семейству морфизмов в объект A и семейству его подобъектов полугруппы и группы изотропии определяет антиизотонные отображения*

$$\breve{A}e_0\mathbf{P}(EndA), \quad \mathbf{P}(A)e\mathbf{P}(EndA), \quad \mathbf{B}(\breve{A})\tilde{e}_0\mathbf{P}(EndA), \quad \mathbf{B}(\mathbf{P}(A))\tilde{e}\mathbf{P}(EndA);$$

$$\breve{A}a_0\mathbf{P}(AutA), \quad \mathbf{P}(A)a\mathbf{P}(AutA), \quad \mathbf{B}(\breve{A})\tilde{a}_0\mathbf{P}(AutA), \quad \mathbf{B}(\mathbf{P}(A))\tilde{a}\mathbf{P}(AutA);$$

(б) Отображения $\tilde{e}_0, \tilde{e}, \tilde{a}_0, \tilde{a}$ переводят объединение элементов булианов в пересечение их образов, а образ пересечения этих элементов содержит композит их образов. Если существуют кообразы семейств морфизмов в объект и композиты семейств подобъектов объекта A, то аналогичные утверждения справедливы для отображений e_0, e, a_0, a при соответствующей замене объединения элементов на их кообраз и композит.

в) При условии существования кообразов морфизмов из $\breve{A}$ и мономорфности дополнительного к кообразу морфизма, сопоставляя морфизмам из $\breve{A}$ дополнительный к кообразу морфизм, получаем изотонное отображение $\breve{A}c\mathbf{P}(A)$, удовлетворяющее равенствам $ce = e_0$, $ca = a_0$.

(г) В предположениях п.(б), отображения $\mathbf{B}(\breve{A})\sigma_0 A$ и $\mathbf{B}(\mathbf{P}(A))\sigma\mathbf{P}(A)$ изотонные и удовлетворяют равенствам $\sigma_0 e_0 = \tilde{e}_0$, $\sigma_0 a_0 = \tilde{a}_0$, $\sigma e = \tilde{e}$, $\sigma a = \tilde{a}$.

1.2 Морфизмы, ассоциированные с множествами эндоморфизмов объекта

Если в предыдущем параграфе исследовались полугруппы и группы, связанные с морфизмом, в этом параграфе изучаются морфизмы, стандартно ассоциируемые с подмножествами полугруппы эндоморфизмов объекта.

Определение 1.2.1. Морфизм $K\kappa A$ называется *неподвижным* или *стабильным* относительно эндоморфизма $K\kappa A$ объекта А, если он является неподвижной точкой отображения $\breve{A}\alpha_*\breve{A}$, т.е.

$$\kappa\alpha_* = \kappa \cdot \alpha = \kappa$$

.

Морфизм $K\kappa A$ называется *неподвижным* или *стабильным* относительно множества эндоморфизмов $M \subset \mathrm{End}A$, если он стабилен относительно всех $\alpha \in M$.

Перечислим простейшие свойства стабильности морфизмов:

(а) Если морфизм $K\kappa A$ стабилен относительно множества $M \subset \mathrm{End}A$ и $K'\sigma K$ – произвольный морфизм, то и композиция $K'\sigma\kappa A$ стабильна относительно множества M.

Из этого свойства следует, что корректно определяется стабильность подобъекта объекта A как стабильность произвольного представителя $K\kappa A$ этого подобъекта.

(б) Если $K_i\sigma_i K$, $i \in \mathbf{I}$ – коразделяющий (плотный) коконус морфизмов и все морфизмы $\sigma_i\kappa$ стабильны относительно множества эндоморфизмов M, то и морфизм κ стабилен относительно M. В частности, если композиция эпиморфизма σ и некоторого морфизма κ стабильна относительно множества эндоморфизмов M, то и морфизм κ стабилен относительно M.

Применяя это свойство к подобъектам, получаем, что если семейство подобъектов стабильно относительно некоторого множества эндоморфизмов, то и композит этого семейства стабилен относительно данного множества эндоморфизмов.

(в) Если морфизм (или подобъект) $K\kappa A$ стабилен относительно множества $M \subset \mathrm{End}A$, то он стабилен и относительно его любого подмножества L.

(г) Если морфизм (или подобъект) $K\kappa A$ стабилен относительно эндоморфизмов $\alpha, \alpha' \in \mathrm{End}A$, то стабилен и относительно их композиции. Если $K\kappa A$ стабилен относительно автоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aut}A$, то стабилен и относительно обратного автоморфизма α^{-1}.

Как следствие, если $K\kappa A$ стабилен относительно множества эндоморфизмов или автоморфизмов M объекта A, то он стабилен относительно полугруппы и, соответственно, группы, порожденной множеством M.

(д) Каждый морфизм (и подобъект) стабилен относительно своей полугруппы изотропии. Более того, если морфизм (или подобъект) $K\kappa A$ стабилен относительно множества эндоморфизмов M, то M лежит в полугруппе изотропии S^{κ}. Если все эндоморфизмы из M обратимы (т.е. являются автоморфизмами), то M лежит в группе изотропии G^{κ}.

Следовательно, для любого морфизма (и подобъекта) максимальным множеством эндоморфизмов, относительно которых он стабилен, является его изотропная полугруппа, а максимальным множеством автоморфизмов, относительно которых он стабилен – его изотропная группа.

(е) Обозначим через $\check{A}_M$ и $\mathcal{P}_M(A)$, соответственно, классы всех морфизмов в объект A и всех подобъектов этого объекта, стабильных относительно множества эндоморфизмов M. Согласно свойствам (а) и (б) класс $\check{A}_M$ замкнут относительно левых композиций и сокращений на эпиморфизмы, а класс $\mathcal{P}_M(A)$ вместе с каждым подобъектом содержит все лежащие в нем подобъекты и вместе с каждым семейством подобъектов – композит этого семейства.

Определение 1.2.2. Принадлежащий классу $\check{A}_M$ мономорфный правый наибольший общий делитель этого класса называется *стабилизацией* объекта A по множеству эндоморфизмов M. Таким образом, мономорфизм $K\kappa A$ называется стабилизацией объекта А по множеству эндоморфизмов M этого объекта, если

(i) $\kappa\alpha = \kappa$ для любого $\alpha \in M$;

(ii) для каждого морфизма $K'\kappa' A$, удовлетворяющего равенствам $\kappa'\alpha = \kappa'$ при всех $\alpha \in M$, существует морфизм $K'\sigma K$ такой, что$\kappa' = \sigma\kappa$.

Заметим, что в силу мономорфности κ морфизм σ вышеприведенным равенством определяется однозначно; более того, условие мономорфности κ эквивалентно условию единственности σ.

Нетрудно проверить, что любой левый эпиморфный делитель стабилизации объекта по произвольному множеству $M \subset \mathrm{End}A$ является изоморфизмом. Морфизмы, удовлетворяющие такому свойству мы называем *копростыми.*

Стабилизация любого объекта по произвольному подмножеству его полугруппы эндоморфизмов в случае существования определяется с точностью до умножения слева на изоморфизмы, т.е. по существу является подобъектом рассматриваемого объекта, определенным однозначно. Точнее, он является наибольшим подобъектом класса $\mathbf{P}_M(A)$.

Предложение 1.2.1. *Мономорфизм $K\kappa A$ является стабилизацией объекта A по некоторому множеству эндоморфизмов $M \subset EndA$ тогда и только тогда, когда отображение $\check{K}\kappa_*\check{A}$, $v\kappa_* = v \cdot \kappa$ инъективно и имеет образом $\check{A}_M$, т.е. определяет биекцию между $\check{K}$ и $\check{A}_M$.*

Доказательство. Прежде всего, инъективность отображения κ_* эквивалентна мономорфности морфизма κ.

Предположим, что κ_* отображает $\check{K}$ на $\check{A}_M$. Тогда $1_K\kappa_* = \kappa \in \check{A}_M$. Кроме того, для произвольного M-стабильного морфизма $v \in \check{A}$ существует морфизм $u \in \check{K}$ такой, что $v = u\kappa_* = u\kappa$. Следовательно, κ стабилизация A по M.

Обратно, предположим, что κ – стабилизация A по M. Для произвольного морфизма $u \in \check{K}$ и любого эндоморфизма $\alpha \in M$ имеем $(u\kappa_*)\alpha = u\kappa\alpha = u\kappa_*$, так что $u\kappa_* \in \check{A}_M$. □

В силу свойства (г) стабильности морфизмов, если $K\kappa A$ является стабилизацией A по множеству эндоморфизмов $M \subset \mathrm{End}A$, то является также стабилизацией по полугруппе эндоморфизмов, порожденной множеством M, или даже по подгруппе автоморфизмов, порожденной множеством M, в том случае, когда все эндоморфизмы из M обратимы. Поэтому резонно рассматривать стабилизации только по подполугруппам (в частности, подгруппам) полугруппы эндоморфизмов данного объекта.

Обозначим через $\mathbf{P}_s(\mathrm{End}A)$ множество всех подполугрупп G полугруппы $\mathrm{End}A$, по которым стабилизация объекта A существует, через $\mathbf{P}_{\tilde{s}}(\mathrm{End}A)$ и $\mathbf{P}_{\tilde{s}_0}(\mathrm{End}A)$ – множества всех подполугрупп G полугруппы $\mathrm{End}A$, для которых соответственно классы $\mathbf{P}_G(A)$ и $\check{A}_G$ не пустые. Очевидно $\mathbf{P}_s(\mathrm{End}A) \subset \mathbf{P}_{\tilde{s}}(\mathrm{End}A) \subset \mathbf{P}_{\tilde{s}_0}(\mathrm{End}A)$.

Предложение 1.2.2. *С помощью сопоставления подходящим подполугруппам полугруппы $EndA$ стабилизаций по ним, а также множеств всех стабильных относительно них* *подобъектов объекта A и морфизмов в объект A определяются антиизотонные отображения*

$$\mathbf{P}_s(EndA)s\mathbf{P}(A), \quad \mathbf{P}_{\tilde{s}}(EndA)\tilde{s}\mathbf{B}(\mathbf{P}(A)), \quad \mathbf{P}_{\tilde{s}_0}(EndA)\tilde{s}_0\mathbf{B}(\check{A}),$$

связанные равенствами $\tilde{s}\sigma = s$ и $\tilde{s}_0 c = \tilde{s}$ при условии существования отображений σ и c (см. предложение 1.1.14(в),(г)).

Доказательство. Приведем доказательство только для первого равенства. Если $G \in \mathbf{P}_{\tilde{s}}(\mathrm{End}A)$, то $G\tilde{s} = \mathbf{P}_G(A)$, а $\mathbf{P}_G(A)\sigma$ – композит всех подобъектов из $\mathbf{P}_G(A)$, являющийся согласно свойству (б) стабильности морфизмов наибольшим подобъектом класса $\mathbf{P}_G(A)$, т.е. стабилизацией A по G. □

Следствие 1.2.3. *Для существования стабилизации объекта A по подполугруппе (на самом деле то же верно для произвольного подмножества) G полугруппы $EndA$ достаточно, чтобы $\mathbf{P}_G(A)$ было непусто и существовала сумма всех подобъектов объекта A, принадлежащих $\mathbf{P}_G(A)$.*

Предложение 1.2.4. *Пусть $K\kappa A$ стабилизация по множеству $M \subset EndA$. Наибольшим множеством эндоморфизмов, стабилизация по которому представляется морфизмом κ, будет изотропная полугруппа S^{κ}. Морфизм κ является стабилизацией по любому множеству эндоморфизмов L, удовлетворяющему соотношениям $M \subset L \subset S^{\kappa}$. Если $M \subset AutA$, аналогичные утверждения с заменой полугруппы изотропии S^{κ} на группу изотропии G^{κ} верны для множеств автоморфизмов, по которым k является стабилизацией.*

Доказательство. Если морфизм κ является стабилизацией по некоторому множеству эндоморфизмов L, то L состоит из изотропных эндоморфизмов морфизма κ, а S^{κ} по определению есть множество всех изотропных эндоморфизмов морфизма κ. Поэтому $L \subset S^{\kappa}$.

Далее, из включения $L \subset S^{\kappa}$ следует, что S^{κ}-стабильный морфизм κ тем более будет L-стабильным. С другой стороны, из включения $M \subset L$ вытекает, что всякий L-стабильный морфизм κ' будучи и M-стабильным, будет делиться на M-стабилизацию κ. Значит κ является L-стабилизацией. □

Таким образом, вообще говоря, множество эндоморфизмов, по которому данный морфизм является стабилизацией, определяется неоднозначно.

Определение 1.2.3. Морфизм $K\kappa A$ называется *совершенной* стабилизацией, если является стабилизацией по единственной полугруппе эндоморфизмов $S \subset \mathrm{End}A$, замкнутой относительно обращения элементов.

Следствие 1.2.5. *Если $K\kappa A$ – совершенная стабилизация по полугруппе эндоморфизмов S, то S совпадает с полугруппой изотропии S^κ. Если к тому же $S \subset AutA$, то $S = G^\kappa = S^\kappa$.*

Предложение 1.2.6. *(а) Если морфизм $K\kappa A$ стабилен по действию множества $M \subset EndA$ и α – произвольный автоморфизм объекта A, то морфизм $K\kappa\alpha A$ стабилен относительно действия сопряженного множества эндоморфизмов $\alpha^{-1}M\alpha$.*

(б) Если $K\kappa A$ – стабилизация по множеству $M \subset EndA$, то при произвольном автоморфизме α объекта A композиция $K\kappa\alpha A$ будет стабилизацией по сопряженному множеству $\alpha^{-1}M\alpha$.

(в) Если морфизм $K\kappa A$ стабилен по подмножеству $M \subset EndA$ и α – элемент нормализатора M в $EndA$, то и композиция $\kappa\alpha$ стабильна по M.

(г) Если $K\kappa A$ – стабилизация по $M \subset EndA$, то для любого элемента α нормализатора M в $EndA$ найдется эндоморфизм β такой, что $\kappa\alpha = \beta\kappa$. Таким образом, нормализатор M в $EndA$ содержится в аллотропной полугруппе $S^{(\kappa)}$.

(д) Если $K\kappa A$ – стабилизация по подмножеству M группы автоморфизмов объекта A, то нормализатор M в $AutA$ лежит в аллотропной группе $G^{(\kappa)}$ морфизма κ.

Доказательство. (в) По определению, принадлежность α нормализатору множества M в $\mathrm{End}A$ означает, что $\alpha \in \mathrm{End}A$ и $\alpha M = M\alpha$. Поэтому для любого $a \in M$ найдется $a' \in M$ такой, что $\alpha a = a'\alpha$. Но тогда $\kappa\alpha a = \kappa a'\alpha = \kappa\alpha$. Заметим, что (в) следует из (а) только в случае обратимости α.

(г) следует из (в) и определения стабилизации κ.

(д) Если α принадлежит нормализатору M в $\mathrm{Aut}A$, то и α^{-1} принадлежит, поэтому согласно (г) найдутся эндоморфизмы β и β', удовлетворяющие равенствам $\kappa\alpha = \beta\kappa$ и $\kappa\alpha^{-1} = \beta'\kappa$. Тогда $\beta\beta'\kappa = \beta'\beta\kappa = \kappa$ и в силу мономорфности κ имеем $\beta' = \beta^{-1}$. □

Соберем воедино результаты следствия к предложению 1.1.5 и предложения 1.2.6 (г, д).

Теорема 1.2.7. *Если морфизм $K\kappa A$ является стабилизацией, то*

(i) нормализатор его изотропной полугруппы S^{κ} в группе $\mathrm{Aut}A$ содержит аллотропную группу $G^{(\kappa)}$ и содержится в аллотропной полугруппе $S^{(\kappa)}$ морфизма κ;

(ii) нормализатор изотропной группы G^{κ} морфизма κ в $\mathrm{Aut}A$ совпадает с аллотропной группой $G^{(\kappa)}$ этого морфизма.

Вернемся к сюжету, затронутому в первом параграфе и касающемуся морфизмов $A\varphi B$, $B\psi C$, $A\chi C$, связанных равенством $\chi = \varphi\psi$.

Предложение 1.2.8. *Пусть ψ – стабилизация по множеству эндоморфизмов M, $\sigma\psi^e S_{(\psi)}$ и $G^{(\psi)}\psi^a G_{(\psi)}$ индуцированные гомоморфизмы перестановочных относительно морфизма ψ полугрупп и групп. Тогда*

(a) $\left(S^{\varphi} \cap S_{(\psi)}\right)(\psi^e)^{-1} = \sigma \cap S^{\chi}$ содержит нормализатор M в S^{χ};

(b) $\left(G^{\varphi} \cap G_{(\psi)}\right)(\psi^a)^{-1} = G^{(\psi)} \cap G^{\chi}$ содержит нормализатор M в G^{χ} и совпадает с нормализатором G^{ψ} в G^{χ}, если $M \subset \mathrm{Aut}C$.

Доказательство. Согласно предложению 1.1.8 (д) $\left(S^{\varphi} \cap S_{(\psi)}\right)(\psi^e)^{-1} = \left(S^{\varphi} \cap S_{(\psi)}\right)\psi_e = \sigma \cap S^{\chi}$ и аналогичные равенства верны для соответствующих групп автоморфизмов и их отображений. В силу 1.2.6 (г,д) $S^{\chi} \cap \sigma$ содержит пересечение S^{χ} с нормализатором M в $\mathrm{End}C$, т.е. нормализатор M в S^{χ} (отметим, что утверждение (а), в частности, верно при $M = S^{\psi}$), и аналогичные соображения верны для групп в случае, когда $M \subset \mathrm{Aut}C$. При этом согласно предложению 1.1.9 справедливо также обратное включение, что доказывает последнее утверждение п. (б). □

Предложение 1.2.9. *Если $\chi = \varphi\psi$ и (β, γ) – пара перестановочных с ψ ассоциированных эндоморфизмов, то из стабильности φ относительно β следует стабильность χ относительно γ. Обратная импликация верна при условии мономорфности ψ.*

Доказательство. При условии $\varphi\beta = \varphi$ имеем $\chi\gamma = \varphi\psi\gamma = \varphi\beta\psi = \varphi\psi = \chi$. Обратно, если $\chi\gamma = \chi$, то $\varphi\beta\psi = \varphi\psi\gamma = \varphi\psi$, и после сокращения на мономорфизм ψ получаем $\varphi\beta = \varphi$. □

Предложение 1.2.10. *(а) Пусть $\chi = \varphi\psi$ – стабилизация по множеству эндоморфизмов M, а ψ – произвольный мономорфизм. Рассмотрим гомоморфизмы полугрупп $\sigma\psi^e S_{(\psi)}$ и групп $G^{(\psi)}\psi^a G_{(\psi)}$. Если M – подмножество σ или $G^{(\psi)}M$, то φ – стабилизация по $M\psi^e$ и, соответственно, $M\psi^a$.*

(б) Пусть $\chi = s_M$, $\psi = s_L$ – стабилизации по множествам эндоморфизмов $L \subset M \subset EndC$. Тогда существует единственный мономорфизм $\varphi = s_M^L$ такой, что $\chi = \varphi\psi$. Если M лежит в нормализаторе L в $EndC$, в частности, если L инвариантно относительно сопряжений злементами , то $\varphi = s_K$ – стабилизация по множеству $K = M\psi^e$.

(в) Если $\chi = s_M$ и $\psi = s_L$ являются стабилизациями по подгруппам группы автоморфизмов объекта C: $L < M < AutC$, и L – нормальный делитель M, то $\varphi = s_M^L = s_K$ – стабилизация по группе автоморфизмов $K = M\psi^a$, которая изоморфна факторгруппе $M \big/ M \cap G^\psi$, сводящейся к $= M / L$ при $L = G^\psi$.

Доказательство. (а) Стабильность φ относительно K следует из предложения 1.2.9 в силу мономорфности стабилизации ψ.

Предположим, что φ' – стабильный относительно множества K морфизм. Тогда согласно тому же предложению композиция $\chi' = \varphi'\psi$ будет стабильна относительно M. Следовательно, по определению стабилизации χ по M для некоторого морфизма σ имеем $\chi' = \sigma\chi$. Подставив в последнее равенство соответствующие значения для χ и χ' и сократив на мономорфизм ψ, получим $\varphi' = \sigma\varphi$.

(б) Существование морфизма φ, удовлетворяющего нужному равенству, следует из определения L-стабилизации ψ и стабильности χ относительно $L \subset M$. Если M лежит в нормализаторе L в End$C$ (в частности, при L, инвариантном относительно сопряжений элементами множества M, когда $M \subset \mathrm{Aut}C$), поскольку согласно предложению 1.2.6 (г) M лежит в аллотропной полугруппе σ морфизма ψ, выполняются предпосылки утверждения п. (а), следовательно, верно его заключение.

(в) Если L нормальный делитель M, то M содержится в нормализаторе L в Aut$C$ и применимо утверждение п. (б), согласно которому φ является стабилизацией по образу K гомоморфизма групп $M\psi^a G_{(\psi)}$ с ядром $M \cap G^\psi$. □

Предложение 1.2.11. *Пусть $B\psi C$ стабилизация по множеству $L \subset EndC$, $A\varphi B$ стабилизация по множеству $K \subset S_{(\psi)}$. Тогда их композиция $\chi = \varphi\psi$ – стабилизация по множеству*

(а) $M = K' \cup L$ при любом $K' \subset EndC$ таком, что $K'\psi^e = K$, в частности, при $K' = K\psi_e = K(\psi^e)^{-1}$;

(б) $M = K\psi_e = K(\psi^e)^{-1}$, если K содержит единицу 1_B;

(в) $M = K\psi_a = K(\psi^a)^{-1}$, если $L \subset AutC$, $K \subset AutB$ и $1_B \in K$.

Доказательство. Прежде всего, стабильность χ относительно M немедленно следует из предложения 1.2.9. Далее предположим, что χ' стабильно относительно M. Так как в каждом из случаев (а-в) $L \subset M$ морфизм χ' стабилен по L и по определению L-стабилизации ψ существует морфизм φ' такой, что $\chi' = \varphi'\psi$. Опять на основании предложения 1.2.9 морфизм φ' стабилен относительно K. Поскольку φ – K-стабилизация, имеем $\varphi' = \sigma\varphi$ при некотором морфизме σ. Итого $\chi' = \sigma\chi$. □

Следствие 1.2.12. *Если ψ – стабилизация по множеству автоморфизмов, а φ – стабилизация по группе K автоморфизмов, перестановочных с морфизмом ψ, так что $K \subset G_{(\psi)}$, то их композиция $\chi = \varphi\psi$ является стабилизацией по нормализатору группы изотропии G^ψ в группе изотропии G^χ.*

Доказательство. Используя предложения 1.2.4, 1.1.2 (а), 1.1.8 (в), 1.2.8 (б), получаем цепь включений

$$K\psi_a \subset G^\varphi\psi_a \subset G^\chi \cap G^{(\psi)} = N \subset G^\chi.$$

В силу п. (в) вышедоказанного предложения χ является стабилизацией по множеству $K\psi_a$, следовательно, по любому множеству, содержащему это множество и лежащему в G^χ, в том числе, по N. Если стабилизация χ – совершенная, то $N = G^\chi$, а это в точности означает, что G^ψ является нормальным делителем G^χ. $\square$

Основываясь на предложении 1.2.10 (в) и выше полученном следствии, сформулируем теорему, являющуюся категорным аналогом утверждения (в) основной теоремы классической теории Галуа.

Теорема 1.2.13. *Пусть $\chi = \varphi\psi$ – совершенная стабилизация с группой изотропии G, а ψ – стабилизация с группой изотропии H. Тогда H является подгруппой группы G, причем φ является стабилизацией по $G\psi^a \cong G/H$ в том случае, когда H – нормальный делитель группы G. Обратно, если φ – стабилизация по множеству автоморфизмов, перестановочных с ψ, то H – нормальный делитель G.*

Предложение 1.2.14. *Пусть $K_i\kappa_iA$ – стабилизации по подмножествам эндоморфизмов $M_i \subset EndA$, $i \in \mathbf{I}$ соответственно, а M, M' – подмножества полугруппы $EndA$, образованные соответственно из всевозможных произведений элементов подмножеств M_i и всевозможных произведений элементов M_i и обратных им элементов. Тогда если существует коамальгама $K\sigma_iK_i$, $i \in \mathbf{I}$ семейства морфизмов $K_i\sigma_iA$, $i \in \mathbf{I}$, то сквозной морфизм $\kappa = \sigma_i\kappa_i$ является стабилизацией как по M, так и по M'. Обратно, если $K\kappa A$ – стабилизация по множеству M или M', то из включений $M_i \subset M, M'$ следует, что существует семейство морфизмов $K\sigma_iK_i$, $i \in \mathbf{I}$, каждое из которых однозначно определяется равенством $\sigma_i\kappa_i = \kappa$, причем это семейство задает коамальгаму семейства морфизмов $K_i\kappa_iA$, $i \in \mathbf{I}$.*

Доказательство. Если $K\sigma_iK_i$ – коамальгама семейства $K_i\kappa_iA$, $i \in \mathbf{I}$, то сквозной морфизм $\kappa = \sigma_i\kappa_i$ не зависит от выбора $i \in \mathbf{I}$ и для любого эндоморфизма $\alpha = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}...\alpha_r^{m_r}$, где каждый эндоморфизм α_j принадлежит некоторому M_i, а $m_j = \pm 1$, без труда проверяется, что $\kappa\alpha = \kappa$. Поэтому κ стабилен относительно M и M'. Кроме того, произвольный стабильный относительно M или M' морфизм $K'\kappa'A$ стабилен относительно всех M_i.

поэтому $\kappa' = \sigma'_i\kappa_i$ для подходящих морфизмов $K'\sigma'_iK_i$. По определению коамальгамы существует морфизм $K'\sigma'K$ такой, что $\sigma'\sigma_i = \sigma'_i$ при всех $i \in \mathbf{I}$. Умножив обе части последнего равенства на κ_i, получаем $\sigma'\kappa = \kappa'$.

Обратно, проверим, что семейство $K\sigma_iK_i$, $i \in \mathbf{I}$ задает коамальгаму семейства $K_i\kappa_iA$, $i \in \mathbf{I}$. Равенства $\kappa = \sigma_i\kappa_i$ выполняются по определению. Предположим, что аналогичные равенства $\kappa' = \sigma'_i\kappa_i$ выполняются для семейства морфизмов $K'\sigma'_iK_i$, $i \in \mathbf{I}$. Тогда сквозной морфизм κ' неподвижен относительно M и M', поэтому существует морфизм $K'\sigma'K$, удовлетворяющий равенству $\sigma'\kappa = \kappa'$. Тогда $\sigma'\sigma_i\kappa_i = \sigma'_i\kappa_i$, и, разделив на мономорфизм κ_i, получим $\sigma'\sigma_i = \sigma'_i$ при всех $i \in \mathbf{I}$. □

Следствие 1.2.15. *Пусть N – наименьший нормальный делитель группы $AutA$, содержащий ее подгруппу G. В категории с коамальгамами, если существует стабилизация по G, то существует и стабилизация по N.*

Доказательство. Для доказательства достаточно применить полученное предложение к семейству морфизмов $K\kappa\alpha A$, $\alpha \in \mathrm{Aut}A$, каждый из которых является согласно предложению 1.2.6 (б) стабилизацией по группе $G^\alpha = \alpha^{-1}G\alpha$. При этом надо иметь в виду, что N порождается всеми указанными группами. Отметим, что здесь достаточно, чтобы существовала коамальгама семейства морфизмов $K\kappa\alpha A$, $\alpha \in \mathrm{Aut}A$. □

Следствие 1.2.16. *В категории, каждый морфизм которой разлагается в композицию кообраза и образа, в предпосылках предложения 1.2.14 пересечение семейства подобъектов $K_i\kappa_iA$, $i \in \mathbf{I}$ и стабилизации по множествам M и/или M' существуют одновременно и совпадают.*

На самом деле здесь достаточно, чтобы в композицию кообраза и образа разлагался любой морфизм, стабильный относительно M или M'.

Предложение 1.2.17. *Пусть $K_0\sigma_iK_i$, $i \in \mathbf{I}$ – произвольное семейство морфизмов, $K_i\kappa_iA$, $i \in \mathbf{I}$ – амальгама этого семейства, $\kappa_0 = \sigma_i\kappa_i$ - сквозной морфизм, S^{κ_i} – изотропные полугруппы морфизмов κ_i, $i \in \mathbf{I} \cup \{0\}$. Пересечение $\cap_{i\in\mathbf{I}}S^{\kappa_i}$ изотропных полугрупп*

$S^{\kappa_i} \subset S^{\kappa_0}$ *тривиально при условии существования стабилизации объекта* A *по любому элементу* $\alpha \in \cap_{i\in\mathbf{I}} S^{\kappa_i}$.

Доказательство. Пусть $T\tau A$ стабилизация по элементу $\alpha \in \cap_{i\in\mathbf{I}} S^{\kappa_i}$. Тогда все морфизмы κ_i стабильны относительно α и при подходящем выборе морфизма $K_i\rho_i T$ имеем $\kappa_i = \rho_i\tau$. Подставляя эти значения κ_i и κ_0 в равенство $\kappa_0 = \sigma_i\kappa_i$ и сокращая на мономорфизм τ, получаем равенство $\rho_0 = \sigma_i\rho_i$ при произвольном $i \in \mathbf{I}$. По определению амальгамы существует морфизм $A\tau' T$ такой, что $\kappa_i\tau' = \rho_i$ при всех $i \in \mathbf{I}$. Подставляя значение ρ_i в равенство $\kappa_i = \rho_i\tau$ получаем $\kappa_i = \kappa_i\tau'\tau$ для всех $i \in \mathbf{I}$. Опять по определению амальгамы $\tau'\tau = 1$. Поэтому из равенства $\tau\alpha = \tau$ следует, что $\alpha = 1$. □

1.3 Соответствия Галуа

Напомним одну известную конструкцию (см. [6], [12], [65]).

Пусть $W \subset X \times Y$ произвольное соответствие из класса X в класс Y. Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ можно определить подклассы:

$xW_* \subset Y$, состоящий из всех элементов $y \in Y$ таких, что $(x, y) \in W$;

$yW^* \subset X$, образованный всеми элементами $x \in X$, удовлетворяющими соотношению $(x, y) \in W$.

Обозначив через $\mathbf{B}(X)$ и $\mathbf{B}(Y)$ классы всех подклассов (булианы) классов X и Y соответственно, определим отображения $\mathbf{B}(X)W_*\mathbf{B}(Y)$ и $\mathbf{B}(Y)W^*\mathbf{B}(X)$ равенствами $UW_* = \cap_{x\in U} xW_*$ и $VW^* = \cap_{y\in V} yW^*$.

Эти отображения антиизотонны и их композиции – увеличивающие отображения.

Определение 1.3.1. Пара отображений ординалов $\mathcal{X} w_* \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y} w^* \mathcal{X}$, где

(а) w_* и w^* – антиизотонные отображения;

(б) w_*w^* and w^*w_* – увеличивающие отображения,

называется *соответствием Галуа* и далее обозначается w.

Из определяющих свойств (а) и (б) соответствия Галуа легко выводятся следующие свойства.

(в) Отображения w_* и w^* квазиобратны друг к другу.

(г) Для любых классов элементов $\mathcal{I} \subset \mathcal{X}$ и $\mathcal{J} \subset \mathcal{Y}$ справедливы включения:

$$(\cup_{u\in\mathcal{I}}u)\,w_* = \cap_{u\in\mathcal{I}}uw_*, \qquad (\cap_{u\in\mathcal{I}}u)\,w_* \geq \cup_{u\in\mathcal{I}}uw_*,$$

$$(\cup_{v\in\mathcal{J}}v)\,w^* = \cap_{v\in\mathcal{J}}vw^*, \qquad (\cap_{v\in\mathcal{J}}v)\,w^* \geq \cup_{v\in\mathcal{J}}vw^*,$$

(естественно, при условии существования соответствующих объединений и пересечений).

Определение 1.3.2. Элементы $\bar{u} = uw_*w^*$ и $\bar{v} = vw^*w_*$ называются *замыканиями*, соответственно, элементов $u \in \mathcal{X}$ и $v \in \mathcal{Y}$ относительно соответствия Галуа w.

Используя свойства (а)–(г) соответствия Галуа нетрудно доказать следующие свойства замыкания.

(i) $\bar{u} \geq u, \quad \bar{v} \geq v;$

(ii) $u \geq u' \Longrightarrow \bar{u} \geq \bar{u}', \quad v \geq v' \Longrightarrow \bar{v} \geq \bar{v}';$

(iii) $\bar{\bar{u}} = \bar{u}, \quad \bar{\bar{v}} = \bar{v}.$

Согласно определению оператора замыкания, эти три свойства в совокупности означают, что преобразования ординалов $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, переводящие, соответственно, элементы u и v в их замыкания $\bar{u}$ и $\bar{v}$, являются операторами замыкания.

(iv) $\bar{u} = u \iff u = vw^*, \quad \bar{v} = v \iff v = uw_*.$

(v) Для любого подкласса элементов $\mathcal{I}$ ординала $\mathcal{X}$ справедливы включения

$$\overline{\cap_{u\in\mathcal{I}}u} \leq \cap_{u\in\mathcal{I}}\bar{u}, \quad \overline{\cup_{u\in\mathcal{I}}u} \geq \cup_{u\in\mathcal{I}}\bar{u},$$

если соответствующие объединения и пересечения существуют.

Аналогичные включения верны для произвольного класса элементов $\mathcal{J}$ ординала $\mathcal{Y}$. Эти включения немедленно следуют из свойства изотонности (ii).

В общем случае классы замкнутых элементов

$$\mathcal{X}(w) = \{w \in \mathcal{X} : \quad \bar{u} = u\}, \quad \mathcal{Y}(w) = \{w \in \mathcal{Y} : \quad \bar{v} = v\}$$

не замкнуты относительно объединений. Однако они замкнуты относительно пересечений, т.е. образуют систему замыканий ([12]), ассоциированную с оператором замыкания, получаемым из соответствия Галуа.

Ограничения w_* и w^* на $\mathcal{X}(w)$ и $\mathcal{Y}(w)$ определяют взаимно обратные биекции между этими классами (это следует из свойств (в) и (г) соответствия Галуа.

Уже полученные результаты этого параграфа применим в следующей ситуации. Пусть A объект произвольной категории.

Определим соответствия $r(A)$ из $\check{A}$ в $\hat{A}\times\hat{A}$ и $l(A)$ из $\hat{A}$ в $\check{A}\times\check{A}$ как классы всех троек морфизмов

$$(\varphi,\psi_1,\psi_2)\in\check{A}\times(\hat{A}\times\hat{A}),\quad (\psi,\varphi_1,\varphi_2)\in\hat{A}\times(\check{A}\times\check{A}),$$

удовлетворяющих равенствам

$$\varphi\psi_1=\varphi\psi_2,\quad \varphi_1\psi=\varphi_2\psi$$

соответственно. При этом морфизм φ называется *уравнителем* пары морфизмов (ψ_1,ψ_2), а ψ – *коуравнителем* (φ_1,φ_2).

Согласно общей конструкции пара отображений

$$\mathbf{B}(\check{A})r(A)_*\mathbf{B}(\hat{A}\times\hat{A})\,\text{and}\,\mathbf{B}(\hat{A}\times\hat{A})r(A)^*\mathbf{B}(\check{A})$$

и двойственная ей пара отображений

$$\mathbf{B}(\hat{A})l(A)_*\mathbf{B}(\check{A}\times\check{A})\,\text{and}\,\mathbf{B}(\check{A}\times\check{A})l(A)^*\mathbf{B}(\hat{A})$$

являются соответствиями Галуа. Поэтому к ним применимы полученные выше результаты. В частности, соответствие Галуа $(r(A)_*,r(A)^*)$ индуцирует системы замыканий $\mathbf{B}_0(\check{A})$ на классе $\check{A}$ и $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ на классе $\hat{A}\times\hat{A}$, причем ограничения отображений $r(A)_*$ и $r(A)^*$ определяют взаимно обратные биекции между классами замкнутых подклассов $\mathbf{B}_0(\check{A})$ и $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$. Двойственный результат верен для соответствия Галуа $(l(A)_*,l(A)^*)$.

Приведем некоторые внутренние характеристики классов из $\mathbf{B}_0(\check{A})$ и $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$.

Предложение 1.3.1. *(r1*) Элементы из* $\mathbf{B}_0(\check{A})$ *(= подмножества множества* $\check{A}$*) устойчивы относительно композиций слева, т.е. для любого морфизма* φ *из такого подмножества композиция* $\xi\varphi$ *также принадлежит ему (если* $\xi\varphi$ *определено).*

(r2) Если* $(\varphi_i,\, i \in \mathbf{I})$ *– коразделяющий (= плотный) коконус морфизмов, а* φ *– такой морфизм, что все композиции* $\varphi_i\varphi$ *принадлежат некоторому элементу из* $\mathbf{B}_0(\check{A})$*, то и* φ *принадлежит ему. В частности, элементы из* $\mathbf{B}_0(\check{A})$ *устойчивы относительно сокращения слева на эпиморфизмы.*

(r3) Если морфизм* φ *принадлежит некоторому элементу из* $\mathbf{B}_0(\check{A})$ *и эндоморфизм* $\alpha \in \mathbf{B}_0(\check{A})$ *перестановочен с* φ*, то и композиция* $\varphi\alpha$ *принадлежит тому же элементу.*

(r0$_*$) Элементы класса $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ *являютсл отношениями эквивалентности на классе* $\hat{A}$ *морфизмов из объекта* A*.*

(r1$_*$) Подмножества, представляющие элементы из $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$*, устойчивы относительно умножений справа, точнее, если* (ψ,ψ') *произвольная пара морфизмов, принадлежащая такому элементу (подмножеству), то и пара* $(\psi\eta,\psi'\eta)$ *принадлежит ему при любом морфизме* η*, для которого указанные композиции определены.*

(r2$_*$) Если $(\eta_i,\, i \in \mathbf{I})$ *– разделяющий конус морфизмов и все пары* $(\psi\eta_i,\psi'\eta_i)$ *принадлежат некоторому элементу класса* $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$*, то и пара* (ψ,ψ') *принадлежит этому элементу. В частности, элементы класса* $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ *устойчивы относительно покоординатного сокращения справа на один и тот же мономорфизм.*

(r3$_*$) Если для пары морфизмов (ψ,ψ') *из некоторого элемента класса* $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ *и эндоморфизма* $\alpha \in EndA$ *существует эндоморфизм* β *такой, что* $\alpha\psi = \psi\beta$ *и* $\alpha\psi' = \psi'\beta$*, то пара* $(\alpha\psi,\alpha\psi')$ *принадлежит тому же элементу класса* $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$*, что и* (ψ,ψ')*.*

Доказательство предложения очевидно.

Замечание 1.3.2. Если элементы из $\mathbf{B}_0(\check{A})$ являются подклассами класса $\check{A}$, то элементы из $\mathbf{B}_0(\hat{A}\times\hat{A})$ можно интерпретировать как факторклассы класса $\hat{A}$, исходя из того, что они являются отношениями эквивалентности на $\hat{A}$.

Обрисованная общая картина соответствий Галуа, ассоциированных с объектом категории, упрощается и сводится к рассмотренной в первых двух параграфах ситуации, если ввести некоторые ограничения на исходную категорию или, точнее, на объект A.

Ограничение 1. Морфизмы в объект A разлагаются в композицию кообраза и образа.

Тогда ввиду свойств $(r1^*)$ и $(r2^*)$ классы морфизмов, представляющих элементы из $\mathbf{B}_0(\check{A})$, однозначно определяются подклассами мономорфизмов этих классов, а в силу устойчивости элементов из $\mathbf{B}_0(\check{A})$ относительно умножения слева на изоморфизмы они редуцируются к классу подобъектов объекта A, представленных в рассматриваемом элементе из $\mathbf{B}_0(\check{A})$.

Ограничение 2. Для произвольных семейств подобъектов объекта A существуют суммы (композиты).

При ограничениях 1 и 2 любой замкнутый класс, являющийся элементом $\mathbf{B}_0(\check{A})$, состоит из всех левых кратных мономорфизма, представляющего сумму всех подобъектов, лежащих в рассматриваемом замкнутом классе.

Определение 1.3.3. *Универсальным уравнителем* класса $\mathcal{A} \subset \hat{A} \times \hat{A}$ или *стабилизацией* по этому классу называется мономорфизм $K\kappa A$

1) принадлежащий $\mathcal{A}r(A)^*$, т.е. удовлетворяющий равенствам $\kappa\psi = \kappa\psi'$ при всех $(\psi, \psi') \in \mathcal{A}$;

2) делящий любой морфизм из $\mathcal{A}r(A)^*$, что означает существование для любого морфизма φ, удовлетворяющего равенствам $\varphi\psi = \varphi\psi'$ при всех $(\psi, \psi') \in \mathcal{A}$, такого морфизма ξ, что $\varphi = \xi\kappa$.

Универсальный уравнитель любого класса $\mathcal{A} \subset \hat{A} \times \hat{A}$ в случае существования определяется однозначно как подобъект объекта A. Ограничения 1 и 2 задают достаточные условия его существования (при $\mathcal{A}\nabla(\mathcal{A})^* \neq \emptyset$).

Чтобы сформулировать последнее ограничение, рассмотрим для произвольного подкласса a класса $\check{A}$ его группу изотропии G^a, т.е. совокупность всех автоморфизмов α объекта A, удовлетворяющих равенствам $\varphi\alpha = \varphi$ при всех морфизмах φ класса a. С любой подгруппой G группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}A$ ассоциируется отношение эквивалентности $\mathcal{A}_G \subset \hat{A} \times \hat{A}$, состоящее из всевозможных пар $(\psi, \psi') \in \hat{A} \times \hat{A}$ таких, что $\psi' = \alpha\psi$ при некоторых $\alpha \in G$. Легко проверить, что отношение эквивалентности $ar(A)_*$ содержит $\mathcal{A}_G$ при $G = G^a$.

Определение 1.3.4. Подкласс a класса $\check{A}$ назовем *супернормальным*, если $ar(A)_* = \mathcal{A}_{G^a}$, т.е. если из справедливости равенств $\varphi\psi = \varphi\psi'$ при всех $\varphi \in a$ следует, что $\psi' = \alpha\psi$ при некотором $\alpha \in G^a$'.

Ограничение 3. Все образы $\mathcal{A}r(A)^*$ классов $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\hat{A} \times \hat{A})$ супернормальны.

При ограничении 3 существует биекция между классами, представляющими элементы $\mathbf{B}(\hat{A} \times \hat{A})$, и группами изотропии их универсальных уравнителей.

Теорема 1.3.3. *При ограничениях 1-3 следующие классы биективны.*

(i) Класс $\mathbf{B}_0(\check{A})$ *элементов* $a \in \mathbf{B}(\check{A})$*, замкнутых относительно соответствия Галуа* $(r(A)_*, r(A)^*)$.

(i′) Класс $\mathbf{P}_0(A)$ *всех подобъектов объекта* A*, являющихся универсальными уравнителями подклассов* $\mathcal{A}$ *класса* $\hat{A} \times \hat{A}$.

(ii) Класс $\mathbf{B}(\hat{A} \times \hat{A})$ *элементов* $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\hat{A} \times \hat{A})$*, замкнутых относительно соответствия Галуа* $(r(A)_*, r(A)^*)$.

(ii′) Класс $\mathbf{P}_0(AutA)$ *всех подгрупп группы* $AutA$*, являющихся группами изотропии подклассов* a *класса* $\check{A}$.

Следствие 1.3.4. *Все вышеприведенные классы являются множествами (потому что множеством является* $\mathbf{P}_0(AutA)$*).*

Доказательство. Биективность $\mathbf{B}_0(\check{A})$ и $\mathbf{B}(\hat{A} \times \hat{A})$ получается на основании свойств замыкания. Биекция между $\mathbf{B}_0(\check{A})$ и $\mathbf{P}_0(A)$ устанавливается сопоставлением элементу $a \in \mathbf{B}_0(\check{A})$ стабилизации по отношению эквивалентности $ar(A)_* \in \mathbf{B}(\hat{A} \times \hat{A})$. Надо только проверить инъективность построенного отображения. Действительно, если $a, a' \in \mathbf{B}_0(\check{A})$ и стабилизации по $ar(A)_*$ и $a'r(A)_*$ совпадают, то $ar(A)_*r(A)^* = a'r(A)_*r(A)^*$, а a, a' ввиду замкнутости совпадают со своими замыканиями $ar(A)_*r(A)^*$ и $a'r(A)_*r(A)^*$.

Наконец, сопоставляя элементу $\mathcal{A} \in \mathbf{B}(\hat{\mathcal{A}} \times \hat{\mathcal{A}})$ группу изотропии образа $\mathcal{A}\nabla(\mathcal{A})^*$, получаем в силу ограничения 3 инъективное отображение из $\mathbf{B}(\hat{A} \times \hat{A})$ в $\mathbf{P}_0(\mathrm{Aut}A)$, являющееся биективным по определению $\mathbf{P}_0(\mathrm{Aut}A)$. $\square$

Замечание 1.3.5. При существовании универсальных уравнителей ограничение 3 эквивалентно требованию, чтобы универсальные уравнители классов $\mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}} \times \hat{\mathcal{A}}$ были супернормальными.

Замечание 1.3.6. Нами получена следующая цепочка биекций:

$$\mathbf{P}_0(A) \longleftrightarrow \mathbf{B}_0(\check{A}) \longleftrightarrow \mathbf{B}(\hat{A} \times \hat{A}) \longleftrightarrow \mathbf{P}_0(\mathrm{Aut}A).$$

На самом деле биекцию между $\mathbf{P}_0(A)$ и $\mathbf{P}_0(\mathrm{Aut}A)$ можно установить непосредственно с помощью соответствия Галуа, индуцированного соответствием из $\check{A}$ в $\mathrm{Aut}A$, образованным всеми парами $(\varphi, \alpha) \in \check{A} \times \mathrm{Aut}A$, удовлетворяющими равенству $\varphi\alpha = \varphi$. При этом $\mathbf{P}_0(A)$ и $\mathbf{P}_0(\mathrm{Aut}A)$ возникают как классы замкнутых элементов относительно указанного соответствия Галуа. Это означает, что $\mathbf{P}_0(A)$ совпадает с классом подобъектов объекта A, которые являются стабилизацией по подгруппам группы $\mathrm{Aut}A$, а каждая подгруппа из $\mathbf{P}_0(\mathrm{Aut}A)$ представляет из себя изотропную группу некоторого подобъекта объекта A. Таким образом, биективность $\mathbf{P}_0(A)$ и $\mathbf{P}_0(\mathrm{Aut}A)$ есть непосредственное следствие свойств замыкания.

Замечание 1.3.7. Часто рассматриваются не все подобъекты объекта A, а только те подобъекты, которые содержат некоторый его фиксированный подобъект $K_0\kappa_0 A$. Совокупность всех таких подобъектов обозначим через $\mathbf{P}(A, \kappa_0)$. Введенное выше соответствие Галуа определяет биекцию между множеством $\mathbf{P}_0(A, \kappa_0)$ замкнутых относительно этого соответствия элементов $\mathbf{P}(A, \kappa_0)$ и замкнутыми подгруппами группы изотропии подобъекта G^{κ_0}.

Операция замыкания на множестве подгрупп $\mathbf{P}(G^{\kappa_0})$ группы изотропии G^{κ_0}, возникающая из соответствия Галуа, удовлетворяет следующему свойству.

Предложение 1.3.8. *Если* h *– нормальная подгруппа группы* G^{κ_0}*, то и ее замыкание* $\bar{H}$ *нормально в* G^{κ_0}*.*

Глава 2

Регулярная категорная теория Галуа

Главная цель этой главы, как и предыдущей, изложение теории Галуа в рамках общей теории категорий. По сравнению с первой главой здесь ситуация более приближена к классической. Во-первых, предполагается (если не оговорено противное), что все морфизмы являются мономорфизмами. Для этого достаточно от произвольной категории $\mathcal{C}$ перейти к категории $\mathcal{C}'$, состоящей из всех объектов категории $\mathcal{C}$ и ее мономорфизмов. Во-вторых, изучаются, так называемые, регулярные морфизмы, которые занимают место алгебраических расширений полей классической теории, но не сводятся к ним (предложение 2.2.2). Окончательный результат аналогичен основной теореме классической теории Галуа.

Во второй главе мы придерживаемся всех обозначений и соглашений, которые приняты в первой главе. Двойственные понятия и результаты формулируются в редких случаях, хотя они не менее интересны с точки зрения приложений.

2.1 Множества частных

Множество морфизмов $B\psi C$, в композиции с морфизмом $A\varphi B$ дающим морфизм $A\chi C$, будем называть *множеством левых частных* морфизма χ по морфизму (или относительно морфизма) φ и обозначать $\varphi\backslash\chi$. Двойственно определяется множество правых частных χ/ψ.

В частности, $\chi\backslash\chi$ – изотропная полугруппа, а χ/χ – коизотропная полугруппа морфизма χ. Для любого эпиморфизма φ мощность $|\varphi\backslash\chi|$ множества левых частных не больше единицы, и двойственно $|\chi/\psi| \le 1$ для любого мономорфизма ψ.

Предложение 2.1.1. *Для произвольного морфизма $X\xi A$ верно включение $\varphi\backslash\chi \subset \xi\varphi\backslash\xi\chi$, которое превращается в равенство, если ξ – эпиморфизм.*

Двойственно, $\chi/\psi \subset \chi\xi/\psi\xi$ при любом морфизме $C\xi Z$, а в случае мономорфного ξ имеет место равенство.

Более обще, для произвольного семейства морфизмов $(X_i\xi_i A,\ i \in I)$ верно включение

$$\varphi\backslash\chi \subset \bigcap_{i\in I} \xi_i\varphi\backslash\xi_i\chi,$$

которое превращается в равенство, если семейство плотное (коразделяющее).

Двойственное утверждение верно для всякого семейства морфизмов $(C\xi_j Z_j, j \in J)$.

Предположим, что морфизм $A\varphi B$ имеет кообраз ξ и φ' – дополнительный к кообразу морфизм, так что $\varphi = \xi\varphi'$. Тогда для любого морфизма $A\chi C$ и произвольного $\chi' \in \xi\backslash\chi$ получим равенство $\varphi\backslash\chi = \varphi'\backslash\chi'$, где φ' – копростой морфизм (т.е. такой, все левые эпиморфные делители которого являются изоморфизмами; это простое свойство дополнительного к кообразу морфизма).

Поэтому, если морфизм φ имеет кообраз, то любое множество левых частных $\varphi\backslash\chi$ совпадает с множеством левых частных $\varphi'\backslash\chi'$, где φ' – копростой морфизм (равный дополнительному к кообразу φ морфизму). В частности, если φ разлагается в композицию кообраза и образа, то φ' – мономорфизм. Это свойство в некоторой степени обосновывает целесообразность перехода к рассмотрению категорий, все морфизмы которых являются мономорфизмами, при решении задач, формулируемых с помощью множества левых частных морфизмов.

Предложение 2.1.2. *Для произвольных морфизмов $A\varphi B$, $A\chi C$, AuW и для любых $\psi \in \varphi\backslash\chi$, $w \in \chi\backslash u$ справедливы включения*

$$\psi(\chi\backslash u) \subset \varphi\backslash u, \quad (\varphi\backslash\chi)w \subset \varphi\backslash u.$$

Поэтому

$$(\varphi\backslash\chi)(\chi\backslash u) \subset \varphi\backslash u.$$

Здесь под произведением $\psi(\chi\backslash u)$ подразумевается множество композиций ψw, где w пробегает множество $\chi\backslash u$, а под произведением $(\varphi\backslash\chi)(\chi\backslash u)$ – множество композиций ψw с $\psi \in \varphi\backslash\chi$, $w \in \chi\backslash u$.

Дополнительно к включению $\psi(\chi\backslash u) \subset \varphi\backslash u$ отметим, что отображение $(\chi\backslash u)\psi^*(\varphi\backslash u)$, $w\psi^* = \psi w$ является инъективным при эпиморфном ψ и является сюръективным тогда и только тогда, когда выполняется следующее часто встречающееся в дальнейшем условие:

(0) морфизм ψ, делящий $v \in \varphi\backslash u$ слева, делит все морфизмы из $\varphi\backslash u$.

Аналогично, отображение $(\varphi\backslash\chi)w_*(\varphi\backslash u)$, $\psi w_* = \psi w$ инъективно при мономорфном w и сюръективно, если и только если

(1) морфизм w, делящий $v \in \varphi\backslash u$ справа, делит каждый морфизм из $\varphi\backslash u$.

Следствие 2.1.3. *Если множество $\varphi\backslash\chi$ содержит морфизм ψ, делящий все морфизмы множества $\varphi\backslash u$, то $\psi(\chi\backslash u) = \varphi\backslash u$. Если $\chi\backslash u$ содержит морфизм w, делящий все морфизмы из $\varphi\backslash u$, то $(\varphi\backslash\chi)w = \varphi\backslash u$. В указанных случаях $(\varphi\backslash\chi)(\chi\backslash u) = \varphi\backslash u$.*

Предложение 2.1.4. *(а) Если $v = \psi w$ и w – мономорфизм, то равенство $\varphi_1\backslash\varphi_1 v = \varphi_2\backslash\varphi_2 v$ влечет равенство $\varphi_1\backslash\varphi_1\psi = \varphi_2\backslash\varphi_2\psi$.*

(б) Если к тому же каждый морфизм из множеств частных $\varphi_1\backslash\varphi_1 v$ и $\varphi_2\backslash\varphi_2 v$ делится на w, то справедлива обратимая импликация.

Доказательство. Проверим, что $\varphi_1\backslash\varphi_1\psi \subset \varphi_2\backslash\varphi_2\psi$. Пусть $\psi' \in \varphi_1\backslash\varphi_1\psi$. Тогда $\psi' w$ принадлежит $\varphi_1\backslash\varphi_1 v$ и, следовательно, $\varphi_2\backslash\varphi_2 v$. Сокращая обе части равенства $\varphi_2\psi' w = \varphi_2\psi w$ на мономорфизм w, получаем, что $\psi' \in \varphi_2\backslash\varphi_2\psi$. По симметрии верно и обратное включение. Аналогично доказывается второе утверждение. □

Определение 2.1.1. Множеством $\varphi\backslash u/w$ двусторонних частных морфизма $A\,u\,W$ относительно морфизмов $A\varphi B$ и $C\,w\,W$ называется множество всех морфизмов $B\psi C$, удовлетворяющих равенству $u = \varphi\psi w$.

Очевидно, что $\varphi\backslash\chi/1_C = \varphi\backslash\chi$ и $1_A\backslash\chi/\psi = \chi/\psi$. Более того, $\varphi\backslash u/w = \varphi\backslash\chi$, если w – мономорфизм и $u = \chi w$. Двойственно, $\varphi\backslash u/w = v/w$ при эпиморфном φ и $u = \varphi v$.

Следующие утверждения очевидны.

Предложение 2.1.5. *Множество левых частных $\varphi\backslash\chi$ замкнуто относительно умножений:*

(а) справа на элементы γ изотропной полугруппы S^χ (и только на такие элементы);

(б) слева на элементы β изотропной полугруппы S^φ (более общо, ψ и $\beta\psi$ принадлежат $\varphi\backslash\chi$ тогда и только тогда, когда $\beta \in \varphi\backslash\chi/\psi$).

Двойственные результаты справедливы для множества правых частных χ/ψ.

Множество двусторонних частных $\varphi\backslash u/w$ замкнуто относительно умножений:

(а') справа на элементы $\gamma \in S_w$ (более общо, $\psi, \psi\gamma \in \varphi\backslash u/w \iff \gamma \in \varphi\psi\backslash u/w$);

(б') слева на элементы $\beta \in S^\varphi$ (более общо, $\psi, \beta\psi \in \varphi\backslash u/w \iff \beta \in \varphi\backslash u/\psi w$).

В соответствии с этим для множеств частных получаем разложения в объединение непересекающихся подмножеств:

$$\varphi\backslash\chi = \bigcup_i \psi_i G^\chi = \bigcup_j G^\varphi \psi_j = \bigcup_k G^\varphi \psi_k G^\chi;$$

$$\chi/\psi = \bigcup_i G_\chi \varphi_i = \bigcup_j \varphi_j G_\psi = \bigcup_k G_\chi \varphi_k G_\psi;$$

$$\varphi\backslash u/w = \bigcup_i G^\varphi \psi_i = \bigcup_j \psi_j G_w = \bigcup_k G^\varphi \psi_k G_w.$$

Здесь G с верхним индексом обозначает изотропную группу соответствующего морфизма, с нижним индексом – коизотропную группу.

Морфизм $A\varphi B$ называется регулярным в морфизме $A\varphi B$, если $\varphi\backslash\chi = \psi G^\chi$ и нормальным, если $\varphi\backslash\chi = G^\varphi\psi$.

Множество двусторонних частных $\varphi\backslash\chi/\psi$ при $\chi = \varphi\psi$ называется множеством биизотропных эндоморфизмов пары (φ, ψ). Если φ – эпиморфизм или ψ – мономорфизм, множество биизотропных эндоморфизмов $\varphi\backslash\chi/\psi$ совпадает, соответственно, с коизотропной полугруппой S_ψ или изотропной полугруппой S^φ и, следовательно, замкнуто относительно композиций. В общем случае это не верно, однако справедливо

Предложение 2.1.6. *Множество биизотропных эндоморфизмов $\varphi\backslash\chi/\psi$ замкнуто относительно умножения слева на перестановочные с φ биизотропные эндоморфизмы и умножения справа – на ψ-перестановочные биизотропные эндоморфизмы. Кроме того, оно содержит изотропную полугруппу S^φ и сводится к ней при мономорфном ψ, и двойственно, содержит коизотропную полугруппу S_ψ, причем сводится к ней, если φ – эпиморфизм.*

2.2 Регулярность

Для простоты предположим, что рассматривается категория, все морфизмы которой являются мономорфизмами.

Определение 2.2.1. Морфизм $A\varphi B$ называется регулярным относительно морфизма $B\psi C$, если из равенства $\varphi\psi = \varphi\psi'$ следует равенство $\psi' = \psi\gamma$ при некотором автоморфизме γ.

Поскольку $\varphi\psi = \varphi\psi' = \varphi\psi\gamma$, автоморфизм γ принадлежит изотропной группе G^χ морфизма $\chi = \varphi\psi$.

Таким образом, регулярность φ относительно ψ означает, что отображение

$$G^\chi\psi^*(\varphi\backslash\chi), \quad \gamma\psi^* = \psi\gamma$$

сюръективно. Таким образом, справедливо следующее предложение.

Предложение 2.2.1. *Морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме $A\chi C$ тогда и только тогда, когда он регулярен относительно некоторого (и, следовательно, любого) морфизма ψ множества частных $\varphi\backslash\chi$.*

Заметим, что поскольку равенство $\gamma\psi^* = \gamma'\psi^*$ выполняется в том и только том случае, когда $\gamma'\gamma^{-1} \in G^\psi$, из регулярности φ в χ следует, что отображение ψ^* индуцирует биекцию между множествами левых частных $\varphi\backslash\chi$ и левых смежных классов $G^\psi\backslash G^\chi$.

Согласно предложению 2.1.5 изотропная группа G^χ действует на множестве частных $\varphi\backslash\chi$ правыми композициями. Регулярность морфизма φ в χ эквивалентна условию транзитивности этого действия.

Предложение 2.2.2. *Расширение полей $A\varphi B$ регулярно относительно расширения BvW (или в $u = \varphi v$), если степень трансцендентности расширения u конечна и поле W алгебраически замкнуто.*

Доказательство. Пусть $u = \varphi v = \varphi v'$. Степени трансцендентности морфизмов v и v' равны, ибо при условии конечности степени трансцендентности $\mathrm{tr}\ u$ композиции $u = \varphi v$ справедлива формула $\mathrm{tr} u = \mathrm{tr}\ \varphi + \mathrm{tr}\ v$ (см., например, [9], пар.5.3).

Выберем базисы трансцендентности $(t_i, i \in I)$ и $(t'_i, i \in I)$ расширений v и v', соответственно. Согласно свойству продолжения изоморфизмов ([2]Д6.1) существует эндоморфизм $W\omega W$ такой, что $v = v'\omega$ и $\omega(t'_i) = t_i$ при всех $i \in I$. Образ $\omega(W)$ совпадает W и, следовательно, ω – автоморфизм, потому что $\omega(W) \subset W$ и оба они являются алгебраическими замыканиями чисто трансцендентного расширения поля $v(B)$, получаемого присоединением элементов $t_i, i \in I$. $\square$

Следствие 2.2.3. *Всякое алгебраическое расширение $A\varphi B$ регулярно в алгебраическом замыкании AuW. Более того, каждое алгебраическое расширение регулярно в кратном ему нормальном расширении.*

Действительно, пусть $A\chi C$ – произвольное нормальное расширение и CwW – некоторое вложение в алгебраическое замыкание поля A, так что $\chi w = u$. Если $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi'$, то $u = \varphi\psi w = \varphi\psi' w$ и согласно первому утверждению следствия $\psi' w = \psi w\omega$ при подходящем автоморфизме ω. Поскольку χ – нормальное расширение, найдется автоморфизм γ такой, что $w\omega = \gamma w$.

Применив это равенство к предыдущему и сократив на мономорфизм w, получим $\psi' = \psi\gamma$. Покажем, что при чисто трансцендентных расширениях $A\varphi B$ и BvW морфизм φ не регулярен относительно v. Зафиксируем базисы трансцендентности $(t_i, i \in I)$ для φ

и $(t_j, j \in J)$ для v. Рассмотрим морфизм $Bv'W$, определяемый условиями

$$\varphi v' = \varphi v, \quad v'(t_i) = t_i \ (i \in I \setminus \nu), \quad v'(t_\nu) = t_\nu^2.$$

Существуют эндоморфизмы $W\omega W$ такие, что $v' = v\omega$. Например, эндоморфизм, однозначно определяемый условиями

$$u\omega = u, \quad \omega(t_k) = t_k \ (k \in I \cup J \setminus \nu), \quad \omega(t_\nu) = t_\nu^2.$$

Ясно, что последнее равенство должно выполняться для всех эндоморфизмов ω, подчиняющихся соотношению $v' = v\omega$. Поэтому все они сюръективны. Действительно, если бы $\omega(c) = t_\nu$ при некотором $c \in W$, то поскольку t_ν является корнем многочлена $X^2 - t_\nu^2 = X^2 - \omega(t_\nu)$, c должно быть корнем многочлена $X^2 - t_\nu$, в противоречии с тем, что $(t_i, i \in I \cup J)$ – базис трансцендентности расширения u.

Пусть морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме $A\chi C$, а ψ – произвольный элемент множества $\varphi\backslash\chi$. Тогда для любого автоморфизма $\beta \in \mathrm{Aut}A$, подчиняющегося равенствам $\chi = \varphi\psi = \varphi\beta\psi$ существует автоморфизм $\gamma \in \mathrm{Aut}A$ такой, что $\beta\psi = \psi\gamma$. Иначе говоря, подмножество обратимых элементов $(\varphi\backslash\chi/\psi)^*$ соответствующего биизотропного множества перестановочно с ψ, т.е. лежит в коаллотропной группе $G_{(\psi)}$ (см. гл. 1, пар.1).

Так как $(\varphi\backslash\chi/\psi)^*$ содержит изотропную группу G^φ и даже совпадает с ней при мономорфном ψ, получаем следующее предложение.

Предложение 2.2.4. *Если φ регулярно в χ, то $G^\varphi \subset G_{(\psi)}$ при любом $\psi \in \varphi\backslash\chi$.*

Предложение 2.2.5. *Если морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме AuW, а морфизм, $B\psi C$ – в некотором морфизме $v \in \varphi\backslash u$, то ψ регулярен в любом частном $v' \in \varphi\backslash u$.*

Доказательство. Ввиду регулярности φ В u для любых $v, v' \in \varphi\backslash u$ существует автоморфизм $\omega \in G^u$ такой, что $v' = v\omega$. Равенства $v' = \psi w = \psi w'$ влекут равенства $v = \psi w\omega^{-1} = \psi w'\omega^{-1}$ и $w'\omega^{-1} = w\omega^{-1}\omega'$, $\omega' \in G^v$ в силу регулярности ψ в v. Отсюда $w' = w\omega^{-1}\omega'\omega$, причем $\omega^{-1}\omega'\omega \in G^v$. □

На основании доказанного предложения можно корректно определить регулярность морфизма ψ в множестве частных $\varphi\backslash u$ при условии регулярности φ в u.

Предложение 2.2.6. *Пусть композиция* $A\chi C$ *морфизмов* $A\varphi B$ *и* $B\psi C$ *регулярна относительно морфизма* CwW *(или в* $u = \chi w$*). Тогда*

(а) морфизм ψ *регулярен относительно* w *(в любом* $v \in \varphi\backslash u$*);*

(б) морфизм φ *регулярен относительно композиции* $v = \psi w$ *(в* u*), тогда и только тогда, когда выполняется условие (0) пар. 1.*

Доказательство. (а) Если $v = \psi w = \psi w'$, то умножая слева на φ и применяя условие регулярности χ, получаем, что $w' = w\omega$ при некотором автоморфизме ω.

(б) достаточность. Из равенств $u = \varphi v = \varphi v'$ подстановкой $v = \psi w$, $v' = \psi w'$, в силу регулярности χ в u получаем, что $w' = w\omega$ и, следовательно, $v' = v\omega$ при подходящем $\omega \in AutW$.

Необходимость. Для произвольного $v \in \varphi\backslash u$ из равенств $u = \chi w = \varphi\psi w = \varphi v$ ввиду регулярности φ в u следует, что $v = \psi w\omega$. □

Следствие 2.2.7. *Если* χ *регулярно в* u *и при некотором* $\psi \in \varphi\backslash\chi$ *все* $v \in \varphi\backslash u$ *делятся на* ψ*, то при любом* $\psi' \in \varphi\backslash\chi$ *все* $v \in \varphi\backslash u$ *делятся на* ψ'*.*

Доказательство. Нужно дважды применить пункт (б) доказанного предложения. □

Предложение 2.2.8. *Пусть морфизмы* $A\varphi B$*,* $B\psi C$ *и* CwW *обладают следующими свойствами:*

(i) φ *регулярно относительно* ψ *(следовательно, в* $\chi = \varphi\psi$*),*

(ii) w *делит любой морфизм* $v' \in \varphi\backslash u$*, где* $u = \chi w$*,*

(iii) все автоморфизмы $\gamma \in G^{\chi}$ *перестановочны с* w *(более сильным является требование, чтобы композиция* $\chi = \varphi\psi$ *была регулярна относительно* w*, следовательно, в* u*).*

Тогда морфизм φ *регулярен относительно* $v = \psi w$ *(и значит в морфизме* u*)*

Доказательство. Предположим, что $u = \varphi v = \varphi v'$. В силу свойства (ii) $v' = \psi' w$. Подстановкой и сокращением на w получаем $\varphi\psi' = \varphi\psi$.

Согласно свойству (i) найдется автоморфизм $\gamma \in G^{\chi}$ такой, что $\psi' = \psi\gamma$. Ввиду свойства (iii) $\gamma w = w\omega$ при подходящем автоморфизме $\omega \in \mathrm{Aut}A$. Следовательно, $v' = \psi' w = \psi\gamma w = \psi w\omega = v\omega$, причем $\omega \in G^u$. $\square$

Предложение 2.2.9. *Из регулярности морфизма $A\varphi B$ в AuW и морфизма $B\psi C$ в некотором частном $v \in \varphi\backslash u$ следует регулярность композиции $\chi = \varphi\psi$ в u.*

Доказательство. Пусть $u = \chi w = \chi w'$. Подставляя $\chi = \varphi\psi$ и используя регулярность φ в u получаем, что $\psi w' = \psi w\omega' = v'$, где $\omega' \in \mathrm{Aut}A$, а $v' \in \varphi\backslash u$. Согласно предложению 2.2.5, ψ регулярно в v', поэтому $w' = w\omega'\omega''$ с $\omega'' \in \mathrm{Aut}A$. $\square$

Предложение 2.2.10. *Пусть морфизм $A\varphi B$ регулярен относительно морфизма BvW, морфизмы $A\bar{\varphi}\bar{B}$ и $\bar{B}\bar{v}W$ в композиции дают морфизм $u = \varphi v$, CwW – композит морфизмов v и $\bar{v}$, а $B\psi C$ и $\bar{B}\bar{\psi}C$ – ассоциированные с композитом морфизмы. Тогда морфизм $\bar{\psi}$ регулярен относительно морфизма w, если*

$$G^u = \{\omega'\omega'' |\, \omega' \in G^v,\ \omega'' \in G^{\bar{v}}\} = G^v G^{\bar{v}}. \qquad (*)$$

Напомним, что композитом морфизмов BvW и $\bar{B}\bar{v}W$ называется мономорфизм CwW, удовлетворяющий следующим условиям:

(i) w делит v и $\bar{v}$: $v = \psi w$, $\bar{v} = \bar{\psi} w$;

(ii) w делится на любой морфизм, делящий v и $\bar{v}$;

(iii) пара морфизмов $(\psi, \bar{\psi})$ – плотная (= коразделяющая), т.е. равенства $\psi\mu = \psi\nu$, $\bar{\psi}\mu = \bar{\psi}\nu$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mu = \nu$.

Доказательство. Прежде всего, подставляя $v = \psi w$ и $\bar{v} = \bar{\psi} w$ в равенство $\varphi v = \bar{\varphi}\bar{v}$ и сокращая на w, получаем $\varphi\psi = \bar{\varphi}\bar{\psi}$.

Предположим теперь, что $\bar{v} = \bar{\psi} w = \bar{\psi} w'$. Тогда $u = \bar{\varphi}\bar{v} = \bar{\varphi}\bar{\psi} w = \bar{\varphi}\bar{\psi} w'$ и, следовательно, $u = \varphi\psi w = \varphi\psi w'$. Вследствие регулярности φ в u имеем $\psi v' = \psi w\omega$ при некотором $\omega \in G^u$. Согласно наложенному условию (*), $\omega = \omega'\omega''$, где $\omega' \in G^v$, $\omega'' \in G^{\bar{v}}$. При этом $\psi w' = \psi w\omega'\omega'' = \psi w\omega''$ и $\bar{\psi} w' = \bar{v} = \bar{\psi} w\omega''$. Отсюда по определению композита $w' = w\omega''$. $\square$

Следствие 2.2.11. *Если в условиях предложения $\bar{\varphi}$ регулярна в u, то и композиция $\chi = \varphi\psi$ регулярна в u.*

2.3 Нормальность

Нормальность морфизма $A\varphi B$ относительно морфизма $B\psi C$ определяется условием

$$\chi = \varphi\psi = \varphi\psi' \Longrightarrow \psi' = \beta\psi, \quad \beta \in \mathrm{Aut}A.$$

При этом β принадлежит подмножеству обратимых элементов $(\varphi\backslash\chi/\psi)^*$ соответствующего биизотропного множества, которое совпадает с изотропной группой G^φ при мономорфизме ψ. Поэтому нормальность φ относительно ψ эквивалентна сюръективности отображения

$$G^\varphi\psi_*(\varphi\backslash\chi)| \quad \beta\psi_* = \beta\psi.$$

В частности, условия нормальности φ в χ и относительно любого $\psi \in \varphi\backslash\chi$ совпадают. Кроме того, отображение ψ_* инъективно при мономорфном ψ, следовательно, определяет биекцию между G^φ и $\varphi\backslash\chi$.

Если рассмотреть действие изотропной группы G^φ на множестве частных $\varphi\backslash\chi$ с помощью левых композиций, то нормальность φ в χ равносильна транзитивности этого действия. Отметим, что из-за мономорфности ψ указанное действие эффективно.

Предложение 2.3.1. *Если морфизм φ нормален относительно морфизма ψ, то все автоморфизмы γ изотропной группы G^χ композиции $\chi = \varphi\psi$ перестановочны с ψ, иначе говоря, G^χ содержится в аллотропной группе $G^{(\psi)}$.*

Доказательство. следует из определения нормальности. □

При $\chi = \varphi\psi$ с мономорфным ψ определен гомоморфизм групп

$$(G^\chi \cap G^{(\psi)})\psi^a G^\varphi, \quad \gamma\psi^a = \beta, \quad \beta\psi = \psi\gamma.$$

Ядро этого гомоморфизма совпадает с изотропной группой G^ψ, которая является нормальным делителем в $G^\chi \cap G^{(\psi)}$.

(а) Пусть морфизм φ регулярен в морфизме χ. Тогда ψ^a – эпиморфизм.

(б) Если φ нормален в χ, то согласно Предложению 2.3.1 $G^\chi = G^\chi \cap G^\psi$, поэтому G^ψ – нормальная подгруппа изотропной группы G^χ.

(в) Если φ одновременно регулярно и нормально в χ, то к вышесказанному можно добавить, что изотропная группа G^φ изоморфна факторгруппе G^χ/G^ψ.

(г) Верно такое обращение утверждения п. (б): Пусть N – нормальная подгруппа изотропной группы G^χ морфизма $A\chi C$, а $B\psi C$ – стабилизация по действию группы N. Согласно предложению 1.2.6 (д) (главы 1) нормализатор подгруппы N в $\mathrm{Aut}C$, очевидно, содержащий изотропную группу N, содержитсм в аллотропной группе $G^{(\psi)}$. Отсюда $G^\chi \subset G^{(\psi)}$. Поэтому канонический морфизм φ, определяемый равенством $\varphi\psi = \chi$, нормален в u, если только он регулярен в χ.

Предложение 2.3.2. *Если морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме AuW, а его композиция χ с морфизмом $B\psi C$ нормальна в u, то φ регулярен в χ.*

Доказательство. Пусть $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi'$. Взяв композиции с морфизмом $w \in \chi\backslash u$, получим $u = \varphi\psi w = \varphi\psi' w$. По регулярности φ в u существует автоморфизм ω такой, что $\psi' w = \psi w\omega$. После подстановки в предыдущее равенство и использования нормальности χ в u получим, что $\gamma w = w\omega$ при подходящем автоморфизме γ. Сокращая равенство $\psi' w = \psi\gamma w$ на w, получаем, что φ регулярно в χ. $\square$

Предложение 2.3.3. *(а) Морфизм $A\varphi B$, нормальный в морфизме AuW, нормален в любом делителе $A\chi C$ морфизма u, кратном φ.*

(б) Нормальный в χ морфизм φ нормален в $u = \chi w$, если и только если любой морфизм $v \in \varphi\backslash u$ делится на w.

Доказательство. (а). Пусть $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi'$. Умножив справа на $w \in \chi\backslash u$ и воспользовавшись нормальностью φ в u, получаем, что $\psi' w = \beta\psi w$ для подходящего автоморфизма β, а после сокращения на w – $\psi' = \beta\psi$.

(б). Достаточность. Пусть $u = \varphi v = \varphi v'$ и $v = \psi w$, $v' = \psi' w$. Тогда $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi'$ и в силу нормальности φ в χ $\psi' = \beta\psi$ для некоторого автоморфизма β. Но тогда $v' = \beta v$.

Необходимость. Из нормальности φ в u следует, что для любого $v \in \varphi\backslash u$ существует автоморфизм β такой, что $v = \beta\psi w$, где $\psi \in \varphi\backslash\chi$. □

Предложение 2.3.4. *Расширение полей $A\varphi B$ конечной степени трансцендентности нормально относительно алгебраически замкнутого расширения полей BvW в категорном смысле тогда и только тогда, когда φ – нормальное алгебраическое расширение или v – тривиальное расширение.*

Доказательство. Пусть сначала φ – трансцендентное расширение и $(t_i,\, i \in I)$ – его конечный базис трансцендентности. Предположим кроме того, что

(*) существует элемент $t \in W$, не принадлежащий $B \equiv v(B)$ и такой, что семейство $(t, t_i,\, i \in I \setminus \nu)$ алгебраически свободно над A (ν – некоторый элемент из I).

Тогда согласно свойству продолжения изоморфизмов существует морфизм v', удовлетворяющий условиям

$$\varphi v' = \varphi v,\ v'(t_i) = v(t_i),\ \text{Esli}\ \ i \in I \setminus \nu,\ \text{i}\ v'(t_\nu) = t.$$

Для такого морфизма v' не существует эндоморфизма β подчиняющегося равенству $\beta v = v'$. Это ясно из того, что образ t_ν относительно βv принадлежит B, тогда как $v'(t_\nu) = t \notin B$. Таким образом, при условии (*) φ не нормально относительно v.

Условие (*) выполнено в следующих двух случаях.

1) W трансцендентно над B. Тогда достаточно взять элемент t трансцендентным над B, а в качестве ν – произвольный элемент I.

2) $W \setminus B$ содержит элемент t, алгебраический над B, но не алгебраический над A. В этом случае t будет алгебраичным и над чисто трансцендентным расширением $A\,(t_i|\, i \in I)$ поля A, причем его неприводимый многочлен над этим полем будет иметь хотя бы один коэффициент, зависящий от некоторого t_ν, $\nu \in I$. При этом семейство $(t, t_i|\, i \in I \setminus \nu)$ будет алгебраически свободным над A, потому что в противном случае существовал бы многочлен с коэффициентами из поля $A(t_i|\, i \in I \setminus \nu)$, обнуливающийся в t, что противоречит выбору ν.

Итак, если нормальное относительно алгебраически замкнутого расширения полей v расширение φ трансцендентно, то v – алгебраическое расширение и все элементы $W \setminus B$ алгебраичны над A.

Если $c \in W \setminus B$ – алгебраический над A элемент, а $t \in B$ – произвольный трансцендентный над A элемент, то элемент $ct \in W \setminus B$ также должен быть алгебраичным над A, что противоречит трансцендентности t над A.

Значит $B = W$, т.е. расширение BvW тривиально, и, следовательно, $A\varphi B$ алгебраически замкнутое расширение. Тогда $A\varphi B$ нормально относительно тождественного морфизма 1_B.

Действительно, если $\varphi v = \varphi$, то используя конечность степени трансцендентности расширения φ, получим, что B и $v(B) \subset B$ являются алгебраическими замыканиями чисто трансцендентного расширения $A\left(v(t_i) | \, i \in I\right)$, поэтому совпадают. Следовательно v – автоморфизм .

Осталось исследовать случай алгебраического расширения $A\varphi B$. В силу алгебраической замкнутости расширения BvW множество C всех элементов W, алгебраических над A, будет алгебраическим замыканием поля A. Пусть $A\chi C$ и CwW – естественные вложения, так что $\chi w = \varphi v = u$. Ввиду алгебраичности расширения $A\varphi B$ существует (неканоническое) вложение $B\psi C$ и $\chi = \varphi\psi$.

Для любого $v' \in \varphi\backslash u$ образ $v'(B)$ лежит в C, ибо состоит из алгебраических над A элементов, следовательно, v' делится на $v' \; w$. Поэтому согласно предложению 2.3.3 φ нормально относительно v тогда и только тогда, когда φ нормально в χ. Последнее в свою очередь означает, что $A\varphi B$ – нормальное алгебраическое расширение ([121], гл. 7, пар. 3, Теорема 4). □

Предложение 2.3.5. *Пусть композиция $A\chi C$ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ нормальна в морфизме AuW. Тогда для нормальности ψ в $v \in \varphi\backslash u$ необходимо и достаточно, чтобы v делилось на ψ. Последнее условие выполняется, если φ регулярно в u.*

Доказательство. Необходимость очевидна. В обратную сторону надо только проверить, что для любых $w,\, w' \in \psi\backslash v$ найдется автоморфизм γ, подчиняющийся равенству $w' = \gamma w$. А это немедленно следует из нормальности χ в u, потому, что $w,\, w' \in \chi\backslash u$. Если φ регулярно в u, то из равенств $\varphi v = \varphi\psi w = u$ вытекает, что $v = \psi w \omega$ при подходящем автоморфизме ω. □

Заметим, что в отличие от соответствующих свойств регулярности нормальность φ в u из нормальности χ в u, а также нормальность композиции $\chi = \varphi\psi$ в u при условии нормальности φ в u и ψ в некотором $v \in \varphi\backslash u$ не следуют даже в категории полей (см. [121], гл. 7, пар.3).

Предложение 2.3.6. *Пусть композиция $A\chi C$ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ нормальна в морфизме AuW и каждый морфизм из $\varphi\backslash u$ делится на ψ. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) морфизм φ нормален в u,

(ii) морфизм φ нормален в χ.

(iii) морфизм ψ перестановочен со всеми автоморфизмами $\gamma \in G^{\chi}$.

Доказательство. Импликация (i) $\Longrightarrow$ (ii) верна без всяких дополнительных условий лишь бы u делилось на χ. (предложение 2.3.3 (a)). Импликация (ii) $\Longrightarrow$ (iii) суть предложение 2.3.1. Проверим импликацию (iii) $\Longrightarrow$ (i).

Пусть $w \in \chi\backslash u$ и $v' \in \varphi\backslash u$. Тогда согласно предпосылкам $v' = \psi w'$ с $w' \in \chi\backslash u$ и $w' = \gamma w$ при подходящем автоморфизме γ. Отсюда $u = \chi w = \chi\gamma w$ и, следовательно, $\chi = \varphi\psi = \varphi\psi\gamma$. Согласно (iii) существует автоморфизм β такой, что $\psi\gamma = \beta\psi$. Поэтому $v' = \psi\gamma w = \beta v$, $v = \psi w$. □

Предложение 2.3.7. *Пусть композиции морфизмов $A\varphi_i B_i$ и $B_i v_i W$ $(i = 1, 2)$ равны u. Пусть CwW – их композит, $B_i\psi_i C$ – ассоциированные с композитом морфизмы, а пара морфизмов $(B\eta_1 B_1, B\eta_2 B_2)$ представляет коамальгаму пары (v_1, v_2), т.е. сквозной морфизм $v = \eta_1 v_1 = \eta_2 v_2$ представляет пересечение подобъектов v_1 и v_2. Пусть $A\varphi B$ – морфизм, однозначно определяемый равенствами $\varphi\eta_i = \varphi_i$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) Из нормальности φ_1 в u следует нормальность ψ_2 в v_2, если и только если для любого $\beta \in G^{\varphi_1}$ такого, что $\beta\psi_1 w = \psi_1 w'$ при некотором w', удовлетворяющем равенству $\psi_2 w = \psi_2 w'$, существует автоморфизм $\gamma \in G^{\psi_2}$ такой, что $\beta\psi_1 = \psi_1\gamma$.

(б) Из нормальности φ_i в u $(i = 1, 2)$ следует нормальность $\chi = \varphi_1\psi_1 = \varphi_2\psi_2$ в u тогда и только тогда, когда для любых автоморфизмов $\beta_i \in G^{\varphi_i}$ таких, что $\beta_i\psi_i w = \psi_i w'$ $(i = 1, 2)$ при некотором w', удовлетворяющем равенству $\chi w = \chi w'$, существует автоморфизм $\gamma \in G^{\chi}$ такой, что $\beta_i\psi_i = \psi_i\gamma$.

(в) Из нормальности φ_i в u $(i = 1, 2)$ следует нормальность φ v u, если морфизм φ регулярен в морфизме u.

Доказательство. (а) Пусть $v_2 = \psi_2 w = \psi_2 w'$. Тогда $\varphi_2 v_2 = \varphi_2\psi_2 w = \varphi_2\psi_2 w'$ и, следовательно, $u = \varphi_1\psi_1 w = \varphi_1\psi_1 w'$. Из-за нормальности φ_1 в u существует автоморфизм $\beta \in G^{\varphi_1}$ такой, что $\psi_1 w' = \beta\psi_1 w$. Согласно наложенному условию $\beta\psi_1 = \psi_1\gamma$ при некотором $\gamma \in G^{\psi_2}$. Поэтому $\psi_1 w' = \psi_1\gamma w$ и $\psi_2 w' = \psi_2\gamma w$. Так как пара морфизмов (ψ_1, ψ_2) – плотная, по определению композита, получаем $w' = \gamma w$.

Обратно, предположим, что φ_1 нормально в u, ψ_2 нормально в v_2. Тогда, если w' удовлетворяет равенству $\psi_2 w = \psi_2 w'$, то $w' = \gamma w$, при некотором $\gamma \in G^{\psi_2}$ и условие $\beta\psi_1 w = \psi_1 w'$ влечет равенство $\beta\psi_1 = \psi_1\gamma$.

(б) Прежде всего, равенство $\chi = \varphi_1\psi_1 = \varphi_2\psi_2$ получается из равенства $u = \varphi_1 v_1 = \varphi_2 v_2$ после подстановки $v_i = \psi_i w$ и сокращения на w. В остальном доказательство проводится аналогично предыдущему.

(в) Пусть $u = \varphi v = \varphi v'$. Согласно наложенному условию $v' = v\omega$, $\omega \in G^u$ и вследствие нормальности φ_i в u найдется автоморфизм $\beta_i \in G^{\varphi_i}$ такой, что $\beta_i v_i = v_i\omega$ $(i = 1$

Проверим, что β – изоморфизм. Поскольку $(\eta_i\beta_i^{-1})v_i = \eta_i v_i\omega^{-1} = v\omega^{-1}$ совпадают при $i = 1,\ 2$, существует морфизм $B\beta' B$ такой, что $\beta'\eta_i = \eta_i\beta_i^{-1}$. Тогда $\beta'\beta\eta_i = \eta_i$ при $i = 1,\ 2$. Поскольку коамальгама (η_1, η_2) – разделяющаяся пара морфизмов, $\beta'\beta = 1$ и аналогично$\beta\beta' = 1$. □

Замечание 2.3.8. Громоздкие необходимые и достаточные условия пп. (а) и (б) можно заменить простыми и "естественными", но лишь достаточными условиями: пара морфизмов (ψ_1, ψ_2) является амальгамой пары (φ_1, φ_2) и сквозной морфизм $\chi = \varphi_i\psi_i$ (а при (а) – ψ_2) регулярен относительно морфизма w.

Действительно, например, в случае (а) $\varphi_1\beta\psi_1 w = \varphi_1\psi_1 w' = \varphi_2\psi_2 w' = \varphi_2\psi_2 w$, поэтому $\varphi_1(\beta\psi_1) = \varphi_2\psi_2$. По определению амальгамы существует морфизм $C\gamma C$ такой, что $\beta\psi_1 = \psi_1\gamma, \quad \psi_2 = \psi_2\gamma$. Из-за регулярности ψ_2 относительно w имеем $w' = w\omega$, $\omega \in G^u$, следовательно, $\beta^{-1}\psi_1 w = \psi_1 w\omega^{-1}$.

Как и выше проверяется, что $\varphi_1(\beta^{-1}\psi_1) = \varphi_2\psi_2$, поэтому $\psi_1\gamma' = \beta^{-1}\psi_2$ и $\psi_2\gamma' = \psi_2$ для некоторого $C\gamma' C$. Тогда $\gamma\gamma'$ и $\gamma'\gamma$ принадлежат изотропным группам G^{ψ_1} и G^{ψ_2} и в силу плотности амальгамы (ψ_1, ψ_2) имеем $\gamma\gamma' = \gamma'\gamma = 1$, т.е. γ – автоморфизм.

2.4 Степень сепарабельности

Определение 2.4.1. Степенью сепарабельности морфизма $A\varphi B$ в морфизме $A\chi C$ называется мощность $|\varphi\backslash\chi|$ множества левых частных $\varphi\backslash\chi$. Обозначение – $\mathrm{sep}_\chi\varphi$.

Если морфизм φ регулярен в морфизме χ, то множество левых частных $\varphi\backslash\chi$ биективно множеству левых смежных классов $G^\psi\backslash G^\chi$ при любом $\psi \in \varphi\backslash\chi$. Поэтому $\mathrm{sep}_\chi\varphi$ равна индексу подгруппы G^ψ изотропной группы G^χ.

Если морфизм φ нормален в морфизме χ, то $\varphi\backslash\chi$ биективно изотропной группе G^φ (пар. 3.1), следовательно, $\mathrm{sep}_\chi\varphi = |G^\varphi|$.

Пусть морфизм $A\chi C$ есть композиция морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$. Тогда определено стандартное отображение для AuW:

$$(\chi\backslash u)\psi^*(\varphi\backslash u), \quad w\psi^* = \psi w.$$

Слоем точки $v \in \varphi\backslash u$ этого отображения служит множество частных $\psi\backslash v$. Поэтому

(а) $\chi\backslash u = \bigcup_{v\in\varphi\backslash u} \psi\backslash v$;

(б) отображение ψ^* сюръективно, если и только если $\psi\backslash v \neq \emptyset$ при любом $v \in \varphi\backslash u$, т.е. выполняется условие (0) пар. 1.

В качестве следствия (а) получаем соотношение

$$\mathrm{sep}_u \chi = \sum_{v \in \varphi \backslash u} \mathrm{sep}_v \psi.$$

Если слои $\psi \backslash v$ всех точек $v \in \varphi \backslash u$ равномощны (в частности, выполняется свойство (б)), то

$$\mathrm{sep}_u \chi = \mathrm{sep}_u \varphi \cdot \mathrm{sep}_v \psi.$$

Это равенство известно под названием „свойство мультипликативности степени сепарабельности". Здесь предполагается конечность степеней сепарабельности.

Предложение 2.4.1. *Если морфизм φ и композиция $\chi = \varphi\psi$ регулярны в u, то степень сепарабельности $\mathrm{sep}_u \chi$ мультипликативна относительно разложения $\chi = \varphi\psi$.*

Доказательство. Заметим, что для любых двух точек $v, v' \in \varphi \backslash u$ существует автоморфизм ω такой, что $v' = v\omega$ и отображение $(\psi \backslash v)\omega_*(\psi \backslash v'), \quad w\omega_* = w\omega$ биективно. □

2.5 Чистая несепарабельность

Определение 2.5.1. Морфизм $A\varphi B$ называется чисто несепарабельным относительно морфизма BvW (в морфизме $u = \varphi v$), если v – единственный морфизм, подчиняющийся равенству $u = \varphi v$. Последнее условие означает, что

$$|\varphi \backslash u| = \mathrm{sep}_u \varphi = 1.$$

Всякий эпиморфизм чисто несепарабелен в любом делящемся на него слева морфизме. В частности, произвольный изоморфизм $A\varphi B$ чисто несепарабелен в любом морфизме $A\chi C$ потому, что $\varphi \backslash \chi = \{\varphi^{-1}\chi\}$. Из определения сразу следует, что, если мономорфизм φ чисто несепарабелен относительно v (в u), то он регулярен и нормален относительно v (в u).

Если морфизм φ чисто несепарабелен относительно v (в u), то совпадают изотропные полугруппы S^v, S^u и группы G^v, G^u, а множество биизотропных элементов $\varphi \backslash u / v$, изотропные полугруппа S^φ и группа G^φ тривиальны.

Предложение 2.5.1. *(а) Если морфизм φ чисто несепарабелен относительно морфизма v, то он чисто несепарабелен и относительно любого его левого делителя ψ.*

(б). Пусть морфизм φ чисто несепарабелен относительно морфизма ψ, а композиция $\chi = \varphi\psi$ нормальна относительно морфизма w. Тогда для чистой несепарабельности φ относительно $v = \psi w$ необходимо и достаточно, чтобы φ было регулярным относительно v.

Доказательство. (а) Пусть $v = \psi w$. Если $\varphi\psi = \varphi\psi'$, то $\varphi v = \varphi\psi w = \varphi\psi' w$, следовательно, $v = \psi w = \psi' w$.Сокращая на w, получаем $\psi = \psi'$.

(б) Необходимость очевидна. Проверим достаточность. В силу регулярности φ относительно v, для любого $v' \in \varphi\backslash u$ существует $\omega \in G^u$ такой, что $v' = \psi w\omega$. Ввиду нормальности χ относительно w, имеем $w\omega = \gamma w$ для некоторого автоморфизма γ. Тогда $\varphi\psi w = \varphi\psi w\omega = \varphi\psi\gamma w$ и после сокращения на w, получаем $\varphi\psi = \varphi\psi\gamma = \chi$. Из чистой несепарабельности φ в χ имеем $\gamma \in G^\psi$ и $v' = v$. □

Предложение 2.5.2. *(а) Пусть композиция $A\chi C$ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ чисто несепарабельна относительно морфизма CwW. Тогда*

(i) ψ чисто несепарабелен относительно w;

(ii) φ чисто несепарабелен относительно $v = \psi w$ (или в $u = \varphi v$), если и только если все $v' \in \varphi\backslash u$ делятся на ψ, эквивалентно, φ регулярно в u;

(б) Обратно, если ψ чисто несепарабельно относительно w, а φ относительно композиции $v = \psi w$, то $\chi = \varphi\psi$ чисто несепарабельно относительно w.

Доказательство. (а) Из равенства $\psi w = \psi w'$ следует равенство $\chi w = \chi w'$, откуда в силу чистой несепарабельности χ относительно w, имеем $w = w'$, что доказывает (l).

Если φ чисто несепарабельно относительно w, то, как мы уже знаем, φ регулярно относительно w, а при этом выполняется условие (0) пар. 1. Если же все элементы множества частных $\varphi\backslash u$ делятся на ψ, то из равенства $\varphi v = \varphi v' = u$ следует равенство $\chi w = \chi w'$, где $v' = \psi w'$. Так как χ чисто несепарабельно относительно w, имеем $w = w'$ и, следовательно, $v = v'$.

б) Пусть $\chi w = \chi w' = u$. Тогда $\varphi(\psi w) = \varphi(\psi w') = u$ и ввиду чистой несепарабельности φ в u, имеем $\psi w = \psi w'$, а из чистой несепарабельности ψ относительно w получаем $w = w'$. □

Заметим, что если потребовать регулярность φ в u, то все результаты доказанного предложения следуют из свойства мультипликативности степени сепарабельности.

Предложение 2.5.3. *Пусть композиции морфизмов $A\varphi B$ и BvW, $A\bar{\varphi}\bar{B}$ и $\bar{B}\bar{v}W$ равны AuW. Пусть CwW – композит морфизмов v и $\bar{v}$, а $B\psi C$ и $\bar{B}\bar{\psi}C$ – ассоциированные с композитом морфизмы. Тогда*

(а) если φ чисто несепарабелен в u, то $\bar{\psi}$ чисто несепарабелен относительно w;

(б) если φ и $\bar{\varphi}$ чисто несепарабельны в u, то $\chi = \varphi\psi = \bar{\varphi}\bar{\psi}$ чисто несепарабелен в u.

Доказательство. Из равенства $\bar{\psi}w = \bar{\psi}w'$ следует, что $\bar{\varphi}\bar{\psi}w = \bar{\varphi}\bar{\psi}w' = u$, а значит и $\varphi\psi w = \varphi\psi w' = u$. Согласно свойству чистой несепарабельности φ в u имеем $\psi w = \psi w'$. Пара морфизмов $(\psi, \bar{\psi})$, ассоциированная с композитом, является плотной, поэтому $w = w'$. Утверждение (б) сразу следует из утверждения (а) и предложения 2.5.2 (б). □

2.6 Сепарабельность

Мономорфизм $A\varphi B$ называется сепарабельным относительно мономорфизма BvW, если из равенства множеств частных $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$ для правых мономорфных делителей $X\eta B$ и $X'\eta' B$ морфизма φ следует существование изоморфизма $X\sigma X'$' такого, что $\eta' = \sigma\eta$. В дальнейшем предполагаем, что в рассматриваемой категории все морфизмы являются мономорфизмами.

При любом $X\eta B$, делящем $A\varphi B$, множество частных $\eta\backslash\eta v$ лежит в множестве частных $\varphi\backslash u$, где $u = \varphi v$. Поэтому имеем отображение

$$\mathcal{P}_\varphi(B) b_v \mathcal{B}(\varphi\backslash u), \quad \eta \longmapsto \eta b_v = \eta\backslash\eta v,$$

где $\mathcal{P}_\varphi(B)$ – множество подобъектов объекта B, содержащих подобъект φ, а $\mathcal{B}(\varphi\backslash u)$ –

булиан множества частных $\varphi\backslash u$. Сепарабельность морфизма φ относительно морфизма v эквивалентна, условию инъективности отображения b_v.

Морфизм $A\varphi B$ называется сепарабельным в морфизме AuW, если φ сепарабельно относительно любого $v \in \varphi\backslash u$.

Если морфизм $A\varphi B$ регулярен в морфизме AuW, то из сепарабельности φ относительно некоторого морфизма $v \in \varphi\backslash u$, следует его сепарабельность относительно любого $v' \in \varphi\backslash u$.

Действительно, по определению регулярности имеем $v' = v\omega$ при подходящем автоморфизме ω. Поэтому для любых правых делителей $X\eta B$ и $X'\eta' B$ морфизма φ имеем

$$\eta\backslash\eta v \cdot \omega = \eta\backslash\eta v', \quad \eta'\backslash\eta' v \cdot \omega = \eta'\backslash\eta' v'.$$

Следовательно, равенство $\eta\backslash\eta v' = \eta'\backslash\eta' v'$ влечет равенство $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$, и значит существование изоморфизма σ такого, что $\eta' = \sigma\eta$.

Таким образом, в случае регулярности морфизма φ в u сепарабельность φ в u сводится к сепарабельности φ относительно некоторого $v \in \varphi\backslash u$.

Кроме того, если φ регулярен относительно v, то и любой его правый делитель η регулярен относительно v, т.е. $\eta\backslash\eta v = vG^{\eta v}$. Поэтому равенство $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$ влечет равенства $vG^{\eta v} = vG^{\eta' v}$ и, следовательно, $G^{\eta v} = G^{\eta' v}$. Действительно, для всякого $\omega' \in G^{\eta' v}$ найдется $\omega \in G^{\eta v}$ такой, что $v\omega = v\omega'$.

Отсюда $v = v\omega'\omega^{-1}$ и, следовательно, $\omega' \in G^v\omega$. Поскольку $G^v\omega \subset G^{\eta v}$, из сказанного следует, что $G^{\eta' v} \subset G^{\eta v}$ и аналогично $G^{\eta v} \subset G^{\eta' v}$.

Предложение 2.6.1. *Если морфизм $A\varphi B$ регулярен относительно морфизма BvW, то для сепарабельности φ относительно v необходимо и достаточно, чтобы в случае равенства изотропных групп $G^{\eta v} = G^{\eta' v}$ для правых делителей $X\eta B$ и $X'\eta' B$ морфизма φ, выполнялось равенство $\eta' = \sigma\eta$ при подходящем изоморфизме σ, т.е. отображение*

$$\mathcal{P}_\varphi(B) a_v \mathcal{P}(G^{\varphi v}), \quad \eta a_v = G^{\eta v}$$

было инъективным. Регулярный в AuW морфизм $A\varphi B$ сепарабелен в нем если он сепарабелен относительно некоторого $v \in \varphi\backslash u$.

В случае, когда для любых морфизмов, делящих морфизм $A\varphi B$, существует композит, условие сепарабельности φ относительно морфизма BvW можно замещать несколько более слабым условием:

для любого разложения морфизма $A\varphi B$ в композицию морфизмов $A\xi X$, $X\eta Y$ и $Y\zeta B$ равенство множеств частных $\eta\zeta\backslash\eta\zeta v = \zeta\backslash\zeta v$ возможно только при изоморфизме η.

Достаточно проверить, что из этого условия следует условие сепарабельности (ибо обратное очевидно).

Лемма 2.6.2. *Пусть η_1' и η_2' – правые делители морфизма φ, а ζ – их композит. Тогда*

$$\eta_1'\backslash\eta_1'v \cap \eta_2'\backslash\eta_2'v = \zeta\backslash\zeta v.$$

Доказательство. Пусть $\eta_i' = \eta_i\zeta$, $i = 1, 2$. Согласно предложению 2.1.1

$$\zeta\backslash\zeta v \subset \eta_1'\backslash\eta_1'v \cap \eta_2'\backslash\eta_2'v.$$

Обратное включение следует из того, что равенство $\eta_i'v = \eta_i'v'$ можно переписать в виде $\eta_i\zeta v = \eta_i\zeta v'$, $i = 1, 2$ и на основании плотности пары морфизмов (η_1, η_2), ассоциированной с композитом ζ, вывести, что $\zeta v = \zeta v'$.

Теперь, если η_1' і η_2' правые делители морфизма φ со свойством $\eta_1'\backslash\eta_1'v = \eta_2'\backslash\eta_2'v$ и ζ – их композит, то, как следует из леммы, $\zeta\backslash\zeta v$ совпадает с предыдущими множествами частных. Поскольку при этом η_1' и η_2' делятся на ζ,согласно новому условию, $\eta_i' = \eta_i\zeta$, $i = 1, 2$при подходящих изоморфизмах η_i. Отсюда $\eta_2' = \eta_2\eta_1^{-1}\eta_1'$.

Условие $\eta\zeta\backslash\eta\zeta v = \zeta\backslash\zeta v$ означает чистую несепарабельность η относительно ζv, если только любой морфизм множества частных $\eta\backslash\eta\zeta v$ делится на ζ.Действительно, в этом случае всякий морфизм из $\eta\backslash\eta\zeta v$ имеет вид $\zeta v'$, где v' принадлежит множествам частных $\eta\zeta\backslash\eta\zeta v = \zeta\backslash\zeta v$. Поэтому $\zeta v' = \zeta v$ и, следовательно, $|\eta\backslash\eta\zeta v| = 1$.

В другую сторону, предположим, что $\eta\backslash\eta\zeta v$ состоит из единственного морфизма, к тому же делящегося на ζ. Тогда этим морфизмом должна быть композиция ζv. Поэтому если $v' \in \eta\zeta\backslash\eta\zeta v$, то $\zeta v' \in \eta\backslash\eta\zeta v$ и $\zeta v' = \zeta v$, т.е. $v' \in \zeta\backslash\zeta v$. Тем самым справедливо включение $\eta\zeta\backslash\eta\zeta v \subset \zeta\backslash\zeta v$. Обратное включение верно в силу предложения 2.1.1. $\square$

Отметим, что каждый морфизм из $\eta\backslash\eta\zeta v$ делится на ζ, если η регулярно относительно ζv (предложение 2.2.6).

Рассмотрим случай, когда морфизм $A\varphi B$ нормален относительно морфизма BvW (или в композиции $u = \varphi v$).

Предложение 2.6.3. *Если морфизм φ сепарабелен относительно некоторого морфизма $v \in \varphi\backslash u$, то он сепарабелен относительно любого морфизма $v' \in \varphi\backslash u$ и, следовательно, сепарабелен в u. Для сепарабельности φ относительно v необходимо и достаточно, чтобы равенство групп изотропии $G^\eta = G^{\eta'}$ влекло равенство $\eta' = \sigma\eta$ при подходящем изоморфизме σ, где η и η' правые делители морфизма φ.*

Доказательство. Поскольку любой правый делитель η морфизма φ, нормального относительно v, нормален относительно произвольного $v' \in \varphi\backslash\varphi v$ (т.е. $\eta\backslash\eta v' = G^\eta v'$), то равенство множеств частных $\eta\backslash\eta v = \eta'\backslash\eta' v$ эквивалентно равенству групп изотропии $G^\eta = G^{\eta'}$. □

Предложение 2.6.4. *Пусть $v = \psi w$, $\chi = \varphi\psi$ и $u = \varphi v = \chi w$, где $A\varphi B$, $B\psi C$ и CwW произвольные морфизмы.*

(а) Если морфизм φ сепарабелен относительно ψ (в χ), то он сепарабелен и относительно v (в u).

б) Обратно, если морфизм φ сепарабелен относительно v (в морфизме u), то он сепарабелен и относительно ψ (в χ) при условии (1) пар. 1.

Доказательство. следует из предложений 2.1.4 и 2.1.1. □

Предложение 2.6.5. *Если композиция χ морфизмов $A\varphi B$ и $B\psi C$ сепарабельна относительно морфизма CwW, то морфизм ψ сепарабелен относительно w, а φ сепарабелен относительно $v = \psi w$.*

Доказательство. Пусть $\psi = \xi_1\eta_1 = \xi_2\eta_2$ и $\eta_1\backslash\eta_1 w = \eta_2\backslash\eta_2 w$. Тогда $\chi = (\varphi\xi_1)\eta_1 = (\varphi\xi_2)\eta_2$ и в силу сепарабельности χ относительно w имеем $\eta_2 = \sigma\eta_1$ для подходящего изоморфизма σ. Если же $\varphi = \xi_1\eta_1 = \xi_2\eta_2$ и $\eta_1\backslash\eta_1 v = \eta_2\backslash\eta_2 v$, то $\eta_1\psi\backslash\eta_1\psi w = \eta_2\psi\backslash\eta_2\psi w$ и опять ввиду сепарабельности χ относительно w имеем $\eta_2\psi = \sigma\eta_1\psi$ для некоторого изоморфизма σ. Сокращая на ψ, получаем $\eta_2 = \sigma\eta_1$. □

Предложение 2.6.6. *Пусть морфизм $B\psi C$ сепарабелен относительно морфизма CwW, а морфизм $A\varphi B$ регулярен и сепарабелен относительно композиции $v = \psi w$. Тогда морфизм $\chi = \varphi\psi$ сепарабелен относительно морфизма w, если выполняются следующие условия:*

(i) для любого правого делителя $X\eta C$ морфизма χ существуют композит $Y\sigma C$ и пересечение $Z\tau C$ подобъектов η и ψ, причем изотропная группа $G^{\tau w}$ порождается изотропными группами $G^{\eta w}$ и $G^{\psi w}$;

(ii) решетка подобъектов объекта C модулярна.

Доказательство. Пусть $\chi = \xi_1\eta_1 = \xi_2\eta_2$ и $\eta_1\backslash\eta_1 w = \eta_2\backslash\eta_2 w$. Пусть $Y_i\sigma_i C$ – композиты морфизма ψ с η_i $(i = 1, 2)$. Согласно лемме 2.6.2

$$\sigma_1\backslash\sigma_1 w = \psi\backslash\psi w \cap \eta_1\backslash\eta_1 w = \psi\backslash\psi w \cap \eta_2\backslash\eta_2 w = \sigma_2\backslash\sigma_2 w.$$

Следовательно, по определению сепарабельности ψ относительно w подобъекты σ_1 и σ_2 равны.

Теперь пусть $Z_i\tau_i C$ – пересечение η_i с ψ $(i = 1, 2)$. Из $\eta_1\backslash\eta_1 w = \eta_2\backslash\eta_2 w$ легко вывести, что $G^{\eta_1 w} = G^{\eta_2 w}$. Но тогда $G^{\tau_1 w} = G^{\tau_2 w}$, поскольку согласно условию (i) они порождаются предыдущими изотропными группами и группой $G^{\psi w}$. В силу сепарабельности φ относительно ψw подобъекты τ_1 и τ_2 совпадают.

Итак, композиты (объединения) и пересечения подобъектов η_1 и η_2 объекта C с подобъектом ψ совпадают. Вследствие модулярности решетки подобъектов объекта C мы имеем равенство $\eta_i = \eta_2$. □

Предложение 2.6.7. *Пусть композиции морфизмов $A\varphi_i B_i$ и $B_i v_i W$ равны и $(i = 1, 2)$, CwW – композит v_1 и v_2, $B_i\psi_i C$ – ассоциированные с композитом морфизмы. Из сепарабельности морфизма φ_1 относительно морфизма v_1 следует сепарабельность морфизма ψ_2 относительно w, если* *(i) множество $\mathcal{P}_\chi(C)$ подобъектов объекта C, содержащих подобъект $\chi = \varphi_i\psi_i$, является модулярной решеткой с композитами в качестве объединений;*

(ii) каждый морфизм $v_1' \in \varphi_1\backslash u$ делится на ψ, причем существует морфизм $w' \in \psi_1\backslash v_1'$, принадлежащий $\psi_2\backslash v_2$.

Условие (ii) выполняется, если морфизм φ_1 регулярен относительно v_1 и $G^u = G^{v_1}G^{v_2}$.

Доказательство. Пусть $\psi_2 = \tau\zeta = \tau'\zeta'$ и $\zeta\backslash\zeta w = \zeta'\backslash\zeta' w$. Рассмотрим пересечения $\kappa = \eta\zeta = \rho\psi_1$ и $\kappa' = \eta'\zeta' = \rho'\psi_1$ подобъектов ζ и ζ' с ψ_1 и морфизмы ξ и ξ', однозначно определяемые равенствами

$$\xi\rho = \xi'\rho' = \varphi_1, \quad \xi\eta = \varphi_2\tau, \quad \xi'\eta' = \varphi_2\tau'.$$

В силу модулярности решетки $\mathcal{P}_\chi(C)$ имеем

$$\kappa \cup \psi_2 = (\zeta \cap \psi_1) \cup \psi_2 = \zeta \cap (\psi_1 \cup \psi_2) = \zeta \cap 1_C = \zeta,$$

причем согласно (i), ζ является композитом κ и ψ_2. Множества частных $\rho\backslash\rho v_1$ и $\rho'\backslash\rho' v_1$ равны, потому что они соответственно равны совпадающим множествам $\psi_1(\zeta\backslash\zeta w)$ и $\psi_1(\zeta'\backslash\zeta' w)$. Включение $\psi_1(\zeta\backslash\zeta w) \subset \rho\backslash\rho v_1$ очевидно.

Обратно, возьмем произвольный $v' \in \rho\backslash\rho v_1$. Согласно (ii) $v_1' = \psi_1 w'$ с $w' \in \psi_2\backslash v_2$. Поэтому

$$\eta(\zeta w') = \rho\psi_1 w' = \rho\psi_1 w = \eta(\zeta w), \quad \tau(\zeta w') = \psi_2 w' = \psi_2 w = \tau(\zeta w).$$

Так как пара морфизмов, ассоциированная с композитом, является плотной, получаем, что $\zeta w' = \zeta w$, t.e. $w' \in \zeta\backslash\zeta w$.

Итак, $\xi(\rho v_1) = \xi'(\rho' v_1)$ и $\rho\backslash\rho v_1 = \rho'\backslash\rho' v_1$. Согласно сепарабельности φ относительно v_1 подобъекты κ и κ' (т.е. пересечения ζ и ζ' с ψ_1) совпадают. Объединения ζ и ζ' с ψ_1 лежат в объединении ψ_2 с ψ_1, поэтому равны тотальному подобъекту 1_C. Вследствие модулярности решетки $\mathcal{P}_\chi(C)$, подобъекты ζ и ζ' равны. Сепарабельность ψ_2 относительно w доказана.

Проверим последнее утверждение предложения. По определению регулярности имеем $v_1' = v_1\omega = \psi_1 w\omega$, где $\omega \in G^u$. Следовательно, $\omega = \omega_1\omega_2$ с компонентами $\omega_i \in G^{v_i}$. Тогда $v_1' = \psi_1(w\omega_2)$ и $\psi_2 w\omega_2 = v_2\omega_2 = v_2$, т.е. $w' = w\omega_2 \in \psi_2\backslash v_2$. $\square$

Следствие 2.6.8. *В условиях (i), (ii) предложения 2.6.7 и* $G^u = G^{v_1}G^{v_2}$, *к сепарабелен относительно* w, *если* φ_2 *регулярен и сепарабелен относительно* v_2.

Доказательство. Достаточно применить предложения 2.6.7 и 2.6.6. □

В заключение этого параграфа отметим, что введенное общекатегорное понятие сепарабельности морфизма $A\varphi B$ в морфизме AuW в категории полей совпадает с классическим понятием сепарабельности алгебраического расширения полей φ, если в качестве u взять, например, алгебраическое замыкание поля A.

Действительно, сепарабельность конечного расширения полей $A\varphi B$ можно определить условием равенства степени этого расширения и его сепарабельной степени ([121], гл. 7, пар.4). Ввиду мультипликативности степени и сепарабельной степени расширения получаем, что, если в разложении морфизма $\varphi = \xi\eta\zeta$ расширение η чисто несепарабельно, то η является изоморфизмом.

Обратно, если φ сепарабельно в категорном смысле, то, взяв его разложение в композицию чисто несепарабельного и сепарабельного морфизмов (в классическом смысле), получим, что чисто несепарабельный морфизм является изоморфизмом. Здесь мы пользуемся очевидным фактом, что классическое и категорное понятия чистой несепарабельности полностью адекватны.

2.7 Морфизмы Галуа

Морфизм $A\chi C$ называется морфизмом Галуа относительно CwW (или в $u = \chi w$), если он регулярен, нормален и сепарабелен относительно w (соотв., в u). Определяемый морфизмом Галуа подобъект объекта C называется подобъектом Галуа.

Группа изотропии G^χ морфизма (подобъекта) Галуа χ называется группой Галуа. Из предложений 2.2.6 (a), 2.3.5 и 2.6.5 следует, что любой морфизм $B\psi C$ делящий χ справа, также будет морфизмом Галуа. Соответствующие им подгруппы группы Галуа называются подгруппами Галуа.

Предложение 2.7.1. *Если $A\chi C$ – морфизм Галуа и композит любой пары морфизмов в C существует, то любой правый делитель $B\psi C$ морфизма χ есть стабилизация по своей группе Галуа G^{ψ}.*

Доказательство. Поскольку каждый морфизм ψ стабилен относительно своей группы изотропии G^{ψ}, надо только проверить, что любой морфизм $X\xi C$ стабильный относительно G^{ψ}, делится на ψ. Пусть $B_{\xi}\psi_{\xi}C$ – композит морфизмов ψ и ξ, а $B\psi'_{\xi}B_{\xi}$ и $X\xi' B_{\xi}$ – ассоциированные с ним морфизмы.

Согласно предложению 1.1.11 главы 1 имеем $G^{\psi_{\xi}} = G^{\xi} \cap G^{\psi} = G^{\psi}$. Так как морфизм χ регулярен, нормален и сепарабелен относительно w, в силу пар. 3 и предложения 2.6.1 существует изоморфизм σ такой, что $\psi_{\xi} = \sigma\psi$. Поэтому $\xi = \xi'\psi_{\xi} = \xi'\sigma\psi$. □

Следствие 2.7.2. *Пусть χ – морфизм Галуа, $\mathcal{P}_{\chi}(C)$ – множество всех подобъектов объекта C, содержащих подобъект χ, $\mathcal{P}_{Gal}(G)$ – множество всех подгрупп Галуа группы Галуа $G = G^{\chi}$. Пара отображений*

(i) $\mathcal{P}_{\chi}(C) g \mathcal{P}_{Gal}(G), \quad \psi g = G^{\psi}$,

(ii) $\mathcal{P}_{Gal}(G) h \mathcal{P}_{\chi}(C), \quad Hh =$ *стабилизация* C *по* H

образует соответствие Галуа, причем $\mathcal{P}_{\chi}(C)$, $\mathcal{P}_{Gal}(G)$ являются множествами замкнутых относительно этого соответствия Галуа элементов. Поэтому $\mathcal{P}_{\chi}(C)$ биективно $\mathcal{P}_{Gal}(G)$.

Доказательство. Прежде всего, стабилизации по подгруппам Галуа H группы G существуют согласно доказанному предложению. То, что отображения (i) и (ii) образуют соответствие Галуа, является общим фактом и доказано в главе 1. Наконец, $\mathcal{P}_{Gal}(G)$ – множество замкнутых автоморфизмов по определению и свойству квазиобратности соответствий Галуа, а $\mathcal{P}_{\chi}(C)$ – множество замкнутых морфизмов согласно доказанному предложению. □

Предложение 2.7.3. *Пусть $A\chi C$ – морфизм Галуа относительно CwW (в $u = \chi w$), $A\varphi$ – его левый делитель и $\psi \in \varphi\backslash\chi$.*

(а) Если φ – морфизм Галуа относительно $v = \psi w$ (в u), то φ – морфизм Галуа и относительно ψ (в χ).

(б) Если φ – морфизм Галуа относительно ψ (в χ), то он является морфизмом Галуа относительно v (в u) тогда и только тогда, когда выполняется условие (1) пар. 1.

Доказательство. Из нормальности φ относительно ψ следует его нормальность относительно v согласно предложению 2.3.3 (а). Согласно предложению 2.3.3 (б), из нормальности φ относительно v следует выполнение условия (1) пар. 1, поэтому согласно предложению 2.6.4 (б) морфизм φ сепарабелен относительно ψ, если он сепарабелен относительно v. Регулярность φ относительно ψ устанавливается на основании предложения 2.3.2.

Обратно, из сепарабельности φ относительно ψ следует его сепарабельность относительно v согласно предложению 2.6.4 (а). Поскольку φ регулярен относительно ψ, предполагается выполнение условия (1) пар. 1 и $\chi = \varphi\psi$ регулярен относительно v. В силу предложения 2.2.8 морфизм φ регулярен относительно v. Наконец, на основании предложения 2.3.3 (б) при нормальности φ относительно ψ необходимым и достаточным условием нормальности φ относительно v является условие (1) пар. 1. □

Предложение 2.7.4. *Пусть $A\chi C$ – морфизм Галуа относительно w (в $u = \chi w$) и $\chi = \varphi\psi$.*

(а) Если φ – морфизм Галуа относительно $v = \psi w$ (v u), то группа Галуа G^{ψ} является нормальным делителем группы Галуа G^{χ}.

(б) Если G^{ψ} – нормальный делитель группы G^{χ}, то φ – морфизм Галуа относительно v (в u) при условии выполнения свойств (0) и (1) п. 1.4 и существования композитов любых двух морфизмов в объект C.

Доказательство. Согласно предложению 2.7.3, если φ – морфизм Галуа относительно v, то φ – морфизм Галуа относительно ψ, а при условии (1) пар. 1 верна и обратная импликация. Утверждение (а) немедленно следует из результатов параграфа 3.

Обратно, на основании результатов пар. 3 и предложения 2.7.1 следует совпадение

ψ со стабилизацией по своей изотропной группе, и из нормальности подгруппы G^{ψ} в G^{χ} вытекает нормальность φ относительно ψ, если только φ регулярно относительно ψ. На основании предложения 2.2.6 (б) и условия (0) пар.1 получаем, что морфизм φ регулярен относительно v. Регулярность и сепарабельность φ относительно ψ следуют соответственно из предложений 2.3.2, 2.6.5 и 2.6.4 (б) ввиду условия (1) пар. 1. □

Замечание 2.7.5. Если χ нормально относительно w, то условие (0) влечет условие (1) пар. 1.

Пусть v' произвольный морфизм из $\varphi\backslash u$. Согласно условию (0), существует морфизм w' такой что $v' = \psi w'$. При этом $\chi w' = \varphi\psi w' = u = \chi w$ и в силу нормальности χ относительно w имеем $w' = \gamma w$, где γ – автоморфизм. Отсюда $v' = \psi\gamma w$. Отметим, что условие (0) похоже на „свойство продолжения изоморфизмов“ классической теории Галуа.

Соберем полученные результаты в следующую теорему.

Теорема 2.7.6. *Пусть $A\chi C$ – морфизм Галуа относительно CwW (в $u = \chi w$) и $\chi = \varphi\psi$ – произвольное разложение. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) Морфизм ψ является морфизмом Галуа относительно w (в $v = \psi w$);

(б) Если существует композит любых двух морфизмов в объекте C, то существуют стабилизации по всем подгруппам Галуа H группы Галуа G^{χ} и пара отображений из следствия **2.7.2** *составляет соответствие Галуа с множествами замкнутых элементов $\mathcal{P}_{\chi}(C)$ и $\mathcal{P}_{Gal}(G)$, которые* a posteriori *биективны.*

(в) Если морфизм φ является морфизмом Галуа относительно v (в u), то группа Галуа G^{ψ} является нормальным делителем группы Галуа G^{χ}. Обратная импликация выполняется в случае, когда для всяких двух морфизмов в объект C существует композит и каждый морфизм множества частных $\varphi\backslash u$ делится на ψ. При этом группа Галуа G^{φ} изоморфна факторгруппе $G^{\chi}\backslash G^{\psi}$.

2.8 Регулярные замыкания

Всякий изоморфизм (более общо, любой эпиморфизм, а при наших ограничениях на рассматриваемую категорию - каждый биморфизм) $A\varphi B$ чисто несепарабелен относительно произвольного морфизма $B\psi C$, следовательно, в любом морфизме $\chi = \varphi\psi$.

Определение 2.8.1. Объект A называется регулярно замкнутым, если из регулярности морфизма $A\varphi B$ относительно некоторого морфизма $B\varphi C$ (или в морфизме $\chi = \varphi\psi$) следует, что φ – изоморфизм.

Морфизм AuW называется регулярным замыканием объекта A, если

(i) объект W регулярно замкнут;

(ii) морфизм $A\varphi B$ регулярен относительно морфизма $B\psi C$ (в $\chi = \varphi\psi$) тогда и только тогда, когда $u = \chi w$ делится на χ.

Отметим, что в силу условия (ii) каждый левый делитель морфизма u регулярен в нем.

В случае существования, регулярное замыкание объекта A определяется однозначно, с точностью до изоморфизма объекта W. Действительно, предположим, что AuW и $Au'W'$ – регулярные замыкания объекта A. Тогда согласно (ii) u' регулярно в себе, следовательно, делит u слева. Аналогично u делит слева u'. Частные $\sigma \in u'\backslash u$ и $\sigma' \in u\backslash u'$ в композиции дают элемент изотропной полугруппы $S^u = u\backslash u$, ... совпадает с изотропной группой G^u ввиду регулярности u в u. Отсюда нетрудно вывести, что σ и σ' – изоморфизмы. С другой стороны, очевидно, что если AuW – регулярное замыкание объекта A, а $W\sigma W'$ – изоморфизм, то и $u' = u\sigma$ – регулярное замыкание объекта A.

Пример. *Рассмотрим категорию, объектами которой служат поля, а морфизмами - алгебраические расширения полей. В этой категории любой объект имеет регулярное замыкание, совпадающее с алгебраическим замыканием поля (точнее, с естественным морфизмом данного поля в его алгебраическое замыкание).*

Предположим, что объект A обладает регулярным замыканием. Тогда всякий морфизм

$A\varphi B$ регулярный в каком-нибудь морфизме $A\chi C$, регулярен в алгебраическом замыкании AuW, т.е. существует универсальный морфизм, в котором регулярны все регулярные в каком-нибудь морфизме морфизмы из A. Поэтому можно ввести (безотносительное) понятие регулярности морфизма $A\varphi B$, всегда имея в виду его регулярность в регулярном замыкании объекта A.

Отметим, что это определение корректно, потому что не зависит от выбора регулярного замыкания объекта A. Более того, аналогично можно ввести (безотносительные) понятия нормальности и сепарабельности морфизма $A\varphi B$.

Предложение 2.8.1. *Пусть AuW – регулярное замыкание объекта A, $A\chi C$ – произвольный регулярный морфизм, $A\varphi B$ – левый делитель морфизма χ. Тогда*

(а) морфизм φ регулярен относительно любого морфизма $v \in \varphi\backslash u$;

(б) для любого морфизма $\psi \in \varphi\backslash\chi$ выполняется условие (O) п. 1.4, т. е. каждый морфизм $v \in \varphi\backslash u$ делится на ψ;

(в) каждый морфизм $\psi \in \varphi\backslash\chi$ регулярен относительно всякого морфизма $w \in \chi\backslash u$ или в любом морфизме $v \in \varphi\backslash u$.

Доказательство. (а) Морфизм φ делит χ и, следовательно, u слева. Значит он регулярен согласно условию (ii) определения регулярного замыкания.

(б) следует из предложения 2.2.6 (б) и п. (а) настоящего предложения.

(в) есть непосредственное следствие предложения 2.2.6 (а). □

Предложение 2.8.2. *Если объект A обладает регулярным замыканием AuW, $A\varphi B$ – регулярный морфизм, то любой морфизм $BvW \in \varphi\backslash u$ будет регулярным замыканием объекта B при условии, что B обладает регулярным замыканием.*

Доказательство. Пусть $Bv'W'$ – регулярное замыкание B. Согласно предложению 2.8.1 (в) морфизм v регулярен в себе. Поэтому согласно (ii) определения регулярного замыкания v делит v'. Аналогично морфизму v частное $\sigma \in v\backslash v'$ регулярно в себе. По определению регулярной замкнутости объекта W это возможно, только если σ – изоморфизм. Поэтому $v = v'\sigma^{-1}$ – регулярное замыкание объекта B. □

Замечание 2.8.3. Условие (i) выполняется без предположения существования регулярного замыкания объекта B.

Теорема 2.7.6 принимает вполне классический вид, если предположить, что объект A обладает регулярным замыканием, а объект C – композитами подобъектов. Таким образом, в классическом виде теорема Галуа верна для произвольных категорий с регулярными замыканиями и композитами подобъектов.

Глава 3

О нормализации мономорфизмов

В этой главе вводится понятие нормализации мономорфизма в общих категориях, устанавливается условие его существования. Доказывается, что степень сепарабельности мономорфизма $A\varphi B$ в мономорфизме AuW равна индексу группы изотропии его нормализации $A\chi C$ в u относительно группы изотропии мономорфизма $\psi \in \varphi\backslash\chi$.

Всюду в этой главе все морфизмы считаются моническими. Такие категории можно получить, если из произвольной категории отбросить все морфизмы, не являющиеся мономорфизмами.

3.1 Определение нормализации и ее простейшие свойства

Предложение 3.1.1. *Если морфизм $A\chi C$ нормален в морфизме AuW, то все элементы S^χ обратимы, т. е. изотропная полугруппа S^χ совпадает с изотропной группой G^χ.*

Для произвольного $\gamma \in S^\chi$ имеем $u = \chi w = \chi\gamma w$ при некотором CwW. По определению нормальности χ в u существует автоморфизм γ' такой, что $\gamma w = \gamma' w$. Отсюда $\gamma = \gamma'$ в силу мономорфности w.

Далее предполагается, что все левые делители морфизма AuW регулярны в нем (стандартная ситуация, когда AuW – регулярное замыкание объекта A). В частности, u регулярно в себе. Тогда u также нормально в u, следовательно, $S^u = G^u$.

Определение 3.1.1. *Нормальным замыканием* или *нормализацией* морфизма $A\varphi B$ в морфизме AuW называется морфизм $A\chi C$, нормальный в u, делящийся на φ и делящий всякий другой морфизм, удовлетворяющий этим двум условиям.

Предложение 3.1.2. *В случае существования нормализация $A\chi C$ морфизма $A\varphi B$ в AuW определяется однозначно с точностью до изоморфизма объекта C.*

Пусть $A\chi' C'$ также является нормализацией φ в u. Тогда $\chi' = \chi\sigma'$ и $\chi = \chi'\sigma$ при подходящих морфизмах $C\sigma' C'$ и $C'\sigma C$. Подставляя значение χ' из первого равенства во второе, получаем $\chi = \chi\sigma'\sigma$, откуда в силу нормальности χ согласно предложению 3.1.1 $\sigma'\sigma \in G^\chi$. Легко проверяется, что если композиция мономорфизмов обратима, то сами мономорфизмы обратимы.

Подобъект CwW называется инвариантным относительно эндоморфизма $W\omega W$, если w перестановочен с ω, т. е. $w\omega = \gamma w$ при подходящем эндоморфизме γ объекта C.

Предложение 3.1.3. *Морфизм $A\chi C$ нормален в AuW тогда и только тогда, когда существует G^u-инвариантный подобъект CwW такой, что $u = \chi w$.*

По определению, если χ нормально в u, то морфизмы из множества частных $\chi\backslash u$ отличаются на автоморфизм объекта C, т. е. определяют единственный подобъект w объекта W, удовлетворяющий равенству $u = \chi w$. Из свойства единственности такого подобъекта следует его инвариантность относительно всех автоморфизмов из G^u.

Обратно, пусть для χ существует G^u-инвариантный подобъект $w \in \chi\backslash u$. Тогда в силу регулярности любого левого делителя в u для произвольного $w' \in \chi\backslash u$ имеем $w' = w\omega$ с $\omega \in G^u$. Ввиду G^u-инвариантности w при подходящем эндоморфизме $C\gamma C$ имеем $\gamma w = w = \omega$. Аналогично $w\omega^{-1} = \gamma' w$, причем $\gamma' = \gamma^{-1}$, ибо $\gamma'\gamma w = w$, $\gamma\gamma' w = w$.

Из доказанного, в частности, следует, что G^u-инвариантный подобъект $w \in \chi\backslash u$ определяется однозначно.

Из определения нормализации немедленно следует

Предложение 3.1.4. *Левый делитель $A\varphi B$ морфизма AuW имеет нормализацию в u тогда и только тогда, когда семейство всех G^u-инвариантных подобъектов $C'w'W$, ассоциированных с делящимися на φ и нормальными в u морфизмами $A\chi'C$, имеет наименьший элемент CwW. При этом нормализация φ в u представляется любым морфизмом $\chi \in u\backslash w$.*

3.2 Критерии существования нормализации

Теорема 3.2.1. *Для существования нормализации в морфизме AuW его левых делителей достаточно, чтобы в ординале (упорядоченном классе) $\mathcal{P}_u(W)$ подобъектов объекта W, содержащих подобъект u, были определены пересечения произвольных семейств G^u-инвариантных подобъектов.*

Поскольку семейство G^u-инвариантных подобъектов из $\mathcal{P}_u(W)$ не пусто (ибо содержит тотальный подобъект 1_W), доказательство теоремы сводится к предложению 3.1.4 при условии, что

(i) для данного морфизма $A\varphi B$ пересечение CwW всех G^u-инвариантных подобъектов C_iw_iW, левые частные $\chi_i u\backslash w_i$, по которым делятся на φ, само G^u-инвариантно;

(ii) $\chi \in u\backslash w$ делится на φ.

G^u-инвариантность w следует из нижеприводимого общего утверждения.

Предложение 3.2.2. *Семейство $\mathcal{P}^G(W)$ подобъектов объекта W, инвариантных относительно действия заданной группы G автоморфизмов объекта W, замкнуто относительно пересечений и объединений подобъектов.*

Справедливость предложения 3.2.2 очевидна, если учесть, что при изотонном преобразовании класса подобъектов $\mathcal{P}(W)$ объекта W

$$\mathcal{P}(W)\omega_*\mathcal{P}(W), \;\; w\omega_* = w \circ \omega,$$

ассоциированном с автоморфизмом $W\omega W$, образы пересечения и объединения подобъектов совпадают соответственно с пересечением и объединением их образов. Этот факт легко устанавливается с использованием отображения ω_*^{-1}.

Проверим, что χ делится на φ.

Для произвольного $v \in \varphi\backslash u$ и любого i имеем $\varphi\varphi_i w_i = \varphi v$. В силу регулярности φ в u найдется автоморфизм $\omega_i \in G^u$ такой, что $v = \psi_i w_i \omega_i$. Подставляя это значение v в предыдущее равенство и используя нормальность χ_i в u, найдем автоморфизм γ_i, удовлетворяющий равенству $\gamma_i w_i = w_i \omega_i$. Значит $v = \psi_i \gamma_i w_i$, т. е. $v \leq w_i$, при всех i. Следовательно, $v \leq w$ и $v = \psi w$. Из равенств

$$\chi w = u = \varphi v = \varphi\psi w$$

заключаем, что $\chi = \varphi\psi$.

Согласно предложению 3.2.2 в случае существования пересечений в ординале $\mathcal{P}_u(W)$ его подкласс $\mathcal{P}_u^G(W)$ при $G = G^u$ образует систему замыканий и нормализация любого левого делителя $A\varphi B$ морфизма AuW в u задается как $\chi \in u\backslash w$, где w – замыкание произвольного подобъекта $w \in \varphi\backslash u$ в указанной системе замыканий.

Подобъекты CwW и $Cw'W$ называются сопряженными, если $w' = w\omega$, $\omega \in \operatorname{Aut} W$, и G-сопряженными, если ω принадлежит подгруппе G группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} W$.

Предложение 3.2.3. *Если кратный $A\varphi B$ морфизм $A\chi C$ нормален в AuW, то любой морфизм $v \in \varphi\backslash u$ делится на каждый морфизм $w \in \chi\backslash u$.*

Пусть $\psi \in \varphi\backslash\chi$. Тогда $u = \varphi v = \varphi\psi w$ и по регулярности φ в u имеем $v = \psi w\omega$ с $\omega \in G^u$. В силу нормальности χ в u существует автоморфизм γ такой, что $w\omega = \gamma w$. Поэтому $v = \psi\gamma w$.

Следствие 3.2.4. *Подобъект w содержит объединение всех подобъектов $v \in \varphi\backslash u$, которые в силу регулярности φ в u сопряжены друг к другу.*

Предложение 3.2.5. *Объединение w всех подобъектов $v \in \varphi\backslash u$ определяет морфизмы $\chi \in u\backslash w$, нормальные в u.*

Согласно предложению 3.1.3 достаточно показать, что подобъект w G^u-инвариантен. Так как все подобъекты $v \in \varphi\backslash u$ G^u-сопряжены, $w = \cup_{\omega' \in G^u} v\omega'$ и для любого $\omega \in G^u$

имеем

$$w\omega_* = \cup_{\omega' \in G^u} (v\omega')\omega_* = w.$$

Теорема 3.2.6. *Нормализация в морфизме AuW его произвольного левого делителя существует, если $\mathcal{P}_u(W)$ полная решетка относительно объединений.*

К соотношению теорем 3.2.1 и 3.2.6 заметим, что поскольку ординал $\mathcal{P}_u(W)$ имеет наименьший элемент u и наибольший элемент 1_W, следующие условия для него эквивалентны:

(i) $\mathcal{P}_u(W)$ – полная решетка по пересечениям;

(ii) $\mathcal{P}_u(W)$ – полная решетка по объединениям;

(iii) $\mathcal{P}_u(W)$ – полная решетка.

В случае, когда ординал $\mathcal{P}_u(W)$ – конечный (в частности, если конечна изотропная группа G^u), слово "полная“ не несет нагрузки.

3.3 Об одном применении нормализаций

Укажем одно применение нормализаций.

Теорема 3.3.1. *Если $A\chi C$ – нормализация $A\varphi B$ в AuW и ψ – произвольный элемент $\varphi\backslash\chi$, то степень сепарабельности морфизма φ в u равна индексу изотропной группы G^ψ в изотропной группе G^χ:* $\operatorname{sep}_u \varphi = (G^\chi : G^\psi)$

По определению степень сепарабельности φ в u равна мощности множества левых частных $\varphi\backslash u$. Зафиксируем некоторый морфизм $w \in \chi\backslash u$. Ввиду регулярности φ в u для любого $v \in \varphi\backslash u$ существует автоморфизм $w \in G^u$ такой, что $v = \psi w\omega$. Морфизм w перестановочен с ω в силу нормальности χ в u, так что $w\omega = \gamma w$ с $\gamma \in \operatorname{Aut} C$. Поэтому множество $\varphi\backslash u$ исчерпывается морфизмами $\psi\gamma w$, где вследствие мономорфности $w\gamma \in G^\chi$. Для того, чтобы указанные композиции были попарно различны, необходимо и достаточно, чтобы γ пробегало множество левых классов смежности $G^\psi\backslash G^\chi$.

Следствие 3.3.2. *Степень сепарабельности нормального морфизма равна мощности его изотропной группы.*

Конструкция нормализации полезна и в двойственной ситуации, когда вместо мономорфизмов рассматриваются эпиморфизмы категории.

Глава 4

Appendix 1. О единственности несократимого разложения объекта на неразложимые составляющие

Главный результат – основная теорема пар. 6 о единственности несократимого разложения объекта в объединение конечного числа неприводимых подобъектов в категории с нулевыми морфизмами при некоторых дополнительных условиях и следствие из нее, охватывающие не только случай прямой суммы подобъектов и изоморфизма соответствующих неприводимых компонент (пар. 7), но и изогению объекта произведению простых подобъектов, как в случае абелевых многообразий ([42], теорема Пуанкаре о полной приводимости и следствия из нее).

4.1 Решетка подобъектов

Морфизм из объекта X в объект Y будем обозначать $X\varphi Y$, а композицию морфизмов $X\varphi Y$ и $Y\psi Z$ – $\varphi \circ \psi$. Если $\chi = \varphi \circ \psi$, то будем говорить,что χ делится иа φ слева и на ψ справа.

Под подобъектом $(K\kappa X]$ подразумевается класс эквивалентности мономорфизма $K\kappa X$, под факторобъектом $[X\mu M)$ – класс эквивалентности эпиморфизма $X\mu M$. Классы всех подобъектов $\mathbf{P}(X)$ (и соответственно факторобъектов $\mathbf{Q}(X)$) объекта X частично упорядочены с отношением порядка

$$(K\kappa X] \leq (L\lambda X] \Leftrightarrow \kappa = \rho \circ \lambda.$$

В частично упорядоченных классах $\mathbf{P}(X)$ и $\mathbf{Q}(X)$ существуют наибольшие элементы – тотальный подобъект и, соответственно, факторобъект, задаваемые тождественным морфизмом $X1_X X$.

Будем говорить, что X – объект с конечными (соответственно, полными) объединениями и (или) пересечениями подобъектов, если $\mathbf{P}(X)$ – решетка по конечным (соответ., любым) объединениям и (или) пересечениям. Аналогично определяется объект с конечными (соответ., полными) объединениями и (или) пересечениями факторобъектов.

Сквозной морфизм коамальгамы (т. е. расслоенного произведения) семейства подобъектов $(K_i\kappa_i X], i \in I$ задает их пересечение. Поэтому в категории с конечными (соотв., произвольными) коамальгамами любой объект X является объектом с конечными (соотв., произвольными) пересечениями. Более того, в категории с коамальгамами для всякого объекта X решетка $\mathbf{P}(X)$ – полная. Это простое следствие теоремы 6 на с. 20 [6].

Образ подобъекта $(\kappa]$ относительно морфизма $X\varphi Y$ есть наименьший делящий $\kappa \circ \varphi$ подобъект $L\lambda Y$, обозначим его $(\kappa]\varphi_{\mathbf{P}}$. Если он существует для произвольного подобъекта $(\kappa]$(в частности, в категории с коамальгамами), определено изотонное отображение образа $\mathbf{P}(X)\varphi_{\mathbf{P}}\mathbf{P}(Y)$. В этом случае корректно определен „функтор подобъектов“ $\mathbf{P}$, сопоставляющий объекту X его класс подобъектов $\mathbf{P}(X)$, а морфизму $X\varphi Y$ – отображение образа $\mathbf{P}_\varphi$.

Образ тотального подобъекта $(1_X]$ относительно $X\varphi Y$ называется *образом* морфизма φ. Морфизм с тотальным образом называется *простым*. Эквивалентно, простым называется морфизм, любой правый мономорфный делитель которого – изоморфизм. Очевидно, правый делитель простого морфизма – простой морфизм.

Морфизм β называется *дополнительным* к образу $(\lambda]$ подобъекта $(\kappa]$ относительно морфизма φ, если $\beta \circ \lambda = \kappa\varphi$. Дополнительный морфизм к образу определяется однозначно и всегда простой. Более того, в категории с конечными коамальгамами:

(а) дополнительный морфизм делится на любой простой морфизм, делящий $\kappa \circ \varphi$ слева;

(б) если $\beta \circ \lambda = \kappa\varphi$, где β – простой морфизм, а λ – мономорфизм, то подобъект $(\lambda]$ является образом подобъекта $(\kappa]$ относительно морфизма φ.

Прообраз подобъекта $L\lambda Y$ относительно морфизма $X\varphi Y$ есть наибольший из подобъектов $K\kappa X$, удовлетворяющих равенству $\beta \circ \lambda = \kappa\varphi$ при некотором морфизме β, он обозначается $(\lambda]\varphi^{\mathbf{P}}$. Если (κ, β) – коамальгама пары (φ, λ), то, как нетрудно проверить, $(\kappa]$ будет прообразом подобъекта $(\lambda]$ относительно морфизма φ.

Если прообразы подобъектов относительно морфизма $X\varphi Y$ существуют (в частности, в категории с конечными коамальгамами), определено изотонное *отображение прообраза* $\mathbf{P}(Y)\varphi^{\mathbf{P}}\mathbf{P}(X)$. При этом сопоставления $X \mapsto \mathbf{P}(X), \varphi \mapsto \varphi^{\mathbf{P}}$ определяют функтор прообраза $\mathbf{P}^*$.

Простой морфизм $L\lambda Y$ называетсл *универсально простым*, если при любом морфизме $X\varphi Y$ морфизм $K\kappa X$ из пары (κ, β), задающей коамальгаму пары (φ, λ), является простым. При этом и λ – универсально простой морфизм.

Предложение 4.1.1. *(а) Для произвольных морфизма $X\varphi Y$ и подобъектов $(\kappa] \in \mathbf{X}$ и $(\lambda] \in \mathbf{Y}$ справедливы соотношения*

$$(\kappa]\varphi_{\mathbf{P}}\varphi^{\mathbf{P}} \geq (\kappa], \;\; (\lambda] \geq (\lambda]\varphi^{\mathbf{P}}\varphi_{\mathbf{P}}.$$

(б) В категории с конечными коамальгамами

$(\nu]\varphi_{\mathbf{P}}\varphi^{\mathbf{P}} = (\kappa]$, если φ – мономорфизм;

$(\nu]\varphi_{\mathbf{P}}\varphi^{\mathbf{P}} = (\nu]$, если φ – универсально простой морфизм.

Предложение 4.1.2. *Пусть $(K_i\kappa_i X], i \in I$ – произвольное семейство подобъектов, $X\varphi Y$ – морфизм, для которого определено отображение прообраза $\varphi^{\mathbf{P}}$, $(L_i\lambda_i Y]$ – образ подобъекта $(\kappa_i]$ относительно φ, $K\kappa X$ – объединение семейства подобъектов $(K_i\kappa_i X], i \in I$. Тогда образ подобъекта $(\kappa]$ относительно морфизма φ существует, если и только если* *существует объединение семейства подобъектов $(\lambda_i], i \in I$, при этом они совпадают. (Ср. [70], с. 72).*

Доказательство. Пусть $(L\lambda Y]$ – образ подобъекта $(\kappa]$. Из соотношений $\kappa_i \leq \kappa$ следует, что $\lambda_i \leq \lambda$. Рассмотрим подобъект $(L'\lambda' Y]$, содержащий все $(\lambda_i], i \in I$. Возьмем его прообраз $(\kappa']$ относительно φ. Тогда в силу предложения 4.1.1 и изотонности отображения прообраза имеем $(\kappa_i] \leq (\kappa']$ при всех $i \in I$. Поэтому $(\kappa] \leq (\kappa']$ и, следовательно, согласно предложению 4.1.1 и изотонности отображения образа получаем, что $(\lambda] \leq \lambda']$. Таким образом, $(\lambda]$ является объединением семейства объектов $(\lambda_i], i \in I$.

Обратно, предположим, что $(\lambda]$ является объединением семейства объектов $(\lambda_i], i \in I$ и $(\kappa'] = (\lambda]\varphi^{\mathbf{P}}$. Тогда, как и выше $(\kappa] \leq (\kappa']$, поэтому $\kappa \circ \varphi$ делится на λ. Пусть $L'\lambda' Y$ – произвольньй мономорфизм, делящий $\kappa \circ \varphi$. Тогда все $\kappa_i \circ \varphi, i \in I$ делятся на λ'. Значит $(\lambda_i] \leq (\lambda']$ при всех $i \in I$. Следовательно, $(\lambda] \leq (\lambda']$, то есть $(\lambda] = (\kappa]\varphi_{\mathbf{P}}$. □

Следствие 4.1.3. *В категории с конечными коамальгамами образ объединения семейства подобъектов и объединение образов этих подобъектов существуют одновременно и совпадают.*

Определение 4.1.1. Упорядоченная пара морфизмов (σ, φ) называется *диагонализуемой* (см. [47] или [70]), если

$$\kappa \circ \varphi = \sigma \circ \lambda \;\; \Rightarrow \;\; \exists \mu | \;\; \sigma \circ \mu = \kappa, \;\; \mu \circ \varphi = \lambda.$$

Предложение 4.1.4. *В категории с конечными коамальгамами любая пара (σ, φ), состоящая из простого морфизма σ и мономорфизма φ, диагонализуема.*

Доказательство. Пусть $\kappa \circ \varphi = \sigma \circ \lambda$ и $(\tilde{\lambda}, \tilde{\varphi})$ – коамальгама пары (φ, λ). Отметим, что $\tilde{\varphi}$ – мономорфизм. Существует морфизм ρ такой, что $\rho \circ \tilde{\lambda} = \kappa, \;\; \rho \circ \tilde{\varphi} = \sigma$. Так как σ – простой морфизм, из мономорфности $\tilde{\varphi}$ следует его изоморфность. Взяв $\mu = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\lambda}$, будем иметь $\sigma \circ \mu = \rho \circ \lambda = \kappa, \;\; \mu \circ \varphi = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\lambda} \circ \varphi = \lambda$. □

4.2 Несократимое разложение объекта в объединение конечного числа неприводимых подобъектов

Определение 4.2.1. Подобъект $(\xi]$ называется *неприводимым*, если

$$(\xi] = (\zeta] \cup (\eta] \quad \Rightarrow \quad (\xi] = (\zeta] \quad \vee \quad (\xi] = (\eta].$$

Объект называется неприводимым, если его тотальный подобъект неприводим.

Определение 4.2.2. Объект X называется *объектом конечной (ко)глубины или (ко)артиновым*, если в решетке $\mathbf{P}(X)$ (соотв., $\mathbf{Q}(X)$) не существует бесконечной убывающей цепи подобъектов (соотв., факторобъектов)

$$\xi_1 > \xi_2 > ... > \xi_s > ...$$

Объект X называется *объектом конечной (ко)высоты или (ко)нетеровым*, если в $\mathbf{P}(X)$ (соотв., $\mathbf{Q}(X)$) нет бесконечной возрастающей цепи подобъектов (соотв., факторобъектов)

$$\xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_s < ...$$

Определение 4.2.3. Разложение

$$(\xi] = \cup_{i \in I}(\xi_i]$$

подобъекта $(\xi]$ в объединение подобъектов $(\xi_i]$, $i \in I$ назызается *несократимым*, если $(\xi] \neq \cup_{i \neq j}(\xi_i]$ для любого $j \in I$.

Предложение 4.2.1. *Всякий артинов объект X обладает несократимым разложением в объединение конечного числа неприводимых подобъектов.*

Доказательство. Если бы в каждом разложении $(\xi] = \cup_{i=1}^{n}(\xi_i]$ объекта в объединение конечного числа своих подобъектов существовал приводимый подобъект, то как нетрудно убедиться, объект X обладал бы бесконечной убывающей цепью подобъектов.

Всякое разложение в объединение подобъектов можно превратить в несократимое, если отбросить все "лишние"подобъекты, то есть такие, манкирование которых не меняет результата объединения. □

Предложение 4.2.2. *Если* X *– объект с дистрибутивной решеткой подобъектов и*

$$X = \cup_{i\in I}(\xi_i] = \cup_{j\in J}(\xi_j]$$

несократимые разложения объекта X *в объединение неприводимых подобъектов, то существует биекция* $I\sigma J$ *такая, что подобъекты* $(\xi_i]$ *и* $(\eta_{i\sigma}]$ *совпадают при всех* $i \in I$.

Доказательство. В силу дистрибутивности решетки $\mathbf{P}(X)$ имеем

$$(\xi_i] = (\xi_i] \cap (\cup_{j\in J}(\xi_j]) = \cup_{j\in J}((\xi_i] \cap (\eta_j])$$

для произвольного $i \in I$. Из неприводимости подобъекта $(\xi_i]$ следует, что $(\xi_i] = (\xi_i] \cap (\eta_j]$ для некоторого $j = i\sigma$ из J. Поэтому $(\xi_i] \leq (\eta_{i\sigma}]$. Аналогично найдется индекс $i' \in I$ такой, что $(\eta_{i\sigma}] \leq (\xi_{i'}]$ По транзитивности $(\xi_i] \leq (\xi_{i'}]$. Отсюда вследствие несократимости разложеиия $\cup_{i\in I}(\xi_i]$ должно быть $i = i'$ и $(\xi_i] = (\eta_{i\sigma}]$. Полученное сопоставление $i \mapsto i\sigma$ определяет нужную биекцию. □

4.3 Равномерные морфизмы

В категории с нулевыми морфизмами $X0_{XY}Y$ для любого объекта X классы подобъектов $\mathbf{P}(X)$ и факторобъектов $\mathbf{Q}(X)$ имеют наименьшие элементы: нулевой подобъект $(0_{OX}]$ и нулевой факторобъект $(0_{XO}]$, где O в индексе означает нулевой объект.

Под ядром $\ker\varphi$ морфизма $X\varphi Y$ понимается как мономорфизм $K\kappa X$, обнуливающий φ слева (то есть удовлетворяющий условию $\kappa\circ\varphi = 0_{KX}$) и делящий всякий морфизм, обнуливающий φ слева, так и класс эквивалентности этого мономорфизма, т. е. подобъект $(\kappa]$ объекта X. Ядро морфизма $X\varphi Y$ – наибольший подобъект объекта X, имеющий нулевой образ относительно φ. Ядро произвольного мономорфизма $X\varphi Y$ существует и тривиально (то есть равно нулевому подобъекту $(0_{OX}]$). В категории с конечными коамальгамами существует ядро любого морфизма $X\varphi Y$, им является прообраз нулевого подобъекта $(0_{OX}]$ относительно морфизма φ.

Двойственно, под коядром $\mathrm{coker}\varphi$ морфизма $X\varphi Y$ понимается и факторобъект объекта Y, и любой представляющий его эпиморфизм. Корректно определяется также коядро произвольного подобъекта, любой представитель которого называется факторизацией по этому подобъекту. В категории с конечными амальгамами существуют факторизации по всем подобъектам.

Предложение 4.3.1. *Любой представитель $Y\psi Z$ коядра произвольного морфизма $X\varphi Y$ является простым эпиморфизмом.*

Доказательство. Эпиморфность ψ требуется по определению коядра. Если $\psi = \psi' \circ \eta$, где η – мономорфизм> то $\varphi \circ \psi' = 0$, поэтому существует морфизм η' такой, что $\psi' = \psi \circ \eta'$. После подстановки и сокращения на эпиморфизм ψ справа получаем $\eta' \circ \eta = 1$. Отсюда в силу мономорфности η имеем также $\eta \circ \eta' = 1$. Таким образом, η – изоморфизм и, следовательно, ψ – простой морфизм. □

Отображения ядра и коядра антиизотонны в следующем смысле:

$$\chi = \varphi \circ \psi \quad \Rightarrow \quad \ker \varphi \leq \ker \xi, \ \ \operatorname{coker} \psi \leq \operatorname{coker} \chi.$$

Предложение 4.3.2. *Для произвольного морфизма $X\varphi Y$*

(а). $\ker \operatorname{coker} \varphi$ *делит* φ *справа,* $\operatorname{coker} \ker \varphi$ *делит* φ *слева;*

(б). $\operatorname{coker} \ker \operatorname{coker} = \operatorname{coker}, \ \ \ker \operatorname{coker} \ker = \ker$.

Определение 4.3.1. Мономорфизм $K\kappa X$ и подобъект $(\kappa]$ называются *нормальными*, если $\operatorname{coker} \kappa$ существует и $\ker \operatorname{coker} \kappa = \kappa$. Двойственно определяются конормальные эпиморфизм и факторобъект. Согласно предложению 4.3.2 (ко)ядро любого морфизма является (ко)нормальным подобъектом (соотв., факторобъектом) при условии существования его коядра (соотв., ядра).

Отображения ядра и коядра задают взаимно обратные биекции между классами $\mathbf{P}_0(X)$ нормальных подобъектов и $\mathbf{Q}_0(X)$ конормальных факторобъектов объекта X. На биекции между $\mathbf{P}_0(X)$ и $\mathbf{Q}_0(X)$ основан, так называемый, *второй принцип двойственности* (см. [8] для случая абелевых категорий). При действии второго принципа двойственности совпадают понятия коартиновости с нетеровостью и конетеровости с артиновостью.

Прообраз нормального подобъекта относительно произвольного морфизма является нормальным подобъектом. Аналогичное утверждение для образа нормального подобъекта относительно произвольного морфизма неверно, однако, как мы увидим в следующем параграфе, оно справедливо для являющихся равномерными морфизмами факторизаций при некоторых дополнительных условиях.

Определение 4.3.2. Морфизм $X\varphi Y$ называется (решеточно) *равномерным* по данному семейству подобъектов объекта X, если для любого подобъекта $K\kappa X$ из этого семейства прообраз образа относительно морфизма φ существует и равен объединению этого подобъекта с ядром морфизма φ.

Морфизм $X\varphi Y$ называется *равномерным*, если он равномерен по семейству $\mathbf{P}(X)$ всех подобъектов объекта X.

Любой мономорфизм $X\varphi Y$ равномерен относительно произвольного семейства подобъектов объекта X в силу предложения 4.1.1 (б) и тривиальности ядра мономорфизма.

Предложение 4.3.3. *(а). Если композиция χ морфизма $X\varphi Y$ и изоморфизма ψ равномерна по некоторому семейству подобъектов объекта X, то и φ равномерен по этому семейству подобъектов.*

(б). Композиция χ мономорфизма $X\varphi Y$ и равномерного по семейству подобъектов $\mathbf{M}$ объекта Y морфизма ψ равномерна по семейству подобъектов $\mathbf{N}$ объекта X, образы которых относительно φ принадлежат семейству $\mathbf{M}$, если решетка $\mathbf{P}(Y)$ модулярна (см. [16]).

Доказательство. (а) Согласно предложению 4.1.1 (б), примененному к мономорфизму φ, и функториальности $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}^*$ для произвольного подобъекта $(\kappa]$ из заданного семейства подобъекта объекта X получаем

$$(\kappa]\varphi_{\mathbf{P}}\varphi^{\mathbf{P}} = (\kappa]\varphi_{\mathbf{P}}\psi_{\mathbf{P}}\psi^{\mathbf{P}}\varphi^{\mathbf{P}} = (\kappa]\chi_{\mathbf{P}}\chi^{\mathbf{P}} = (\kappa] \cup \ker\chi = (\kappa] \cup \ker\varphi.$$

(б) Опять в силу функториальности отображений образа и прообраза, а также условия равномерности морфизма ψ по $\mathbf{M}$ для произвольного подобъекта κ из $\mathbf{N}$ имеем

$$(\kappa]\chi_{\mathbf{P}}\chi^{\mathbf{P}} = (\kappa]\varphi_{\mathbf{P}}\psi_{\mathbf{P}}\psi^{\mathbf{P}}\varphi^{\mathbf{P}} = ((\kappa]\varphi_{\mathbf{P}} \cup \ker\psi)\varphi^{\mathbf{P}}.$$

Поскольку φ – мономорфизм, последнее выражение равно

$$((\kappa]\varphi_{\mathbf{P}} \cup \ker\psi) \cap (\varphi])\varphi^{\mathbf{P}},$$

которое с использованием свойства модулярности решетки $\mathbf{P}(Y)$ преобразуется к виду

$$((\kappa]\varphi_{\mathbf{P}} \cup ((\ker\psi) \cap (\varphi]))\varphi^{\mathbf{P}}.$$

Опять из-за мономорфности φ в силу предложений 4.1.1 и 4.1.2, получаем

$$((\kappa]\varphi_{\mathbf{P}} \cup (\ker\psi)\varphi_{\mathbf{P}})\varphi^{\mathbf{P}} = ((\kappa] \cup \ker\psi)\varphi_{\mathbf{P}}\varphi^{\mathbf{P}} = (\kappa] \cup \ker\chi.$$

□

Прежде, чем перейти к следующему предложению, сделаем два замечания. Во-первых, для мономорфизма φ отображение прообраза определено в силу того, что $\mathbf{P}(Y)$ – решетка (в частности, по пересечениям). Во-вторых, если $\mathbf{M} = \mathbf{P}(Y)$, то, очевидно, $\mathbf{N} = \mathbf{P}(X)$.

Предложение 4.3.4. *В категории с конечными коамальгамами образ $(L\lambda Y]$ неприводимого подобъекта $(K\kappa X]$ относительно равномерного морфизма $X\varphi Y$ неприводим, если решетка $\mathbf{P}(X)$ модулярна, а дополнительный морфизм $K\tau L$, подчиняющийся равенству $\tau \circ \lambda = \kappa \circ \varphi$, универсально прост.*

Доказательство. Предположим, что $(\lambda] = (\alpha] \cup (\beta]$ для некоторых подобъектов $(\alpha]$ и $(\beta]$ объекта Y. Тогда $(\alpha'] \cup (\beta'] = (1_L]$, где $(\alpha'] = (\alpha]\lambda^{\mathbf{P}}$, $(\beta'] = (\beta]\lambda^{\mathbf{P}}$. Взяв $(\tilde{\alpha}] = (\alpha']\tau^{\mathbf{P}}$, $(\tilde{\beta}] = (\beta']\tau^{\mathbf{P}}$, согласно предложениям 4.1.1 и 4.1.2 и условию универсальной простоты τ будем иметь

$$(\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta})\tau_{\mathbf{P}} = (\alpha'\tau^{\mathbf{P}}\tau_{\mathbf{P}} \cup \beta'\tau^{\mathbf{P}}\tau_{\mathbf{P}} = \alpha' \cup \beta' = (1_L].$$

Так как φ – равномерный морфизм, а X – объект с модулярной решеткой подобъектов, согласно предложению 4.3.3 морфизмы $\kappa \circ \varphi = \tau \circ \lambda$ и, следовательно, τ равномерны.

Последний морфизм к тому же простой. Поэтому

$$(1_K] = (1_L]\tau^{\mathbf{P}} = ((\tilde{\alpha}] \cup (\tilde{\beta}])\tau_{\mathbf{P}}\tau^{\mathbf{P}} = (\tilde{\alpha}] \cup (\tilde{\beta}] \cup \ker\tau.$$

Подобъекты $(\tilde{\alpha}]$ и $(\tilde{\beta}]$, являясь прообразами подобъектов относительно τ, содержат ядро этого морфизма. Следовательно, получаем $(\tilde{\alpha}] \cup (\tilde{\beta}] = (1_K]$. Ввиду неприводимости подобъекта $K\kappa X$, либо $\tilde{\alpha} = 1_K$, либо $\tilde{\beta} = 1_K$. Откуда вытекает, что по крайней мере один из морфизмов α', β' делит простой морфизм τ, поэтому является изоморфизмом. □

Предложение 4.3.5. *Пусть* $X = \cup_{i\in I}(\xi_i]$ *– несократимое разложение объекта* X *в объединение подобъектов* $(\xi_i]$, $X\varphi Y$ *– равномерный относительно семейства всевозможных объединений подобъектов* $(\xi_i]$ *морфизм с ядром* $\ker\varphi = \cup_{i\in K}(\xi_i]$, *для которого определено отображение обратного образа* $\varphi^{\mathbf{P}}$. *Пусть далее* η_i, $i \in I$ *– образы подобъектов* ξ_i *относительно* φ. *Тогда образ* $(\eta]$ *морфизма* φ *представляется в виде несократимого объединения подобъектов* $(\eta_i]$, $i \in I - K$.

Доказательство. Так как определено $\varphi^{\mathbf{P}}$, согласно предложению 4.1.2

$$(\eta] = (1_X]\varphi_{\mathbf{P}} = (\cup_{i\in I}(\xi_i])\varphi_{\mathbf{P}} = \cup_{i\in I}(\eta_i].$$

Здесь все $(\eta_i]$ равны 0 при $i \in K$, потому что являются образами относительно φ таких подобъектов, которые лежат в ядре этого морфизма.

Предположим, что $(\eta] = \cup_{i\in J}(\eta_i]$, где $J \subset I - K$. Тогда $(\eta] = (\cup_{i\in J}(\xi_i])\varphi_{\mathbf{P}}$ и в силу равномерности морфизма φ

$$(1_X] = (\eta]\varphi^{\mathbf{P}} = (\cup_{i\in J}(\xi_i]) \cup \ker\varphi = \cup_{i\in J\cup K}(\xi_i]$$

Так как исходное разложение – несократимое, $J \cup K = I$. Таким образом, несократимо и разложение $(\eta] = \cup_{i\in J}(\eta_i]$. □

4.4 Наследуемость свойств

Пусть X –произвольный объект, $\mathbf{M}$ – семейство подобъектов объекта X, $X\varphi Y$ – некоторый морфизм, $\mathbf{N}$ – семейство образов всех подобъектов из $\mathbf{M}$ относительно морфизма φ.

Будем говорить, что свойство, которому удовлетворяет семейство подобъектов $\mathbf{M}$, наследуется при морфизме φ, если семейство подобъектов $\mathbf{N}$ также обладает этим свойством.

Предложение 4.4.1. *В категории с конечными коамальгамами следующая совокупность свойств семейства подобъектов* $\mathbf{M}$ *объекта* X *наследуется при всех факторизациях объекта* X *по подобъектам из семейства* $\mathbf{M}$.

(1) $\mathbf{M}$ *замкнутое относительно объединений семейство нормальных подобъектов объекта* X.

(2) Факторизация объекта X *по каждому подобъекту из семейства* $\mathbf{M}$ *существует и является универсально простым морфизмом, равномерным по семейству подобъектов* $\mathbf{M}$.

(3) Морфизм, дополнительный к образу любого подобъекта из $\mathbf{M}$ *относительно факторизации по произвольному подобъекту из семейства* $\mathbf{M}$*, является эпиморфизмом.*

Доказательство. Пусть $R\rho X$ – произвольный подобъект семейства $\mathbf{M}$, $X\varphi_\rho X_\rho$ – факторизация по нему, $\mathbf{N}_\rho$ – семейство образов подобъектов из $\mathbf{M}$ относительно φ_ρ. Их существование гарантируется условием (2). Проверим, что семейство подобъектов $\mathbf{N}_\rho$, объекта X_ρ удовлетворяет условиям (1) – (3).

Так как $\mathbf{M}$ замкнуто относительно объединений, согласно следствию из предложения 4.1.2 семейство $\mathbf{N}_\rho$ также будет замкнутым относительно объединений. Чтобы доказать нормальность образа $K_\rho\kappa_\rho X_\rho$ подобъекта $K\kappa X$ из семейства $\mathbf{M}$ относительно φ_ρ, надо убедиться в существовании факторизации по подобъекту κ_ρ.

Для факторизаций φ_ρ, φ_κ, $\varphi_{\kappa\cup\rho}$ по подобъектам, фигурирующим в индексе, существуют морфизмы $\varphi^\rho_{\kappa\cup\rho}$, $\varphi^\kappa_{\kappa\cup\rho}$ однозначно определяемые равенствами

$$\varphi_{\kappa\cup\rho} = \varphi_\kappa \circ \varphi^\kappa_{\kappa\cup\rho} = \varphi_\rho \circ \varphi^\rho_{\kappa\cup\rho}.$$

При этом $\varphi^\rho_{\kappa\cup\rho}$ – факторизация по подобъекту κ_ρ.

Действительно, дополнительный морфизм δ^κ_ρ к образу κ_ρ подобъекта κ относительно факторизации φ_ρ, подчиняющийся равенству $\delta^\kappa_\rho \circ \kappa_\rho = \kappa \circ \varphi_\rho$, эпиморфен согласно условию

(3). Поэтому из, равенств

$$\delta^\kappa_\rho \circ \kappa_\rho \circ \varphi^\rho_{\kappa\cup\rho} = \kappa \circ \varphi_\kappa \circ \varphi^\kappa_{\kappa\cup\rho} = 0$$

следует, что $\kappa_\rho \circ \varphi^\rho_{\kappa\cup\rho} = 0$.

В силу равномерности морфизма φ_ρ по $\mathbf{N}$ имеем

$$\kappa(\varphi_\rho)\rho(\varphi^\rho)^{\mathbf{P}} = \kappa_\rho(\varphi_\rho)^{\mathbf{P}} = \kappa \cup \rho.$$

Поэтому существует морфизм γ, который в паре с $\kappa\cup\rho$ дает коамальгаму пары $(\varphi_\rho, \kappa_\rho)$.

Предположим, что $\varphi_\rho \circ \eta = 0$. Тогда $(\kappa \cup \rho) \circ \varphi_\rho \circ \eta = \gamma \circ \kappa_\rho = 0$. Следовательно, $\varphi_\rho \circ \eta = \varphi_{\kappa\cup\rho} \circ \zeta$ для подходящего морфизма ζ. Подставляя $\varphi_{\kappa\cup\rho} = \varphi_\rho \circ \varphi^\rho_{\kappa\cup\rho}$ и сокращая на эпиморфизм φ_ρ, получаем $\eta = \varphi^\rho_{\kappa\cup\rho} \circ \zeta$. Таким образом, $\varphi^\rho_{\kappa\cup\rho}$ – факторизация по подобъекту κ_ρ.

Заметим, что $\varphi^\rho_{\kappa\cup\rho}$, являясь правым делителем универсально простого морфизма $\varphi_{\kappa\cup\rho}$, сам универсально прост. Так что для полного доказательства наследственности свойства (2) осталось проверить равномерность факторизации $\varphi^\rho_{\kappa\cup\rho}$ по семейству подобъектов $\mathbf{N}_\rho$.

Чтобы закончить доказательство наследуемости свойства (1), осталось проверить, что подобъект κ_ρ нормален, то есть доказать равенство $\kappa_\rho = \ker \varphi^\rho_{\kappa\cup\rho}$.

Предположим, что $\nu' \circ \varphi^\rho_{\kappa\cup\rho} = 0$ и рассмотрим коамальгаму (κ', φ') пары морфизмов (φ_ρ, ν'). Поскольку $\kappa' \circ \varphi_{\kappa\cup\rho} = \varphi' \circ \nu' \circ \varphi^\rho_{\kappa\cup\rho} = 0$ и $\varphi_{\kappa\cup\rho}$ – факторизация по нормальному подобъекту $\kappa\cup\rho$ (который, следовательно, является его ядром), существует морфизм γ' такой, что $\kappa' = \gamma' \circ (\kappa \cup \rho)$.

Так как $\varphi'\nu' = \gamma' \circ (\kappa \cup \rho) \circ \varphi_\rho$, где φ' – простой морфизм (в силу универсальной простоты факторизации φ_ρ), а κ_ρ – мономорфизм, ввиду свойства диагонализуемости пары (φ', κ_ρ) существует морфизм σ такой, что $\sigma \circ \kappa_\rho = \nu'$. Тем самым $\kappa_\rho = \ker \varphi^\rho_{\kappa\cup\rho}$ и наследственность свойства (1) доказана.

Проверим наследственность условия (3). Пусть $N\nu X$ – произвольный подобъект семейства $\mathbf{M}$, а ν_ρ и $\nu_{\kappa\cup\rho}$ – его образы относительно факторизаций φ_ρ и $\varphi_{\rho\cup\kappa}$, соответственно, а δ^ν_ρ и $\delta^\nu_{\rho\cup\kappa}$ – соответствующие дополнительные простые эпиморфизмы. Так как

$\delta^{\nu}_{\rho\cup\kappa}\circ\nu_{\rho\cup\kappa}=\nu\circ\varphi_{\rho\cup\kappa}=\delta^{\nu}_{\rho}\circ\nu_{\rho}\circ\varphi^{\rho}_{\rho\cup\kappa}$ в силу свойства минимальности дополнительного простого морфизма $\delta^{\nu}_{\rho\cup\kappa}$ к образу в категории с конечными коамальгамами имеем $\delta^{\nu}_{\rho\cup\kappa}=\delta^{\nu}_{\rho}\circ\delta'$ для некоторого морфизма δ', который, будучи правым делителем простого эпиморфизма $\delta^{\nu}_{\rho\cup\kappa}$ сам прост и эпиморфен. Подставляя последнее равенство в предыдущее и сокращая на эпиморфизм δ^{ν}_{ρ} справа, получаем равенство $\delta'\circ\nu_{\rho}\cup\kappa=\nu_{\rho}\circ\varphi^{\rho}_{\rho\cup\kappa}$, где δ' – простой морфизм, а $\nu_{\rho\cup\kappa}$ – мономорфизм. Значит $\nu_{\rho\cup\kappa}$ – образ ν_{ρ} относительно морфизма $\varphi^{\rho}_{\rho\cup\kappa}$ с дополнительным простым эпиморфизмом δ'.

Осталось завершить доказательство равномерности морфизма $\varphi^{\rho}_{\kappa\cup\rho}$ относительно семейства подобъектов $\mathbf{N}_{\rho}$. Для произвольного подобъекта ν_{ρ} из $\mathbf{N}_{\rho}$ имеем

$$\nu_{\rho}\circ(\varphi^{\rho}_{\kappa\cup]rho})_{\mathbf{P}}\circ(\nu^{\rho}_{\kappa\cup\rho})^{\mathbf{P}}=\nu\circ(\varphi_{\rho})_{\mathbf{P}}(\varphi^{\rho}_{\kappa\cup\rho})_{\mathbf{P}}\circ(\varphi^{\rho}_{\kappa\cup\rho})^{\mathbf{P}}\circ(\varphi_{\rho})^{\mathbf{P}}\circ(\varphi_{\rho})_{\mathbf{P}},$$

потому что $(\varphi_{\rho})^{\mathbf{P}}\circ(\varphi_{\rho})_{\mathbf{P}}=1$ в силу универсальной простоты морфизма φ_{ρ}. Используя функториальность отображений образа и прообраза и равномерность морфизма $\varphi_{\kappa\cup\rho}$, последнее выражение преобразуем к виду $(\nu\cup\kappa\cup\rho)\circ(\varphi_{\rho})_{\mathbf{P}}$, которое согласно предложению 4.1.2 равно $\nu_{\rho}\cup\kappa_{\rho}$. Предложение доказано. □

4.5 Комбинаторное утверждение

Предложение 4.5.1. *Пусть A – квадратная матрица порядка n, T – подмножество множества значений элементов a_{ij} матрицы A. Предположим, что удовлетворяются следующие условия:*

(а) для любых попарно различных строк $i_1,i_2,...,i_{n-1}$ найдутся попарно различные столбцы $j_1,j_2,...,j_{n-1}$ такие, что $a_{i_kj_k}\in T$ при всех $1\le k\le n-1$;

(б) в каждом столбце матрицы есть элемент со значением из T.

Тогда

(в) существует подстановка σ длины n такая, что $a_{k(k\sigma)}\in T$ при всех $1\le k\le n$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что условия (а) – (в) инвариантны относительно любых перестановок строк и столбцов, поэтому справедливость данного предложения достаточно проверить для некоторой матрицы C, получаемой из A такой перестановкой.

Так как матрица A удовлетворяет условию (а), найдутся элементы $a_{rj_r} \in T$ при всех $1 \le r \le n-1$ с $j_r \neq j_s$, если $r \neq s$. Согласно (б) существует элемент $a_{ij_n} \in E$, где $j_n \neq j_r$ при всех $1 \le r \le n-1$. Если $i = n$, подстановка σ такая, что $r\sigma = j_r$, $1 \le r \le n$ и будет удовлетворять условию (в).

Далее будем предполагать, что $i < n$. Из условия (а) следует, что найдется элемент $a_{nj} \in T$, причем согласно предыдущему можно считать, что $j \neq j_n$. В этом предположении j–тый столбец содержит два элемента из T: кроме a_{nj} еще a_{nj_r} с $r \le n-1$, $j_r \neq j$. Если $j = j_i$, подстановка σ, определяемая равенствами

$$r\sigma = j_r \ \ (1 \le r \le n-1, r \neq i), \ \ i\sigma = j_n, \ \ n\sigma = j_i,$$

будет удовлетворять условию (в). В дальнейшем предполагается, что $j \neq j_i$.

Переставим j–тый столбец на первое место, а j_i–тый и j_n–тый столбцы, содержащие T-значные элементы в i–той строке, на $(n-1)$–ое и n–ое места. Затем перестановкой строк полученную матрицу приведем к виду $C = (c_{ij})$ с T-значными элементами c_{11}, c_{nn} и $c_{(r+1)r}$ при $1 \le r \le n-1$.

Обозначим через B_m подматрицу порядка $(m+1) \times m$ матрицы C, составленную из ее первых $m+1$ строк и первых m столбцов. Матрица $B = B_1$ удовлетворяет следующему условию:

(г) присоединением к B произвольного столбца, содержащего хотя бы один T–значный элемент, получается квадратная матрица, удовлетворяющая условию (в).

Предположим, что и матрица $B = B_m$ удовлетворяет условию (г).

Матрица C, полученная из матрицы A перестановкой строк и столбцов, удовлетворяет условию (а). Поэтому для строк $1, 2, , , , , n-1$ можно найти соответствующие попарно различные столбцы $j_1, j_2, ..., j_{n-1}$ так, что c_{ki_k} T–значны при всех $1 \le k \le n-1$. В частности, найдется T–значный элемент c_{rs}, с $r \le m+1$ и $s \ge m+1$.

Случай 1: $s \le n-2$. Переставив s–тый столбец с $m+1$–ым столбцом, затем $m+2$–ую строку, с $s+1$–ой строкой,получим матрицу вида C, у которой уже подматрица B_{m+1}

будет удовлетворять условию (г). Проверим это.

Присоединим к матрице B_{m+1} $(m+2)$–й столбец с T–значным элементом $b_{t(m+2)}$. Если $t = m+2$, так как матрица B_m удовлетворяет условию (г), найдется подстановка σ порядка $m+1$ с T–значными элементами $c_{i(i\sigma)}$ при всех $1 \leq i \leq m+1$. Определим подстановку τ порядка $m+2$, положив $i\tau = i\sigma$ при $1 \leq i \leq m+1$ и $(m+2)\tau = m+2$.

Если $1 \leq t \leq m+1$, опять воспользовавшись тем, что матрица B_m удовлетворяет условию (г), найдем подстановку σ порядка $m+1$ такую, что $c_{i(i\sigma)}$ T–значны при $1 \leq i \leq m+1$ $i \neq t$ и $t\sigma = m+2$. В этом случае подстановку τ порядка $m+2$ определим условиями: $i\tau = i\sigma$ при $1 \leq i \leq m+1$ и $(m+2)\tau = m+1$. В обоих случаях по построению $c_{i(i\tau)}$ T–значны при всех $1 \leq i \leq m+2$. Таким образом, матрица B_{m+1} удовлетворяет условию (г).

Указанным способом увеличивая размеры матрицы B пока имеем дело со случаем 1, придем к случаю 2.

Случай 2: $s \geq n-1$. Так как матрица B_m удовлетворяет условию (г), найдется подстановка τ порядка $m+1$ такая, что $c_{i(i\tau)}$ T–значны при всех $1 \leq i \leq m+1$, $i \neq r$ и $r\tau = s$. Определим подстановку σ порядка n условиями: $i\sigma = i\tau$ при $1 \leq i \leq m+1$ и $i\sigma = i-1$ при $m+2 \leq i \leq n-1$. Эта подстановка σ будет удовлетворять условию (в). $\square$

4.6 Основное утверждение

Теорема 4.6.1. *Пусть объект X категории с нулевыми морфизмами и конечными коамальгамами допускает несократимые разложения $\cup_{i=1}^{m}\xi_i$ и $\cup_{j=1}^{n}\eta_j$ в объединения неприводимых подобъектов ξ_i и η_j. Предположим, что всевозможные объединения подобъектов ξ_i и η_j существуют и семейство $\mathbf{N}$ этих объединений удовлетворяет условиям (1) – (3) предложения 4.4.1 и, кроме того, ненулевые образы неприводимых подобъектов ξ_i и η_j относительно факторизаций по подобъектам семейства $\mathbf{N}$ неприводимы. Тогда $m = n$ и при некоторой биекции индексов σ образы подобъектов ξ_i и $\eta_{i\sigma}$ относительно факторизаций $\bar{\varphi}_i$ по подобъекту $\cup_{k\neq i}\xi_k$ совпадают.*

Доказательство. проводится индукцией по числу подобъектов в несократимом разложении.

Если $m = 1$, то из равенства $\xi_1 = \cup_{j=1}^{n} \eta_j$ в силу неприводимости ξ_1 следует, что $\xi_1 = \eta_j$ для некоторого j. Поэтому ввиду несократимости разложения $\cup_{j=1}^{n} \eta_j$ имеем $n = 1$.

Пусть $i_1, i_2, ..., i_m$ – произвольная перестановка чисел $1, 2, ..., m$. Рассмотрим факторизацию $X \varphi_{i_m} U$ по подобъекту ξ_{i_m}, образы u_i, v_j подобъектов ξ_u, η_j относительно морфизма φ_{i_m} (они существуют согласно условию (2)). Так как факторизация φ_{i_m} – простой морфизм, в силу предложения 4.1.2

$$U = \cup_{i=1}^{m} u_i = \cup_{j=1}^{n} v_j.$$

Из последнего разложения можно выделить несократимое разложение $U = \cup_{j \in J} v_j$, отбросив все лишние подобъекты, не влияющие на результат объединения. Разложение $U = \cup_{k=1}^{m-1} u_{i_k}$ будет несократимым согласно предложению 4.3.5. Из предположений теоремы следует, что подобъекты u_i и v_j последних разложений неприводимы.

Всевозможные объединения подобъектов u_i и v_j существуют на основании условия (1) и предложения 4.1.2. Семейство $\mathbf{N}'$ всех таких объединений удовлетворяет условиям (1) – (3) согласно свойству наследуемости этих условий (предложение 4.4.1). Из доказательства этого же предложения известно, что факторизация ψ по любому подобъекту семейства $\mathbf{N}'$ в композиции с φ_{i_m} является факторизацией по некоторому подобъекту семейства $\mathbf{N}$. В силу функториальности отображения образа ненулевые образы неприводимых подобъектов u_i и v_j относительно факторизаций по подобъектам класса $\mathbf{N}'$ неприводимы, потому что совпадают с образами неприводимых подобъектов ξ_i и η_j относительно факторизации по подобъекту из семейства $\mathbf{N}$.

По предположению индукции J состоит из $m - 1$ элемента и образы подобъектов u_{i_l} и v_{j_l}, где $j_l \in J$ и $j_l \neq j_k$ при $l \neq k$, относительно факторизации $\bar{\psi}_{i_k}$ по нормальному подобъекту $\cup_{i \neq i_k} u_i$ совпадают при всех $1 \leq k \leq m - 1$. Воспользовавшись равенством $\bar{\varphi}_{i_k} = \varphi_{i_n} \circ \bar{\psi}_{i_k}$ и функториальностью отображения образа, получим, что

(a) для произвольных попарно различных $1 \leq i_1, i_2, ..., i_{m-1} \leq m$ существуют такие попарно различные $j_1, j_2, ..., j_{m-1} \in J$, что образы ξ_{i_k} и η_{j_k} относительно факторизаций $\bar{\varphi}_{i_k}$ совпадают при всех $1 \leq k \leq m-1$.

Взяв прообраз равенства

$$U = \cup_{j \in J} v_j = (\cup_{j \in J} \eta_j)(\varphi_{i_n})_{\mathbf{P}}$$

относительно равномерного морфизма φ_{i_n} с ядром ξ_{i_n}, получим

$$X = (\cup_{j \in J} \eta_j) \cup \xi_{i_n}.$$

Поэтому образ объекта X относительно факторизации по нормальному подобъекту $\eta_J = \cup_{j \in J} \eta_j$, с одной стороны равен образу ξ'_{i_n} подобъекта ξ_{i_n}, а с другой стороны – объединению $\cup_{l \notin J} \eta'_l$ образов η'_l подобъектов η_l.

Предположим, что $\xi'_{i_n} = 0$. Тогда $\eta'_l = 0$ и, следовательно, $\eta_l \leq \eta_j$ при всех $l \notin J$, потому что η_j в силу нормальности является ядром своей факторизации. Но тогда, вследствие несократимости разложения $X = \cup_{j=1}^{n} \eta_j$, имеем $J = \{1, ..., n\}$, откуда согласно индуктивному предположению на J получаем $n = m-1$.

Если подобъект ξ_{i_n} ненулевой, то он согласно предположениям теоремы неприводим, поэтому $\xi'_{i_n} = \eta'_r$ при некотором $r \notin J$ и, следовательно, $\eta'_l \leq \eta'_r$ при всех $l \in J$. Перейдя к прообразам относительно факторизации по подобъекту η_j, в силу равномерности этого морфизма и изотонности отображения прообраза получим, что $\eta_j \cup \eta_l \leq \eta_j \cup \eta_r$ при всех $l \notin J$. Из этих соотношений следует, что $X = \eta_j \cup \eta_r$, и в силу несократимости разложения $X = \cup_{j=1}^{n} \eta_j$ получаем $J \cup \{r\} = \{1, ..., n\}$. Вместе с индуктивным предположением это дает $m = n$.

Таким образом, в любом случае $n \leq m$. По соображениям симметрии аналогично $m \leq n$. Итак, всегда $m = n$.

Заметим, что теперь равенство (*) можно переписать в виде $X = (\cup_{j \neq r} \eta'_j) \cup \xi_{i_n}$. Опять воспользовавшись соображениями симметрии между разложениями $X = \cup_{i=1}^{m} \xi_i = \cup_{j=1}^{n} \eta_j$, получаем:

(б) для произвольного s, $1 \leq s \leq n$ найдется r, $1 \leq r \leq n$, удовлетворяющее условию

$X = (\cup_{i \neq r} \xi_i) \cup \eta_s$. При этом образы подобъектов ξ_r и η_s относительно факторизации $\bar{\varphi}_r$ по подобъекту $\cup_{i \neq r} \xi_i$ совпадают.

Построим квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ инциденции разложения $X = \cup_{i=1}^m \xi_i$ относительно разложения $X = \cup_{j=1}^n \eta_j$, положив $a_{ij} = 1$, если образы подобъектов ξ_i и η_j относительно факторизации $\bar{\varphi}_i$ совпадают, и $a_{ij} = 0$, в противном случае. Доказанные выше свойства (а) и (б) влекут выполнение условий (а) и (б) предложения 4.5.1. Поэтому согласно свойству (в) этого предложения $\xi_i(\bar{\varphi}_i)_{\mathbf{P}} = \eta_{i\sigma}(\bar{\varphi}_i)_{\mathbf{P}}$ при всех i, $1 \leq i \leq n$ для некоторой подстановки σ. □

Следствие 4.6.2. *Если в категории с нулевыми морфизмами, конечными коамальгамами все подобъекты объекта X нормальны, образуют модулярную решетку и существуют факторизации по ним, являющиеся универсально простыми равномерными морфизмами с универсально простыми дополнительными эпиморфизмами к образам подобъектов относительно этих факторизаций, то при любых несократимых разложениях $X = \cup_{i=1}^m \xi_i = \cup_{j=1}^n \eta_j$ в объединения конечного числа неприводимых подобъектов имеем $m = n$ и $\xi_i(\bar{\varphi}_i)_{\mathbf{P}} = \eta_{i\sigma}(\bar{\varphi}_i)_{\mathbf{P}}$ для некоторой подстановки σ.*

Доказательство. Достаточно к теореме применить предложение 4.3.4. □

4.7 Прямая сумма подобъектов

Объединение $X_I \xi_I X$ семейства подобъектов $(X_i \xi_i X, \ i \in I)$ будем называть суммой этого семейства. если

$$\kappa_i^I \circ \alpha = \kappa_i^I \circ \beta \ \forall \, i \in I \ \ \Rightarrow \ \ \alpha = \beta,$$

где $(X_i \kappa_i^I X_I)$ – семейство морфизмов, однозначно определяемых равенствами $\kappa_i^I \circ \xi_I = \xi_i$. Прямая сумма $\xi_I = \oplus_{i \in I} \xi_i$ определяется дополнительным условием

$$\forall \, (X_i \eta_i Y, \ i \in I) \ \exists X_I \eta Y) \, | \ \kappa_i \circ \eta = \eta_i \ \forall \, i \in I.$$

Таким образом, если $\xi_I = \oplus_{i \in I} \xi_i$, то $(X_i \kappa_i^I X_I, \ i \in I)$ – копроизведение (= сумма) семейства объектов $(X_i, \ i \in I)$. Обратно, если в категории с нулевыми морфизмами

$(X_i \xi_i X,\ i \in I)$ – копроизведение семейства объектов $(X_i,\ i \in I)$, то все ξ_i – мономорфизмы и X является объединением семейства подобъектов $(\xi_i,\ i \in I)$.

Объект X называется кохопфовым, если любой простой эпиморфизм $X \xi X$ является изоморфизмом. Очевидно, любой коартинов объект кохопфов. В категории со вторым принципом двойственности всякий нетеров объект кохопфов.

Предложение 4.7.1. *Если в условиях основной теоремы 4.6.1 X – кохопфов объект и $X = \oplus_{i=1}^{m} \xi_i = \oplus_{j=1}^{n} \eta_j$, причем всевозможные объединения подобъектов ξ_i являются суммами, то $m = n$ и для подходящей подстановки σ подобъекты $X_i \xi_i X$ и $Y_{i\sigma} \eta_{i\sigma} X$ изоморфны, т. е. существуют изоморфизмы $Y_{i\sigma} \tau_i X_i$ при всех i, $1 \leq i \leq n$.*

Доказательство. Согласно теореме 4.6.1 $m = n$ и найдется подстановка σ такая, что образы ξ_i и $\eta_{i\sigma}$ относительно факторизации $\bar{\varphi}_i$ по подобъекту $\oplus_{k \neq i} \xi_k$ совпадают. Поменяв индексы подобъектов η_j, можно считать, что σ – тождественная подстановка. В качестве факторизации $\bar{\varphi}_i$ можно взять морфизм $X \bar{\varphi}_i X_i$, однозначно определяемый условиями $\xi_i \circ \bar{\varphi}_i = 1$ и $\xi_j \circ \bar{\varphi}_i = 0$ при $j \neq i$. Действительно, если $\bar{\xi}_i = \cup_{j \neq i} \xi_j$ есть сумма объединяемых подобъектов и κ_j – удовлетворяющие равенствам $\kappa_j \circ \bar{\xi}_i = \xi_j$ морфизмы, то $\bar{\xi}_i \circ \bar{\varphi}_i = 0$, потому что

$$\kappa_j \circ 0 = \xi_j \circ \bar{\varphi}_i = \kappa_i \circ \bar{\xi}_i \circ \bar{\varphi}_i$$

для всех $j \neq i$. Более того, если $\bar{\xi}_i \circ \psi = 0$, то $\xi_j \circ \psi = \kappa_j \circ \bar{\xi}_i \circ \psi = 0$ при всех $j \neq i$. Поэтому для композиции $\bar{\varphi}_i \circ \xi_i \circ \psi$ имеем $\xi_j \circ \bar{\varphi}_i \circ \xi_i \circ \psi = 0 = \xi_j \circ \psi$ при всех $j \neq i$ и $\xi_i \circ \bar{\varphi}_i \circ \xi_i \circ \psi = \xi_i \circ \psi$. Поскольку X – сумма подобъектов ξ_j, $1 \leq j \leq n$, получаем $\psi = \bar{\varphi}_i \circ \xi_i \circ \psi$.

Так как $\xi_i \circ \bar{\varphi}_i = 1$, образ подобъекта ξ_i относительно рассмотренной факторизации $\bar{\varphi}_i$ тотален. Поскольку образы подобъектов ξ_i и η_i относительно $\bar{\varphi}_i$ совпадают, существует дополнительный простой эпиморфизм $Y_i \tau_i X_i$, удовлетворяющий равенству $\tau_i = \eta_i \circ \bar{\varphi}_i$.

По определению прямой суммы $X = \oplus_{i=1}^{n} \tau_i$ для семейства морфизмов $(Y_i (\tau_i \circ \xi_i) X,\ 1 \leq i \leq n)$ существует единственный морфизм $X \xi X$ такой, что $\eta_i \circ \xi = \tau_i \circ \xi_i$.

Проверим, что ξ – простой морфизм. Предположим, что $\xi = \alpha \circ \beta$ с мономорфным β

и (β_i, γ_i) – коамальгама пары (ξ_i, β). Так как $\tau_i \circ \xi_i = \eta_i \circ \alpha \circ \beta$ для любого i, $1 \leq i \leq n$, существует единственный морфизм ζ_i, удовлетворяющий равенствам

$$\zeta_i \circ \beta_i = \tau_i, \;\; \zeta_i \circ \gamma_i = \eta_i \circ \alpha.$$

Из первого равенства в силу простоты морфизма τ_i и мономорфности β_i следует, что β_i – изоморфизм. Тогда $\xi_i = \beta_i^{-1} \circ \gamma_i \circ \beta$, т. е. $\xi_i \leq \beta$. Поскольку эти соотношения выполняются для всех i, $1 \leq i \leq n$ и $X = \cup_{i=1}^n \xi_i$, получаем, что β – изоморфизм.

Теперь покажем, что ξ – эпиморфизм. Если $\xi \circ u = \xi \circ v$, то для любого i, $1 \leq i \leq n$ $\eta_i \circ \xi \circ u = \eta_i \circ \xi \circ v$, следовательно, $\tau_i \circ \xi_i \circ u = \tau_i \circ \xi_i \circ v$. Из эпиморфности морфизмов τ_i, вытекает, что $\xi_i \circ u = \xi_i \circ v$. Точно так же, как и выше, получаем $u = v = \xi_i \circ v$. Так как эти равенства выполняются для всех i, $1 \leq i \leq n$ и $X = \oplus_{i=1}^n \xi_i$, получаем, что $u = v$.

В силу кохопфовости объекта X простой эпиморфизм $X \xi X$ будет изоморфизмом. Поэтому из равенства $\tau_i \circ \xi_i = \eta_i \circ \xi$ следует, что τ_i – мономорфизм. Поскольку к тому же τ_i – простой морфизм, он будет изоморфизмом, что и требовалось доказать. $\square$

Предложение 4.7.1 является аналогом теоремы Крулля-Ремака-Шмидта ([8]) о единственности разложения в прямую сумму неразложимых подобъектов инъективных объектов в абелевых категориях, распространенную Атьей ([4] или [8]) на произвольные объекты абелевой категории с некоторым условием конечности.

Глава 5

Appendix 2. Категории бинаров

Во втором Appendix-е излагаются результаты статьи [11] автора. Определяются категории бинаров $\mathcal{C}^T$ типа T и с помощью забывающего функтора и процедуры вспоминания строятся инъективные функторы $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^T)\, e^{\mathcal{F}}\, \mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})^T$ для произвольной категории $\mathcal{C}$ и предкатегории $\mathcal{D}$. При некоторых ограничениях на тип T или категорию $\mathcal{C}$ этот функтор обратим.

5.1 Типы бинаров

1. а) Рассматривается категория $\mathcal{C}$ с конечными произведениями. Это означает, что для любых объектов A_0 и A_1 однозначно определены объект $P = A_0 \times A_1$ и морфизмы проекции Pp_0A_0 и Pp_1A_1. Эта совокупность называется произведением A_0 и A_1, если она удовлетворяет условию универсальности: для каждой пары морфизмов Ww_0A_0 и Ww_1A_1 существует единственный морфизм $W < w_0, w_1 > P$ такой, что $< w_0, w_1 > p_i = w_i$ $(i = 1, 2)$.

б) Для любого семейства объектов A_i, $i = 0, 1, ..., n$ и произвольной перестановки $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ первых n натуральных чисел по индукции можно определить объект P^α и проекции $P^\alpha p_i^\alpha A_i$, удовлетворяющие аналогичному свойству универсальности, которые представляют произведение данного семейства объектов, отвечающее перестановке

α. Рассмотрим подпоследовательности $\beta = (\beta_1, ..., \beta_k)$ и $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_l)$, составленные из членов последовательности α, соответственно меньших α_n и / или больших α_n, с тем же порядком для β_i и γ_i, что и в α. Построим произведения

$$(P^\beta p_i^\beta A_i,\ i = 0, 1, ..., \alpha_n - 1), \quad (P^\gamma p_i^\gamma A_i,\ i = \alpha_n, ..., n) \quad \text{и} \quad (P^\alpha p_\beta^\alpha P^\beta, P^\alpha p_\gamma^\alpha P^\gamma).$$

соответствующих семейств. Определим

$$p_i^\alpha = p_\beta^\alpha p_i^\beta, \quad \text{если} \quad i < \alpha_n, \qquad \text{и} \qquad p_i^\alpha = p_\gamma^\alpha p_i^\gamma, \quad \text{если} \quad i \geq \alpha_n.$$

Согласно свойству универсальности, для любого семейства морфизмов $W w_i A_i$ $(i = 0, 1, ..., n)$ существует единственный морфизм $W < w_0, ..., w_n >_\alpha P^\alpha$ такой, что

$$< w_0, ..., w_n >_\alpha p_i^\alpha = w_i, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Обозначим $(f_0 \times f_1 \times ... \times f_n)_\alpha =< p_o f_0, p_1 f_1, ..., p_n f_n >_\alpha$ для произвольного семейства морфизмов $(A_i f_i B_i,\ i = 0, 1, ..., n)$.

в) По свойству универсальности для произвольных двух перестановок α и δ первых n натуральных чисел существует единственный изоморфизм $P^\alpha a_\delta^\alpha P^\delta$, удовлетворяющий равенствам $a_\delta^\alpha p_i^\delta = p_i^\alpha$ (ассоциирующий изоморфизм).

г) Пусть $A_i = A$ при всех $i = 0, 1, ..., n$. Существует единственный изоморфизм $P^\alpha t_\varphi P^\alpha$ при любой биекции индексов φ, определяемый условиями $t_\varphi p_i^\alpha = p_{i\varphi}$ (переставляющий изоморфизм). В частности, если $n = 1$, имеем единственный нетождественный переставляющий изоморфизм $t =< p_1, p_0 >$.

2. а) Пусть $(P p_i A,\ i = 0, 1)$ – квадрат объекта называется бинарной операцией на A, а пара (A, μ) – бинаром.

б) В конструкции 1.б) положим $A_i = A$ для всех i. Определим $P^\alpha \mu^\alpha A$ рекуррентно:

$$\mu^\alpha = \left(\left(P_\beta^\alpha \mu^\beta\right) \times \left(P_\gamma^\alpha \mu^\gamma\right)\right) \mu.$$

При $n = 2$, α может быть $(1, 2)$ или $(2, 1)$. Соответственно, $\mu^{(1,2)} = (1 \times \mu)\mu$ и $\mu^{(2,1)} = (\mu \times 1)\mu$, где $1 = 1_A$ тождественный морфизм объекта A. Операция μ называется ассоциативной, если

$$(1 \times \mu)\, \mu = a\, (\mu \times 1)\, \mu,$$

где a – соответствующий ассоциирующий изоморфизм. Это определение уточняет определение [8] (см. также [43]).

Из ассоциативности бинарной операции μ следует, что $a_\delta^\alpha \mu^\delta = \mu^\alpha$ при всех перестановках α и δ первых n натуральных чисел (свойство обобщенной ассоциативности).

в) С каждой бинарной операцией μ объекта A сопряжена бинарная операция $\overline{\mu} = t\mu$, где t – переставляющий изоморфизм. Бинарная операция, совпадающая со своей сопряженной, называется коммутативной.

г) Морфизм $A\theta B$ называется постоянным, если $u\theta = v\theta$ для произвольных морфизмов WuA и WvA.

Объект F называется финальным или терминальным, если для любого объекта A существует единственный морфизм Aq^AF в объект F. Все финальные объекты категории изоморфны.

Предположим, что категория имеет финальный объект F. Тогда морфизмы, которые пропускаются через F, будут постоянными. Обратно, постоянный морфизм $A\theta B$ пропускается через финальный объект, если существует морфизм из F в A. Такие морфизмы из F в A называются точками или элементами объекта A.

д) Постоянный морфизм $A\theta B$ называется нейтральным эндоморфизмом операции μ, если

$$< 1, \theta > \mu = 1 =< \theta, 1 > \mu.$$

Бинарная операция μ может иметь не более одного нейтрального эндоморфизма. В случае его существования μ называется нейтробинарной (или унитарной) операцией, а пара (A, μ) – нейтробинаром.

е) В категории с финальным объектом F нейтральный эндоморфизм θ бинарной операции μ объекта A существует, если существует нейтральная точка $F\varepsilon A$, определяемая условиями

$$(1 \times \varepsilon)\mu = p_1, \qquad (\varepsilon \times 1)\mu = p_2.$$

Нейтральным эндоморфизмом будет композиция $\theta = q^A\varepsilon$. Обратно, для нейтробинарной операции μ нейтральную точку можно определить равенством $\varepsilon = \tau\theta$, если существует хотя бы одна точка $F\tau A$. Таким образом, в категории с финальным объектом задание нейтральной структуры на бинаре (A, μ) с помощью нейтрального эндоморфизма и нейтрального элемента равносильно, если A имеет хотя бы одну точку.

ж) Морфизм $A\omega A$ называется обращающим морфизмом нейтробинарной операции μ, если

$$< 1, \omega > \mu = \theta =< \omega, 1 > \mu.$$

Обращающий морфизм инволюнтен и обладает свойствами

$$\theta\omega = \theta, \qquad \mu\omega = t\,(\omega \times \omega)\,\mu.$$

Ассоциативная нейтробинарная операция μ может иметь не более одного обращающего морфизма. Если нейтробинарная операция μ, обладает единственным обращающим морфизмом, то ее будем называть инверсобинарной, а соответствующую пару (A, μ) - инверсобинаром.

з) Типом бинара (A, μ), а также операции μ назовем четверку чисел $T = (T_1, T_2, T_3, T_4)$, где $T_i = 1$, если для μ выполнено условие ассоциативности $(i = 1)$, коммутативности $(i = 2)$, нейтробинарности $(i = 3)$, инверсобинарности $(i = 4)$, а в противном случае $T_i = 0$. Поскольку T_5 может равняться 1 только при $T_3 = 1$, получаем 12 различных типов бинаров. Например, тип $T = (1, 0, 1, 0)$ соответствует ассоциативным нейтробинарам или, иначе говоря, полугруппам с единицей. Тип $T = (1, 1, 1, 1)$ соответствует ассоциативно-коммутативным инверсобинарам, т.е. абелевым группам.

5.2 Иерархия категорий бинаров

3. а) Морфизм из бинара (A, μ) в бинар (B, ν) (бинароморфизм или кратко б-морфизм) есть морфизм $A\varphi B$ основной категории $\mathcal{C}$ такой, что $(\varphi \times \varphi)\nu = \mu\varphi$. Если бинарные операции μ и ν обладают нейтральными морфизмами θ_μ и θ_ν, причем $\theta_\mu\varphi = \varphi\theta_\nu$, будем говорить, что φ является нейтробинароморфизмом (нб-морфизмом). Если μ и ν обладают

к тому же однозначно определенными обращающими морфизмами ω_μ и ω_ν, причем $\omega_\mu\varphi = \varphi\omega_\nu$, будем говорить, что φ является инверсобинароморфизмом (иб-морфизмом).

б) Справедливы следующие утверждения.

(i) Для любого бинара (A, μ) тождественный морфизм 1_A является б-морфизмом из (A, μ) в (A, μ), т.е. б-эндоморфизмом бинара (A, μ). Кроме того 1 есть нб-морфизм (соотв., иб-морфизм), если μ имеет нейтральный (соответственно, обращающий) морфизм.

(ii) Композиция б-морфизмов (соотв., нб-морфизмов и иб-морфизмов) $(A, \mu)\varphi(B, \nu)$ и $(B, \nu)\psi(C, \kappa)$ есть б-морфизм (соответственно, нб-морфизм и иб-морфизм).

(iii) Нейтральный морфизм $A\theta A$ бинара (A, μ) есть нб-морфизм. Кроме того, этот морфизм является иб-морфизмом, если μ имеет обращающий морфизм.

в) Определим категорию $\mathcal{C}^T$ бинаров типа T (или T-бинаров), объектами которой служат бинары типа T, а морфизмами – б-морфизмы или нб-морфизмы (если $T_3 = 1$) и иб-морфизмы (если $T_4 = 1$). Имеем следующую иерархию этих категорий (см. рис. 1):

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & \mathcal{C}^{0000} & & \hookleftarrow & & \mathcal{C}^{0010} & & \hookleftarrow & & \mathcal{C}^{0011} \\
\swarrow & \downarrow & & & \swarrow & \downarrow & & & \swarrow & \downarrow \\
\mathcal{C}^{1000} & & \hookleftarrow & & \mathcal{C}^{1010} & & \hookleftarrow & & \mathcal{C}^{1011} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & \mathcal{C}^{0100} & & \hookleftarrow & & \mathcal{C}^{0210} & & \hookleftarrow & & \mathcal{C}^{0111} \\
\downarrow & \swarrow & & & \downarrow & \swarrow & & & \downarrow & \swarrow \\
\mathcal{C}^{1100} & & \hookleftarrow & & \mathcal{C}^{1110} & & \hookleftarrow & & \mathcal{C}^{1111} &
\end{array}
$$

рис. 1. Знак $\hookleftarrow$ означает подкатегорию, а $\rightarrow$ означает полную подкатегорию.

г) Перечислим следующие свойства категорий бинаров.

(i) Всякий б-морфизм ассоциативных инверсобинаров является иб-морфизмом.

(ii) Мономорфность (эпиморфность, биморфность) $A\varphi B$ является достаточным условием мономорфности (соотв. эпиморфности, биморфности) бинароморфизма $(A, \mu)\varphi(B, \nu)$, а изоморфность $A\varphi B$ – необходимым и достаточным условием изоморфности бинароморфизма φ.

(iii) При $T_3 = 1$, $\mathcal{C}^T$ является категорией с системой нулевых морфизмов (см. [70])

$$(A,\mu)\theta^{\mu}_{\nu}(B,\nu), \qquad \theta^{\mu}_{\nu} = \varphi\theta_{\nu} = \theta_{\mu}\varphi$$

если для каждой пары объектов A и B существует морфизм $A\varphi B$ категории $\mathcal{C}$.

(iv) Если F – финальный объект категории $\mathcal{C}$, то $(F1_FF, F1_FF)$ – квадрат объекта F и на F существует единственная бинарная операция 1_F, причем $(F, 1_F)$ – инверсобинар. Он является нулевым (одновременно финальным и кофинальным) объектом категории $\mathcal{C}^T$ при любом T.

(v) $\mathcal{C}^T$ – категория с конечными произведениями (напомним, что $\mathcal{C}$ - такая же категория изначально). Для определения произведения объектов (A,μ) и (B,ν) в категории $\mathcal{C}^T$ достаточно наделить произведение $A \times B$ объектов A и B в $\mathcal{C}$ бинарной операцией $(\mu \times \nu)_b = b(\mu \times \nu)$, где b – композиция подходящих сочетающих и переставляющего изоморфизмов. Заметим, что проекции p_A и p_B при этом будут морфизмами категории $\mathcal{C}^T$.

Отметим, что достаточное условие п.(ii) не является необходимым. В статье [56] строятся примеры так называемых „ненаследственных“ мономорфизмов $(A,\mu)\varphi(B,\nu)$ категории $\mathcal{C}^T$, база $A\varphi B$ которых не является мономорфизмом категории $\mathcal{C}$.

5.3 Предкатегории и предфункторы. Основной результат

4. a) В дальнейших конструкциях некоторые требования в определениях категории и функтора излишни. Избавившись от них, мы введем более общие понятия предкатегории и предфунктора. Для предкатегории мы не будем требовать выполнения условий существования композиции морфизмов (следовательно, вообще говоря, ассоциативности композиции), а также тождественных морфизмов. Понятие предфунктора мы получим, отбросив в определении функтора требования на образы композиции и образы тождественных морфизмов. Таким образом, предфунктор – это просто пара отображений для совокупно-

стей объектов и для совокупностей морфизмов. Кроме того, мы вынуждены отказаться от требования, чтобы совокупности объектов и совокупности морфизмов [пред]категории образовывали классы ([43]), чтобы иметь возможность рассматривать [пред]категории [пред]функторов из одной [пред]категории в другую.

б) Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – произвольные предкатегории. Морфизм φ и ψ из предфунктора $\mathcal{D}\varphi\mathcal{C}$ в предфунктор $\mathcal{D}\psi\mathcal{C}$ определяется как система морфизмов

$$(X\varphi)\, u_X\, (X\psi)\,, \qquad X \in Ob\mathcal{D},$$

которые при любом морфизме XfY из $\mathcal{D}$ удовлетворяют условиям

$$f_\varphi u_Y = u_X f_\psi, \quad \text{если} \quad \varphi \quad \text{и} \quad \psi \quad \text{ковариантны},$$

$$f^\varphi u_X = u_Y f^\psi, \quad \text{если} \quad \varphi \quad \text{и} \quad \psi \quad \text{контравариантны}.$$

Точно так же определяется морфизм (естественное преобразование) функторов.

в) Предкатегории $\mathrm{Pref}_*(\mathcal{D},\mathcal{C})$ ковариантных и $\mathrm{Pref}^*(\mathcal{D},\mathcal{C})$ контравариантных предфункторов из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{C}$ определяются, если взять в качестве

(i) объектов все предфункторы соответствующего типа из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{C}$,

(ii) морфизмов все морфизмы предфункторов рассматриваемого типа.

Если $\mathcal{C}$ – категория, $\mathrm{Pref}_*(\mathcal{D},\mathcal{C})$ и $\mathrm{Pref}^*(\mathcal{D},\mathcal{C})$ превращаются в категории.

Если морфизм предфункторов $\psi v\chi$ задается системой морфизмов $(X\psi)\, v_X\, (X\chi)$, $X \in Ob\mathcal{D}$, композиция $\varphi\,(uv)\,\chi$ задается системой морфизмов

$$X_\varphi\,(uv)_X\, X_\chi = (X\varphi)\, u_X v_X\, (X\chi)\,, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Тождественный морфизм $\varphi 1_\varphi \varphi$ определеяется как система тождественных морфизмов

$$X_\varphi\,(1_\varphi)_X\, X_\varphi = (X_\varphi)\, 1_{X\varphi}\, (X\varphi)\,, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ являются категориями. По аналогии можно построить категории $\mathrm{Funct}_*(\mathcal{D},\mathcal{C})$ ковариантных и $\mathrm{Funct}^*(\mathcal{D},\mathcal{C})$ контравариантных функторов из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{C}$. Они являются полными подкатегориями соответственно предкатегорий $\mathrm{Pref}_*(\mathcal{D},\mathcal{C})$ и $\mathrm{Pref}^*(\mathcal{D},\mathcal{C})$.

Далее будем писать $\mathcal{F}(\mathcal{D}, calC)$, где под $\mathcal{F}$ понимается Pref_*, Pref^*, Funct_* или Funct^*, причем последние две возможности реализуются только в случае, когда $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – категории.

г) Финальный объект F предкатегории $\mathcal{C}$ определяется точно так же, как в случае категории. Каждому финальному объекту F предкатегории $\mathcal{C}$ соответствует финальный объект $\tau = \tau_F$ предкатегории $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ функтор $\mathcal{D}\tau\mathcal{C}$ объекту X из $\mathcal{D}$ сопоставляет $X\tau = F$, а морфизму XfY – тождественный морфизм $q^F = 1_F$. Так определяемый предфунктор является функтором в случае, когда $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – категории. Он одновременно ковариантен и контравариантен.

Для каждого предфунктора $\mathcal{D}\varphi\mathcal{C}$ система морфизмов

$$(X\varphi)\, q^{X\varphi} F, \qquad X \in Ob\mathcal{D}$$

удовлетворяет следующим условиям при всех XfY из $\mathcal{D}$:

$$f_\varphi\,(q^\varphi)_Y = f_\varphi q^{Y\varphi} = q^{X\varphi} = (q^\varphi)_X\, f_\tau \qquad \text{в ковариантном случае,}$$

$$f^\varphi\,(q^\varphi)_X = f^\varphi q^{X\varphi} = q^{Y\varphi} = (q^\varphi)_Y\, f^\tau \qquad \text{в контравариантном случае.}$$

Следовательно, эта система морфизмов задает морфизм $\varphi q^\varphi r$. Единственность такого морфизма следует из однозначной определенности морфизмов $(X\varphi)\, q^{X\varphi} F$, $X \in Ob\mathcal{D}$.

д) Если $\mathcal{C}$ – категория с конечными произведениями, то существует ассоциированная структура конечного произведения на $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$.

Для произвольных объектов $\mathcal{D}\varphi\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}\psi\mathcal{C}$ категории $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ определим объект $\mathcal{D}(\varphi \times \psi)\mathcal{C}$ следующим образом. Для любого объекта X предкатегории $\mathcal{D}$

$$X(\varphi \times \psi) = X\varphi \times X\psi.$$

Для любого морфизма XfY

$$f_{\varphi\times\psi} = f_\varphi \times f_\psi \qquad \text{в ковариантном случае,}$$

$$f^{\varphi\times\psi} = f^\varphi \times f^\psi \qquad \text{в контравариантном случае.}$$

Если $\mathcal{D}$ – категория и φ, ψ –функторы, то и $\varphi\times\psi$ – функтор. Например, в ковариантном случае для произвольных морфизмов XfY и YgZ категории $\mathcal{D}$ имеем

$$(fg)_{\varphi\times\psi}=(fg)_{\varphi}\times(fg)_{\psi}=f_{\varphi}g_{\varphi}\times f_{\psi}g_{\psi}=(f_{\varphi}\times f_{\psi})\,(g_{\varphi}\times g_{\psi})=f_{\varphi\times\psi}g_{\varphi\times\psi}$$

и для тождественного морфизма 1_X категории $\mathcal{D}$

$$(1_X)_{\varphi\times\psi}=(1_X)_{\varphi}\times(1_X)_{\psi}=1_{x\varphi}\times 1_{X\psi}=1_{X\varphi\times X\psi}=1_{X(\varphi\times\psi)}.$$

Аналогичные соотношения выполняются в контравариантном случае.

Проекции $(\varphi\times\psi)p_{\varphi}\varphi$ и $(\varphi\times\psi)p_{\psi}\psi$ задаются системами

$$\left(p_{\varphi}\right)_X=p_{X\varphi}\qquad \text{и}\qquad \left(p_{\psi}\right)_X=p_{X\psi},\qquad X\in Ob\mathcal{D}.$$

Для любого морфизма XfY категории $\mathcal{D}$ они удовлетворяют следующим условиям:

$$f_{\varphi\times\psi}\left(p_{\varphi}\right)_Y=\left(p_{\varphi}\right)_X f_{\varphi},\qquad f_{\varphi\times\psi}\left(p_{\psi}\right)_Y=\left(p_{\psi}\right)_X f_{\psi}\qquad \text{в ковариантном случае,}$$

$$f^{\varphi\times\psi}\left(p_{\varphi}\right)_X=\left(p_{\varphi}\right)_Y f^{\varphi},\qquad f^{\varphi\times\psi}\left(p_{\psi}\right)_X=\left(p_{\psi}\right)_Y f^{\psi}\qquad \text{в контравариантном случае.}$$

Проверим универсальность $(\varphi\times\psi,p_{\varphi},p_{\psi})$. Для морфизмов $\chi u\varphi$ и $\chi v\psi$ категории $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ морфизм $\chi<u,v>\varphi\times\psi$ определяется как система морфизмов

$$<u,v>_X=<u_X,v_X>,\qquad X\in Ob\mathcal{D},$$

согласованная со всеми морфизмами XfY из $\mathcal{D}$:

$$f_{\chi}<u,v>_Y=<u,v>_X\, f_{\varphi\times\psi}\qquad \text{в ковариантном случае,}$$

$$f^{\chi}<u,v>_X=<u,v>_Y\, f^{\varphi\times\psi}\qquad \text{в контравариантном случае.}$$

Согласно определению $<u_X,v_X>$, равенства

$$<u,v>p_{\varphi}=u,\qquad <u,v>p_{\psi}=v$$

эквивалентны, соответственно, системам равенств

$$<u,v>_X\left(p_{\varphi}\right)_X=u_X,\qquad <u,v>_X\left(p_{\psi}\right)_X=v_X,\qquad X\in Ob\mathcal{D}.$$

Единственность морфизма $\chi w\,(\varphi\times\psi)$, удовлетворяющего равенствам $wp_\varphi=u$, $wp_\psi=v$, иначе говоря системам равенств

$$w_X p_{X\varphi}=u_X, \qquad w_X p_{X\psi}=v_X, \qquad X\in Ob\mathcal{D}$$

следует из единственности $w_X=<u_X,v_X>$.

В дальнейшем, если $\mathcal{C}$ – категория с конечными произведениями, считаем, что $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ – категория с индуцированными конечными произведениями.

5. Ковариантный забывающий функтор c из $\mathcal{C}^T$ в $\mathcal{C}$

(i) объекту (A,μ) из $\mathcal{C}^T$ сопоставляет объект A из $\mathcal{C}$,

(ii) морфизму $(A,\mu)g(B,\nu)$ сопоставляет морфизм AgB.

Он индуцирует ковариантные забывающие функторы $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^T)c\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ переводящие

(i) объект $\widetilde{\varphi}$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^T)$ в объект $\varphi=\widetilde{\varphi}c$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$,

(ii) морфизм $\widetilde{\varphi}w\widetilde{\psi}$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^T)$ в морфизм $\varphi w_c\psi$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$, задаваемый системой морфизмов

$$(X\varphi)\,w_X\,(X\psi)\,, \qquad X\in Ob\mathcal{D}.$$

т.е. $w_c=w$.

6. a) Пусть $\mathcal{C}$ – категория с конечными произведениями, $\mathcal{D}$ – предкатегория, $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ – категория с индуцированными конечными произведениями.

Бинарная операция $(\varphi\times\varphi)\,\mu_\varphi\varphi$ на объекте $\mathcal{D}\varphi\mathcal{C}$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ есть система морфизмов

$$X\,(\varphi\times\varphi)\,(\mu_\varphi)_X\,X\varphi=(X\varphi\times X\varphi)\,\mu_{X\varphi}X\varphi, \qquad X\in Ob\mathcal{D}$$

согласованных с морфизмами XfY из $\mathcal{D}$, т.е. удовлетворяющих условиям

$$f_{\varphi\times\varphi}\,(\mu_\varphi)_Y=(\mu_\varphi)_X\,f_\varphi, \qquad \text{в ковариантном случае,}$$

$$f^{\varphi\times\varphi}\,(\mu_\varphi)_X=(\mu_\varphi)_Y\,f^\varphi, \qquad \text{в контравариантном случае.}$$

или с учетом того, что $f_{\varphi\times\varphi}=f_\varphi\times f_\varphi$ и $f^{\varphi\times\varphi}=f^\varphi\times f^\varphi$, в эквивалентном виде, условиям

$$f_\varphi\times f_\varphi\,(\mu_\varphi)_Y=(\mu_\varphi)_X\,f_\varphi, \qquad \text{в ковариантном случае,}$$

$$f^{\varphi} \times f^{\varphi} \left(\mu_{\varphi}\right)_X = \left(\mu_{\varphi}\right)_Y f^{\varphi}, \qquad \text{в контравариантном случае.}$$

Последние суть условия бинароморфности f_{φ} и f^{φ} относительно бинарных операций $\mu_{X\varphi}$ и $\mu_{Y\varphi}$. На основании вышесказанного можно сделать следующий важный Вывод. Каждому объекту $\widetilde{\varphi}$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^0)$ сопоставляется бинарная операция μ_{φ} объекта $\varphi = \widetilde{\varphi}c$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$. Следовательно, существует естественное отображение из $Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^0)$ в $Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})^0$, которое отображает $\widetilde{\varphi}$ в (φ,μ_{φ}) (заметим, что $0=(0,0,0,0)$). Обратное отображение из $Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})^0$ в $Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^0)$ определяется следующим образом. Для любого элемента (φ,μ_{φ}) из $Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})^0$ соответствующий элемент $\widetilde{\varphi}$ из $Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^0)$ определяется условиями

(i) $X\widetilde{\varphi} = \big(X\varphi, (\mu_{\varphi})_X\big)$ для объектов X из $\mathcal{D}$,

(ii) $f_{\widetilde{\varphi}} = f_{\varphi}$ или $f^{\widetilde{\varphi}} = f^{\varphi}$ для морфизмов XfY из $\mathcal{D}$.

б) Ассоциативность бинарной операции μ, т.е.

$$\left(1_{\varphi} \times \mu_{\varphi}\right) \mu_{\varphi} = a \left(\mu_{\varphi} \times 1_{\varphi}\right) \mu_{\varphi}$$

означает ассоциативность бинарных операций $\mu_{X\varphi}$

$$\left(1_{X\varphi} \times \mu_{X\varphi}\right) \mu_{X\varphi} = a_{X\varphi} \left(\mu_{X\varphi} \times 1_{X\varphi}\right) \mu_{X\varphi}, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Аналогично коммутативность $t\mu_{\varphi} = \mu_{\varphi}$ операции μ_{φ}, суть коммутативность всех $\mu_{X\varphi}$:

$$t_{X\varphi}\mu_{X\varphi} = \mu_{X\varphi}, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Поэтому вывод остается верным, если тип 0 заменить произвольным типом T с $T_3 = T_4 = 0$.

в) Нейтральный эндоморфизм θ_{φ} of операции μ_{φ} задается системой эндоморфизмов категории $\mathcal{C}$

$$(X\varphi) \left(\theta_{\varphi}\right)_X (X\varphi) = (X\varphi)\, \theta_{X\varphi} \left(X\varphi\right), \qquad X \in Ob\mathcal{D}$$

согласованных с морфизмами XfY категории $\mathcal{D}$:

$$f_{\varphi}\theta_{Y\varphi} = \theta_{X\varphi} f_{\varphi}, \qquad \text{в ковариантном случае,}$$

$$f^{\varphi}\theta_{X\varphi} = \theta_{Y\varphi}f^{\varphi}, \qquad \text{в контравариантном случае.}$$

Нейтральный эндоморфизм θ_φ, должен быть постоянным морфизмом категории $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$, т.е. для любых морфизмов $\psi u\varphi$ и $\psi v\varphi$ этой категории должно выполняться равенство $u\theta_\varphi = v\theta_\varphi$. Другими словами, для произвольных двух систем морфизмов

$$(X\psi)\, u_X\, (X\varphi)\,, \qquad (X\psi)\, v_X\, (X\varphi)\,, \qquad X \in Ob\mathcal{D}$$

согласованных с морфизмами XfY категории $\mathcal{D}$:

$$f_\psi u_Y = u_X f_\varphi, \quad f_\psi v_Y = v_X f_\varphi, \qquad \text{в ковариантном случае,}$$

$$f^\psi u_X = u_Y f^\varphi, \quad f^\psi v_X = v_Y f^\varphi, \qquad \text{в контравариантном случае}$$

должны иметь $u_X\theta_{X\varphi} = v_X\theta_{X\varphi}$.

Последние условия выполняются, если все $\theta_{X\varphi}$ постоянные морфизмы категории $\mathcal{C}$. Следовательно, в этом случае θ_φ – постоянный морфизм. Вопрос о правильности обратного утверждения „если θ_φ – постоянный морфизм категории $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$, то $\theta_{X\varphi}$ – постоянные морфизмы категории $\mathcal{C}$ для всех $X \in Ob\mathcal{D}$“ остается открытым.

Условие нейтральности эндоморфизма θ_φ

$$< 1_\varphi, \theta_\varphi > \mu_\varphi = 1_\varphi =< \theta_\varphi, 1_\varphi > \mu_\varphi$$

эквивалентно условию: для всех $X \in Ob\mathcal{D}$

$$< 1_{X\varphi}, \theta_{X\varphi} > \mu_{X\varphi} = 1_{X\varphi} =< \theta_{X\varphi}, 1_{X\varphi} > \mu_{X\varphi}$$

т.е. все $\theta_{X\varphi}$ – нейтральные морфизмы.

Таким образом, только первое отображение в выводе существует для типов T с $T_3 = 1$.

г) Обратное отображение вывода для типа T с $T_3 = 1$ существует в предположении, что $\mathcal{C}$ – категория с финальным объектом и все ее объекты имеют хотя бы одну точку.

Действительно, если F – финальный объект категории $\mathcal{C}$ и τ – соответствующий ему финальный объект категории $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$, то условия

$$(1_\varphi \times \varepsilon_\varphi)\, \mu_\varphi = p_1, \qquad (\varepsilon_\varphi \times 1_\varphi)\, \mu_\varphi = p_2,$$

определяющие нейтральный элемент $\tau\varepsilon_\varphi\varphi$ бинарной операции μ_φ, эквивалентны условиям

$$(1_{X\varphi} \times \varepsilon_{X\varphi})\,\mu_{X\varphi} = p_1, \qquad (\varepsilon_{X\varphi} \times 1_{X\varphi})\,\mu_{X\varphi} = p_2, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Это означает, что для любого $X \in Ob\mathcal{D}$, $F\varepsilon_{X\varphi}X\varphi$ – нейтральный элемент операции $\mu_{X\varphi}$.

Пусть (φ, μ_φ) – объект категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})^T$ с $T_3 = 1$. По нейтральному эндоморфизму θ_φ операции μ_φ и произвольной системе точек $Fs_{X\varphi}(X\varphi)$, где $X \in Ob\mathcal{D}$, строится нейтральная точка $\tau\varepsilon\varphi$ операции μ_φ как система композиций $\varepsilon_{X\varphi} = s_{X\varphi}(\theta_\varphi)_X$, $X \in Ob\mathcal{D}$. Эта система согласована с морфизмами XfY из $\mathcal{D}$, поскольку в ковариантном случае

$$\varepsilon_{X\varphi}f_\varphi = s_{X\varphi}\theta_{X\varphi}f_\varphi = s_{X\varphi}f_\varphi\theta_{XY\varphi} = s_{Y\varphi}\theta_{Y\varphi} = f_\tau\varepsilon_{Y\varphi}.$$

Аналогичные равенства верны в контравариантном случае. Согласно 2 е) имеем

$$\varepsilon_{X\varphi}f_\varphi = s_{X\varphi}\theta_{X\varphi}f_\varphi = s_{X\varphi}f_\varphi\theta_{XY\varphi} = s_{Y\varphi}\theta_{Y\varphi} = f_\tau\varepsilon_{Y\varphi}.$$

Поэтому $\varepsilon = \varepsilon\theta$. Следовательно, ε – нейтральная точка. Согласно 6 г), для любого $X \in Ob\mathcal{D}$ точки $\varepsilon_{X\varphi}$ – нейтральные. Следовательно, согласно 2 е), для операции $\mu_{X\varphi}$ нейтральны эндоморфизмы $\theta_{X\varphi} = q^{X\varphi}\varepsilon_{X\varphi}$.

д) Обращающий морфизм $\varphi\omega_\varphi\varphi$ нейтробинарной операции μ_φ, определяемый условием

$$< 1_\varphi, \omega_\varphi > \mu_\varphi = \theta_\varphi =< \mu_\varphi, 1_\varphi > \mu_\varphi,$$

есть система обращающих морфизмов $(\omega_\varphi)_X = \omega_{X\varphi}$ нейтробинарных операций $(\mu_\varphi)_X = \mu_{X\varphi}$ объектов $X\varphi$, $X \in Ob\mathcal{D}$, согласованных с морфизмами XfY категории $\mathcal{D}$:

$$\omega_{X\varphi}f_\varphi = f_\varphi\omega_{Y\varphi}, \quad \text{если} \quad \varphi \quad \text{ковариантно},$$

$$f^\varphi\omega_{X\varphi} = \omega_{Y\varphi}f^\varphi, \quad \text{если} \quad \varphi \quad \text{контравариантно}.$$

Поэтому в отображениях вывода тип 0 можно заменить общим типом T в предположении, что для $T_3 = 1$ объекты категории $\mathcal{C}$ имеют хотя бы одну точку.

7. а) Условия согласованности морфизма $\varphi w\psi$ категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ с бинарными операциями μ_φ, μ_ψ, а также с нейтральными эндоморфизмами θ_φ, θ_ψ и обращающими эндоморфизмами ω_φ, ω_ψ этих операций (в случае их существования):

$$(w \times w)\,\mu_\psi = \mu_\varphi w, \qquad w\theta_\psi = \theta_\varphi w, \qquad w\omega_\psi = \omega_\varphi w$$

соотв. эквивалентны условиям согласованности морфизмов $(X\varphi)\, w_X\, (X\psi)$ категории $\mathcal{C}$ с бинарными операциями $\mu_{X\varphi}$, $\mu_{X\psi}$, их нейтральными $\theta_{X\varphi}$, $\theta_{X\psi}$ и обращающими эндоморфизмами $\omega_{X\varphi}$, $\omega_{X\psi}$ (при условии их существования):

$$(w_X \times w_X)\, \mu_{X\psi} = \mu_{X\varphi} w_X, \qquad w_X \theta_{X\psi} = \theta_{X\varphi} w_X, \qquad w_X \omega_{X\psi} = \omega_{X\varphi} w_X, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Поэтому, если w – морфизм категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}^T)$, то сопоставляемый ему морфизм w_c принадлежит категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})^T$. Обратно, если $T_3 = 1$ и категория $\mathcal{C}$ удовлетворяет условиям 6 д), то всякий морфизм w категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})^T$ индуцирует морфизм категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}^T)$. Определяемые таким образом отображения между $\mathrm{Mor}\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}^T)$ и $\mathrm{Mor}\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})^T$ взаимно обратны.

Теорема 5.3.1. *Отображения*

$$Ob\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}^T) \ni \widetilde{\varphi} \longrightarrow (\varphi, \mu_\varphi) \in Ob\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})^T$$

$$Mor\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}^T) \ni \widetilde{\varphi} w \widetilde{\psi} \longrightarrow (\varphi, \mu_\varphi)\, w_c\, (\psi, \mu_\psi) \in Mor\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})^T$$

инъективны и определяют ковариантный функтор $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}^T) e \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})^T$. Этот функтор обратим, если (i) $T_3 = T_4 = 0$ или (ii) в категории $\mathcal{C}$ существует финальный объект F и морфизм из F в любой объект $\mathcal{C}$.

Теорему можно обобщить на случай произвольных алгебраических систем над категорией $\mathcal{C}$.

Часть II

Приложения к алгебраическим кривым

Одной из важнейших задач алгебраической геометрии является определение бирационального типа алгебраического многообразия, вычисление инвариантов бирациональных преобразований. Например, бирациональная классификация алгебраических кривых производится на основе дискретного бирационального инварианта – рода кривой ([105], [72], [91], [92]). Исследованы также бирациональные типы алгебраических поверхностей ([114]). Но для трехмерных многообразий уже вопрос рациональности и унирациональности кубики в $\mathbb{P}^4$ оказался очень трудным и был решен в 1972 году Клеменсом и Гриффитсом с применением теории многообразий Прима ([81]). Не только в этом случае, но и в ряде других (например, пересечения трех квадрик, расслоения на коники [110], [112], [76], [77]) средний якобиан возникает как многообразие Прима двулистного накрытия кривых и возникает необходимость отличения многообразия Прима от якобиана кривой. В этом вопросе основополагающим является следующий результат Мамфорда ([101]).

Теорема 5.3.2. *Пусть* $\pi : \tilde{C} \to C$ *– неразветвленное двулистное накрытие кривых,* (P, Ξ) *– соответствующее главно поляризованное многообразие Прима. Тогда, если род* $g(C) \geq 5$ *и кривая* C *не гиперэллиптична, то* $\dim \operatorname{sing} \Xi \leq g - 5$*, причем равенство* $\dim \operatorname{sing} \Xi = g - 5$ *возможно только в следующих случаях:*

1) C *- тригональ, т.е. трехлистное накрытие проективной прямой;*

2) C *– суперэллиптическая кривая, т.е. двулистное накрытие эллиптической кривой;*

3) C *– неособая плоская кривая степени 5;*

4) C *– некая специальная кривая рода 5.*

Главная цель второй части диссертации – исследование случаев совпадения многообразий Прима с якобианами кривых.

Глава 6

Примианы двулистных накрытий гиперэллиптических кривых

В этой главе излагаются результаты статей [1] и [2] автора.

6.1 Примианы неразветвленных двулистных накрытий гиперэллиптических кривых

Пусть X – гиперэллиптическая кривая рода g, двулистно накрывающая $\mathbb{P}^1$ с точками ветвления $e_o, ..., e_{2g+1}$, $\psi : X \to J(X)$ каноническое вложение в якобиево многообразие. Прообразы канонического класса относительно изогении „удвоения“ якобиана называются половинками канонического класса. Их всего 2^{2g} штук [99].

Предложение 6.1.1. *На гиперэллиптической кривой X рода G существует*

$$\mu_g = 2^{2g} - \begin{pmatrix} 2g+1 \\ g \end{pmatrix}$$

эффективных половинок канонического класса. Их представители однозначно приводятся к виду

$$D_a = \sum_{r=0}^{2g+1} a_r e_r$$

где $a_r = 0$ *или* 1 *при* $r \geq 1$, $a_0 = g - 1 - \sum_{r=1}^{2g+1} a_r$.

На основании предложения 6.1.1 любая разность эффективных половинок канонического класса приводима к виду

$$B_r = \sum_{r' \in R'} e_{r'} - \sum_{r \in R - R'} e_r$$

где

$$R' \subset R \subset \{0, 1, ..., 2g+1\}, \quad |R'| = \frac{1}{2}|R| \leq g - 1.$$

Воспользовавшись плоской моделью

$$y^2 = \prod_{r=0}^{2g+1} (x - e_r)$$

кривой X и применив теорему Римана-Роха, получаем

Предложение 6.1.2. *Существует биекция между группой* $J_2(X)$ *элементов второго порядка якобиана* $J(X)$ *и парами взаимно дополняющих подмножеств*

$$R, \overline{R} \subset \{e_0, ..., e_{2g+2}\}$$

четной мощности.

Рассмотрим неразветвленное двулистное накрытие $\varphi : \tilde{X} \to X$, каковые все параметризуются точками $J_2(X)$, причем накрытию φ соответствует единственный ненулевой элемент

$$\sigma \in \ker \varphi^*, \quad \varphi^* : J(X) \to J(\tilde{X})$$

(см. напр. [52]). На основании предложения 6.1.2 точке σ соответствует пара

$$R = \{e_0, ..., e_{2k-1}\}, \quad \overline{R} = \{e_{2k}, ..., e_{2g+2}\}.$$

Пусть X' и X'' – гиперэллиптические кривые разветвленные над R и $\overline{R}$ соответственно. Проектирования расслоенных произведений

$$\varphi' : X' \times_{\mathbb{P}^1} X \to X', \quad \varphi'' : X \times_{\mathbb{P}^1} X'' \to X''$$

задают неразветвленные двулистные накрытия. Если X – плоская модель, то, например, X' будет задаваться уравнением

$$v^2 = \prod_{r \in R} (u - e_r)$$

и, подняв функцию

$$F = \frac{v}{\prod_{r=0}^{k-1} (u - e_r)}$$

на $X' \times_{\mathbb{P}^1} X$, получим

$$(\varphi')^*(B_R) = ((\varphi')^*(F)).$$

Аналогично $(\varphi'')^*(\sigma) = 0$.

Таким образом, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \varphi' \swarrow & \varphi \downarrow & \searrow \varphi'' \\ X' & \mathrm{X} & X'' \\ \pi' \searrow & \pi \downarrow & \swarrow \pi'' \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

где $\tilde{X} = X' \times_{\mathbb{P}^1} X = X \times_{\mathbb{P}^1} X'' = X' \times_{\mathbb{P}^1} X''$.

Теорема 6.1.3. *Поляризованное многообразие Прима*

$$Pr[\tilde{X} \to X] = (J(X') \oplus J(X''), \theta(X') \times J(X'') + J(X') \times \theta(X'')).$$

Доказательство теоремы разложим в серию лемм.

Лемма 6.1.4. $\varphi^*(J(X))$ *содержится в ядрах* $\ker \varphi'_*$ *и* $\ker \varphi''_*$, *где*

$$\varphi'_* : J(\tilde{X}) \to J(X'), \quad \varphi''_* : J(\tilde{X}) \to J(X'').$$

Доказательство. Пусть D – эффективный дивизор, отображающийся в $x \in J(X)$ при каноническом вложении $\psi : X \to J(X)$. Тогда $D' = \varphi'_*(\varphi^*(D))$ отображается в $\varphi'_*(\varphi^*(x))$ при каноническом вложении $\psi' : X' \to J(X')$. Взяв e_0 в качестве базисной точки вложения ψ', получим

$$\psi'(D') = cl(D' - \deg D' \cdot e_0),$$

ибо $i_{\pi'}(D') = D'$. $\square$

Следствие 6.1.5. $\varphi^*(J(X)) \subset \ker(\varphi'_* \oplus \varphi''_*)$.

Лемма 6.1.6. *Последовательность*

$$0 \to \varphi^*(J(X)) \to J(\tilde{X}) \to J(X') \oplus J(X'') \to 0$$

точна.

Доказательство. Действительно,

$$J(X') \oplus J(X'') = J(\tilde{X}) / \ker(\varphi'_* \oplus \varphi''_*),$$

следовательно,

$$\dim \ker(\varphi'_* \oplus \varphi''_*) = g.$$

Так как $\dim \varphi^*(JX)) = g$, то на основании леммы 6.1.4 $\varphi^*(J(X))$ является компонентой $\ker(\varphi'_* \oplus \varphi''_*)$. Якобиево многообразие $J(\tilde{X})$ определяется как фактор универсальной накрывающей $\tilde{W} = \mathbb{C}^g$ по полной решетке периодов $\tilde{U}$. Отображение $\varphi'_* \oplus \varphi''_*$ определяет подпространство $\tilde{W}^0$ такое, что

$$\ker(\varphi'_* \oplus \varphi''_*) = \tilde{W}^0 / \tilde{W}^0 \cap \tilde{U}.$$

Значит $\ker(\varphi'_* \oplus \varphi''_*)$ неприводимо как многообразие. $\square$

Лемма 6.1.7. *Многообразие Pr изоморфно $J(X') \oplus J(X'')$.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму, изображенную на следующей странице (отображение χ однозначно определяется условием коммутативности этой диаграммы).

Лемма 6.1.4 дает

$$(\varphi'_* \oplus \varphi''_*)((I - i_\varphi)\tilde{x}) = 2(\varphi'_* \oplus \varphi''_*)(\tilde{x}).$$

Определим

$$\tau(y) = (\varphi'_* \oplus \varphi''_*)((I - i_\varphi)^{-1}(y)).$$

Отображение τ определено корректно и является инъективным, ибо

$$\ker(\varphi'_* \oplus \varphi''_*) = \ker(I - i_\varphi) = \varphi^*(J(X)),$$

и сюръективно, ибо, как показано, χ – изогения „удвоения“. $\square$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \varphi^*(J(X)) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
0 \to \varphi^*(J(X)) & \longrightarrow & J(\tilde{X}) & \xrightarrow{I-i_\varphi} & Pr & \to & 0 \\
 & & \varphi'_* \oplus \varphi''_* \downarrow & \tau \swarrow & \downarrow \varphi'_* \oplus \varphi''_* & & \\
 & & J(X') \oplus J(X'') & \xrightarrow{\chi} & J(X') \oplus J(X'') & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Лемма 6.1.8. *При изоморфизме τ канонической поляризации θ на Pr соответствует поляризация $\theta(X') \times J(X'') + J(X') \times \theta(X'')$ на $J(X') \oplus J(X'')$.*

Доказательство. Пусть P_0 – такая точка $\tilde{X}$, что

$$\dim |(g-1)(P_0 - i(P_0))|$$

нечетна для $i = i_{\varphi'}$ или $i_{\varphi''}$. Очевидно,

$$\varphi_*((g-1)(P_0 - i(P_0))) \in K_X.$$

Тогда согласно [110] компонента связности W_0 дивизора $(g-1)(P_0 - i(P_0))$ в $W \subset S^{2g-2}(\tilde{X})$, отображающаяся при φ_* в K_X, будет отображаться на Pr при

$$\psi : S^{2g-2}(\tilde{X}) \to J(\tilde{X}), \quad \psi(D) = cl(D - (g-1)(P_0 - i(P_0))).$$

Покажем, что при соответствующем отображении W_0 на $J(X') \oplus J(X'')$ получим $\theta(X') \times J(X'') + J(X') \times \theta(X''))$. Общий слой отображения ψ одномерен. В каждом слое можно выбрать дивизор $\tilde{D}+P_0+i(P_0)$, $\deg \tilde{D}=2g-4$, отображающийся в канонический дивизор на X. Значит

$$\tilde{D}=\tilde{D}_1+i_{\varphi'}(\tilde{D}_1)+\tilde{D}_2+i_{\varphi''}(\tilde{D}_2)=(\varphi')^*(D')+(\varphi'')^*(D''),$$

где $\deg D'+\deg D''=g-2$. Отсюда образ (D',D'') в $J(X')\oplus J(X'')$ лежит в

$$\theta(X')\times J(X'')+J(X')\times\theta(X'')$$

.

Обратно, для любой пары дивизоров

$$(D',D''),\quad \deg D'+\deg D''=g-2$$

имеем

$$cl((\varphi')^*(D')+(\varphi'')^*(D'')-i_{\varphi}((\varphi')^*(D')+(\varphi'')^*(D'')))=$$

$$cl(2((\varphi')^*(D')+(\varphi'')^*(D''))-(g-2)(P_0+i_{\varphi}(P_0)+i_{\varphi'}(P_0)+i_{\varphi''}(P_0))$$

и, следовательно, отображение на $\theta(X')\times J(X'')+J(X')\times\theta(X'')$. □

6.2 Сводка основных определений и соглашений

В остальных параграфах этой главы доказывается, что многообразие Прима двулистного накрытия гиперэллиптической кривой с двумя точками ветвления является гиперэллиптическим якобианом. Полученный результат используется для описания слоя отображения Прима из многообразия модулей двулистных накрытий гиперэллиптических кривых с двумя точками ветвления в многообразие модулей абелевых многообразий.

Мы будем следовать обозначениям Д. Мамфорда [101]. Буквой C с различными метками будут обозначаться кривые, которые всегда предполагаются полными и неособыми. Вновь возникающие кривые (например, как расслоенные произведения) считаются нормализованными. Соответствующие поляризованные якобианы обозначаются через (J,θ) с соответствующими метками.

Пусть

$$\pi : \tilde{C} \to C \tag{6.2.1}$$

– двулистное накрытие, т. е. ассоциированное отображение полей рациональных функций $\pi^* : R(C) \to R(\tilde{C})$ является квадратичным расширением.

Каждому накрытию (6.2.1) сопоставляются:

(I) эффективный дивизор четной степени без кратных компонент – дивизор ветвления $\tilde{W}$ на $\tilde{C}$ (или $\pi_*(\tilde{W}) = W$ на C);

(II) единственная с точностью до линейной эквивалентности половинка U дивизора W такая, что $\pi^*(U)$ линейно эквивалентно $\tilde{W}$.

Если $R(\tilde{C}) = R(C)(\sqrt{f})$, где $f \in R(C)$, то $(f) = W - 2U$ и $(\sqrt{f}) = \tilde{W} - \pi^*(U)$.

Обозначим через Cov^2 совокупность кривых с инволюцией, т. е. всех двулистных накрытий (6.2.1) через Cov^2_C – совокупность двулистных накрытий (6.2.1) с фиксированной кривой C и через $Cov^2_C(W)$ – совокупность двулистных накрытий (6.2.1) с фиксированными кривой C и дивизором ветвления на ней W.

У т в е р ж д е н и е. Существует биекция Y между объектами $\pi : \tilde{C} \to C$ из Cov^2 и тройками (C, W, U), где C – кривая, W – эффективный дивизор четной степени без кратных компонент на C, а U – половинка W.

Поскольку на кривой рода $g(C) = g$ любой дивизор имеет 2^{2g} неэквивалентных половинок, получаем

Следствие 6.2.1. $|Cov^2_C(W)| = 2^{2g}$.

Заметим, что при $W = 0$ утверждение превращается в хорошо известный факт: неразветвленные двулистные накрытия кривой взаимно однозначно соответствуют точкам второго порядка ее якобиана (см. [52], [110]).

Накрытие (6.2.1) индуцирует два гомоморфизма якобианов кривых

$$\varphi = \pi^* : J \to \tilde{J} \qquad Mm = \pi_* : \tilde{J} \to J$$

которые дуальны друг другу,

$$\hat{\varphi} = \lambda_\theta \cdot Nm \cdot \lambda_{\tilde{\theta}}^{-1}, \qquad \hat{Nm} = \lambda_{\tilde{\theta}} \cdot \varphi \cdot \lambda_\theta^{-1},$$

и, кроме того, связаны соотношениями

$$Nm \cdot \varphi = 2_J, \qquad \varphi \cdot Nm = 1_{\tilde{J}} + i.$$

Здесь $\hat{\varphi}, \hat{Nm}$ – дуальные отображения двойственных абелевых многообразий,

$$\lambda_\theta : J \to \tilde{J}, \qquad \lambda_{\tilde{\theta}} : \tilde{J} \to \hat{\tilde{J}}$$

канонические главные поляризации якобианов (по определению, для любого дивизора D

$$\lambda_D(x) = cl(T_x^* D - D),$$

где T_x – сдвиг на элемент x якобиана), i – инволюция на $\tilde{J}$, индуцированная переставлением листов накрытия π. Из выписанных соотношений получаем, что

$$\varphi^*(\lambda_{\tilde{\theta}}) := \hat{\varphi} \cdot \lambda_{\tilde{\theta}} \cdot \varphi = 2\lambda_{\tilde{\theta}}, \qquad Nm^*(\lambda_\theta) := \hat{Nm} \cdot \lambda_\theta \cdot Nm = \lambda_{\tilde{\theta}} \cdot (1_{\tilde{J}} + i).$$

Поляризованное многообразие Прима накрытия (6.2.1) обозначается через (P, ρ). По определению

$$P := (\ker Nm)^0 = \ker(1_{\tilde{J}} + i)^0 = \mathrm{im} F(1_{\tilde{J}} - i)$$

есть нечетная часть многообразия $\tilde{J}$ относительно действия инволюции i, причем $i|_P := -1$, тогда $i|_{\varphi(J)} = +1$. Получаем изогению

$$\sigma = (\varphi, 1_P) : J \times P \to \tilde{J}$$

и поляризация ρ определяется из условия

$$\sigma^*(\lambda_{\tilde{\theta}}) = (2\lambda_\theta) \times \rho.$$

Двулистные накрытия кривых образуют категорию с совокупностью объектов Cov^2. Морфизмом объекта $\pi : \tilde{C} \to C$ в объект $\pi' : \tilde{C}' \to C'$ будет пара согласованных отображений кривых

$$\tilde{\alpha} : \tilde{C} \to \tilde{C}', \qquad \alpha : C \to C',$$

дающих коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{C}' \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ C & \xrightarrow{\alpha} & C' \end{array}$$

Тогда сопоставление двулистному накрытию его многообразия Прима определяет два функтора из категории двулистных накрытий кривых в категорию абелевых многообразий: 1) ковариантный: $P_*(\tilde{\alpha},\alpha) : P_\pi \to P_{\pi'}$ такой, что

$$P_*(\tilde{\alpha},\alpha) = \tilde{\alpha}_*|_{P_\pi} = (1 - i_{\pi'}) \cdot \tilde{\alpha}_* \cdot (1 - i_\pi)^{-1};$$

2) контравариантный: $P^*(\tilde{\alpha},\alpha) : P_{\pi'} \to P_\pi$ такой, что

$$P^*(\tilde{\alpha},\alpha) = \tilde{\alpha}^*|_{P_{\pi'}} = (1 - i_\pi) \cdot \tilde{\alpha}^* \cdot (1 - i_{\pi'})^{-1}.$$

Как будет видно из теоремы 6.3.7, поляризацию эти функторы не сохраняют.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, под накрытием подразумевается двулистное накрытие кривых.

Основное поле k считается алгебраически замкнутым и до пар. 5 любой характеристики $p \neq 2$, а в пар. 5 $k = \mathbb{C}$.

6.3 Башни с клейновой группой Галуа

В Cov_C можно ввести групповую операцию следующим образом.

Пусть $\pi : \tilde{C} \to C$ и $\pi' : \tilde{C}' \to C$ – элементы из Cov_C. Рассмотрим расслоенное произведение $\tilde{\tilde{C}} = \tilde{C} \times_C \tilde{C}'$. Оно допускает двулистные накрытия $\tilde{\pi} : \tilde{\tilde{C}} \to \tilde{C}$ и $\tilde{\pi}' : \tilde{\tilde{C}} \to \tilde{C}'$, являющиеся проекциями на первый и второй сомножители соответственно. Группа Галуа $Gal(\tilde{\tilde{C}}/C)$ изоморфна группе Клейна $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Каждый из ненулевых элементов этой группы действует инволютивно на $\tilde{\tilde{C}}$. Факторизуя $\tilde{\tilde{C}}$ по этим инволюциям, получаем башню кривых и накрытий

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{\tilde{C}} & & \\
 & \tilde{\pi} \swarrow & \tilde{\pi}' \downarrow & \searrow \tilde{\pi}'' & \\
\tilde{C} & & \tilde{C}' & & \tilde{C}'' \\
 & \pi \searrow & \pi' \downarrow & \swarrow \pi'' & \\
 & & C & &
\end{array} \qquad (*)$$

По определению $\pi + \pi' = \pi''$. Без труда доказывается

Лемма 6.3.1. *Пусть*

$$Y(\pi) = (W, U), \qquad Y(\pi') = (W', U'), \qquad Y(\pi'') = (W'', U''),$$

а $(W.W')$ *означает общую часть дивизоров* W *и* W'. *Тогда*

$$W'' = W + W' - 2(W, W'), \qquad U'' = U + U' - (W, W').$$

Из леммы 6.3.1 следует, что Cov_C образует абелеву группу показателя 2 с распадающимся накрытием в качестве нулевого элемента. Значит, тернарное отношение $\pi + \pi' = \pi''$ симметрично и

$$\tilde{\tilde{C}} = \tilde{C} \times_C \tilde{C}' = \tilde{C} \times_C \tilde{C}'' = \tilde{C}' \times_C \tilde{C}''$$

Индуцированное действие на неразветвленных накрытиях $Cov_C(0)$ совпадает со сложением точек второго порядка на якобиане.

Введем топологию в Cov_C. Рассмотрим симметрическое произведение $S_{2n}(C)$ кривой C и его 2^{2n}-листное неразветвленное накрытие

$$\tilde{S_{2n}}(C) \to S_{2n}(C), \alpha\alpha(W, U) \mapsto W, 2U \equiv W$$

Тогда

$$Cov_C = \bigcup_{n=0}^{\infty} Cov_C(2n),$$

с $Cov_C(2n) = \{(W, U) \mid \deg W = 2n\}$ получающимся ограничением вышеуказанного накрытия на открытое подмножество множества $S_{2n}(C)$ таких точек W, которые не содержат кратных компонент.

Кроме того, для любых $k < n$ и $D \in S_{n-k}(C)$ определены вложения

$$\alpha_D^{n,k} : Cov_C(2k) \to S_{2n}\tilde{(}C), \qquad (W,U) \mapsto (W + 2d, U + D).$$

Обозначим через $S_{2n}\tilde{(}C)^f$ факторпространство $S_{2n}\tilde{(}C)$ по отношению эквивалентности:

$$(W,U) \approx (W',U') \Leftrightarrow W - W' = 2(D - D'), \quad U - U' = D - D'.$$

Тогда

$$S_{2n}\tilde{(}C)^f = \bigcup_{k=0}^{n} Cov_C(2k), \quad n = 1, 2, ...$$

образуют индуктивное семейство

$$S_{2n}\tilde{(}C)^f \to S_{2n+2}\tilde{(}C)^f, \qquad \langle W, U\rangle \mapsto \langle W + 2P, U + P\rangle$$

(здесь $\langle , \rangle$ означает класс эквивалентности, P точка C). Перейдя к индуктивному пределу, получаем

$$Cov_C = \mathrm{limind}\{S_{2n}\tilde{(}C)^f\}.$$

Как нетрудно проверить, групповая операция $\pi + \pi' = \pi''$ непрерывна во введенной топологии, и Cov_C превращается в топологическую группу. В частности, совокупность всех двулистных накрытий проективной прямой $\mathbb{P}^1$ образует топологическую группу.

Подойдем к башне (*) с другой стороны. Рассмотрим композицию двулистных накрытий кривых

$$\tilde{\tilde{C}} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{C} \xrightarrow{\pi} C \tag{6.3.1}$$

с ассоциированными квадратичными расширениями полей рациональных функций

$$R(C) \hookrightarrow R(\tilde{C}) \hookrightarrow R(\tilde{\tilde{C}}).$$

Сквозное отображение $\pi \cdot \tilde{\pi}$ четырехлистно, но, вообще говоря, не является абелевым накрытием, ибо композиция двух нормальных расширений не обязана быть нормальным расширением.

Для группы автоморфизмов $G = \mathrm{Aut}_{r(C)} R(\tilde{\tilde{C}})$ имеем

$$2 \le |Gal(R(\tilde{\tilde{C}})/R(C))| \le |G| \le [R(\tilde{\tilde{C}}) : r(C)] = 4.$$

Очевидно, что $|G| = 4$ тогда и только тогда, когда $R(\tilde{\tilde{C}})/R(C)$ является расширением Галуа и сквозное накрытие $\tilde{\tilde{C}} \to C$ абелево. Ограничимся случаем $|G| = 4$. Тогда справедлива

Теорема 6.3.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) группа Галуа композиции накрытий 6.3.1 изоморфна $\mathbb{K}$*;*

(ii) на $\tilde{\tilde{C}}$ *существуют три коммутирующие инволюции* i, i', i''*, причем* $i = i' \cdot i''$*;*

(iii) существует башня кривых и накрытий (*);

(iv) $\tilde{\tilde{C}} = \tilde{C} \times_C \tilde{C}' = \tilde{C} \times_C \tilde{C}'' = \tilde{C}' \times_C \tilde{C}''$*;*

(v) если $Y(\pi) = (W, U), \qquad Y(\pi') = (W', U'), \qquad Y(\pi'') = (W'', U'')$*, то* $W'' = W + W' - 2(W, W'), \qquad U'' = U + U' - (W, W')$*.*

Следствие 6.3.3. $\tilde{\pi}_* \cdot i_{\tilde{\pi}'} = i_\pi \cdot \tilde{\pi}_*$*,* $\tilde{\pi}^* \cdot i_\pi = i_{\tilde{\pi}'} \cdot \tilde{\pi}^*$*. По симметрии аналогичные равенства верны для других накрытий и инволюций башни (*).*

Доказательство. Следствие просто выводится из условия (iv). Кроме того, соотношения следствия индуцируют такие же соотношения на якобианах. □

Роды кривых, образующих башню (*), связаны равенством

$$g(\tilde{C}) + g(\tilde{C}') + g(\tilde{C}'') = g(\tilde{\tilde{C}}) + 2g(C),$$

которое легко получается из следующей леммы (с применением формулы Гурвица).

Лемма 6.3.4. *Пусть имеется башня (*) и*

$$Y(\tilde{\pi}') = (\tilde{W}', \tilde{U}'), \qquad Y(\pi') = (W', U'), \qquad Y(\pi'') = (W'', U'').$$

Тогда

$$\tilde{W}' = (\pi')^*(W'' - (W', W'')),$$

а

$$\tilde{U}' \equiv (\pi')^*(U'') - \frac{1}{2}(\pi')^*(W', W'')$$

при $C \neq \mathbb{P}^1$ *и*

$$\tilde{U}' \equiv \sum_r \alpha_r Q'_r, \qquad \pi'_*(\sum_r Q'r) = (W', W'') \quad \vee \quad W' - (W', W'')$$

при $C = \mathbb{P}^1$ *(α_r - нечетны).*

По симметрии аналогичные равенства верны для π *и* π''.

Здесь, поскольку $W' > (W', W'')$, дивизор $(\pi')^*(W', W'')$ удвоенный и $\frac{1}{2}(\pi')^*(W', W'')$ означает его каноническую половинку.

Доказательство. Случай $C = \mathbb{P}^1$ разбирается с применением утверждений предыдущего параграфа, а случай $C \neq \mathbb{P}^1$ проверяется непосредственно. □

Из леммы 6.3.4 следуют два необходимых условия существования башни (*) для композиции накрытий $\tilde{\tilde{C}} \to \tilde{C} \to C$:

1) $W_{\tilde{\pi}} = i_{\tilde{\pi}}(W_{\tilde{\pi}})$; $\qquad$ 2)$(\pi_*(W_{\tilde{\pi}}), W_\pi) = 0$.

Эти условия и достаточны при $C = \mathbb{P}^1$, но не в общем случае.

Теорема 6.3.5. *Если композиция накрытий* $\tilde{\tilde{C}} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$ *удовлетворяет условиям 1), 2) и* π *разветвлено, то башня (*) существует тогда и только тогда, когда* $\pi_*(U_{\tilde{\pi}}) \equiv \frac{1}{2}\pi_*(W_{\tilde{\pi}})$ *(каноническая половинка двукратного дивизора).*

Доказательство. Пусть существует башня кривых (*). Тогда согласно лемме 6.3.4

$$\pi_*(U_{\tilde{\pi}}) = \pi_*\pi^*(U') - \frac{1}{2}(W, W')) =\equiv W' - (W, W') = \frac{1}{2}\pi_*(W_{\tilde{\pi}}).$$

Покажем теперь, что расслоенными произведениями исчерпываются все композиции, удовлетворяющие условию $\pi_*(U_{\tilde{\pi}}) \equiv \frac{1}{2}\pi_*(W_{\tilde{\pi}})$.

Зафиксируем $\pi : \tilde{C} \to C$ и дивизор $W_{\tilde{\pi}}$, удовлетворяющий условиям 1)и 2). Согласно следствию из утверждения существует $2^{2g(\tilde{C})}$ двулистных накрытий кривой $\tilde{C}$ с дивизором ветвления $W_{\tilde{\pi}}$ и они находятся в биективном соответствии с половинками $U_{\tilde{\pi}}$ дивизора $W_{\tilde{\pi}}$. Тогда $2\pi_*(U_{\tilde{\pi}}) = \pi_*(W_{\tilde{\pi}})$. Но любой дивизор на C имеет $2^{2g(C)}$ неэквивалентных половинок. Следовательно, при условии эпиморфности отображения $\pi_* : \tilde{J}_2 \to J_2$, где $\tilde{J}_2, J_2$ – точки второго порядка, число двулистных накрытий $\tilde{\pi} : \tilde{\tilde{C}} \to \tilde{C}$ таких, что $\pi_*(U_{\tilde{\pi}}) = \frac{1}{2}\pi_*(W_{\tilde{\pi}})$ равно $2^{2g(\tilde{C})-2g(C)}$.

Далее, башни (*) с фиксированными $\pi : \tilde{C} \to C$ и дивизором $\tilde{W}$ ветвления накрытия $\tilde{\pi}$ биективны множеству наборов $\{(W', U'), (W'', U'')\}$, где $W' > \frac{1}{2}\pi_*(W_{\tilde{\pi}}), W'' > \frac{1}{2}\pi_*(W_{\tilde{\pi}})$ четной степени и

$$(W' - \frac{1}{2}\pi_*(W_{\tilde{\pi}})) + (W'' - \frac{1}{2}\pi_*(W_{\tilde{\pi}})) = W_\pi,$$

а U', U'' – половинки W', W'', удовлетворяющие соотношению $U'|U'' - \frac{1}{2}\pi_*(W_{\tilde{\pi}})$. Получаем, что число таких башен $2^{\deg W_\pi - 2 + 2g(C)} = 2^{2g(\tilde{C})-2g(C)}$. Теорема доказана. □

Заметим, что условие разветвленности накрытия π существенно. Конструкция следующего параграфа дает контрпример, когда π неразветвленно.

Каноническая поляризация на многообразии Прима, определенная в пар. 2, не является главной. Гомоморфизм $\rho : P \to \hat{P}$ имеет ядро $\ker\rho = \pi^*(J_2)$, где J_2 – точки второго порядка якобиана кривой C.

Однако, если π является неразветвленным накрытием или разветвленно только в двух точках, то $\rho = 2\lambda_\Xi$, где λ_Ξ уже главная поляризация.

В этих двух случаях имеем главно поляризованное многообразие Прима $(P, \Xi))$ (см. [101]). Важно отметить, что главно поляризованное многообразие Прима определено еще в одном случае, а именно, для гиперэллиптических кривых:

$$\pi : C \to \mathbb{P}^1 \;\Rightarrow\; (P, \Xi) = (J_C, \theta_C).$$

В пар. 1 настоящей главы мы доказали, что если существует диаграмма (*) с $C = \mathbb{P}^1$' и неразветвленным накрытием $\tilde{\pi}$, то

$$(P_{\tilde{\pi}}, \Xi_{\tilde{\pi}}) = (J_{\pi'}, \theta_{\pi'}) \times (J_{\pi''}, \theta_{\pi''})$$

Мы дадим обобщение этого результата в теореме 6.3.7.

Лемма 6.3.6. *Башня кривых и накрытий (*) индуцирует башню якобиевых многообразий*

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{\tilde{J}} & & \\
\tilde{\varphi} \nearrow & & \tilde{\varphi}' \uparrow & & \nwarrow \tilde{\varphi}'' \\
\tilde{J} & & \tilde{J}' & & \tilde{J}'' \\
\varphi \nwarrow & & \varphi' \uparrow & & \nearrow \varphi'' \\
 & & J & &
\end{array}
\qquad (**)
$$

Если $\tilde{\varphi}$ – вложение, то

$$\tilde{\varphi}(\tilde{J}) \cap \tilde{\varphi}'(\tilde{J}') = \tilde{\varphi}(\varphi(J)).$$

Доказательство. Включение

$$\tilde{\varphi}\varphi(J) \subset \tilde{\varphi}(\tilde{J}) \cap \tilde{\varphi}'(\tilde{J}')$$

очевидно. Пусть

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{\varphi}'(\tilde{x}').$$

Тогда согласно следствию из теоремы 6.3.2

$$\tilde{\varphi} \cdot i_{\pi}(\tilde{x}) = i_{\tilde{\pi}'} \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{\tilde{x}} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}).$$

Если $\tilde{\varphi}$ инъективно, то $i_{\pi}(\tilde{x}) = \tilde{x}$, т. е. $\tilde{x} \in \ker(1 - i_{\pi})$. Так как

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}) \in \operatorname{Im} \tilde{\varphi}' = \ker(1 - i_{\tilde{\pi}'})^0$$

и $\tilde{\varphi}$ – вложение, то и

$$\tilde{x} \in \ker(1 - i_{\pi})^0 = \operatorname{Im} \varphi.$$

Лемма доказана. □

Заметим, что $\tilde{\varphi}$ является вложением тогда и только тогда, когда $\tilde{\pi}$ – разветвленное накрытие. В противном случае $\ker \tilde{\varphi}$ содержит единственный ненулевой элемент, являющийся точкой второго порядка на $\tilde{J}$ (см. [101], [110]).

Теорема 6.3.7. *Если в башне (*) все накрытия, за исключением, может быть, $\tilde{\pi}$ разветвлены, то*

$$(\tilde{\varphi}' + \tilde{\varphi}'') : P_{\pi'} \times P''_{\pi} \to P_{\tilde{\pi}}$$

является изогенией с ядром

$$\ker(\tilde{\varphi}' + \tilde{\varphi}'') = (\varphi', \varphi'')(J_2(C)).$$

При этом

$$(\tilde{\varphi}' + \tilde{\varphi}'')^*(\rho_{\tilde{\pi}}) = 2(\rho_{\pi'}, \rho_{\pi''}).$$

Доказательство. Прежде всего из функториальности P (см. пар. 2) образ $(\tilde{\varphi}' + \tilde{\varphi}'')(p_{\pi'} \times P_{\pi''})$ лежит в $P_{\tilde{\pi}}$. Далее, из [101] известно, что $P_{\pi'}$ и $\varphi'(J)$ пересекаются по $\varphi'(J_2)$ (аналогично $P_{\pi''} \cap \varphi''(J) = \varphi''(J_2)$). Из леммы 6.3.6 получаем, что

$$\tilde{\varphi}'(P_{\pi'}) \cap \tilde{\varphi}''(P_{\pi''}) = (\tilde{\varphi}' \cdot \varphi')(J_2) = (\tilde{\varphi}'' \cdot \varphi'')(J_2)$$

Значит $\ker(\tilde{\varphi}' + \tilde{\varphi}'') = (\varphi', \varphi'')(J_2(C))$.

Так как $\dim(P_{\pi'} \times P_{\pi''}) = \dim P_{\tilde{\pi}}$ и $P_{\tilde{\pi}}$ – неприводимо, то $(\tilde{\varphi}' + \tilde{\varphi}'')$ – изогения.

Проверим соотношение на поляризации. Имеется коммутативная диаграмма (ν – вложения)

$$\begin{array}{cccc}
P_{\pi'} \xrightarrow{\nu} & \tilde{J}' \xrightarrow{2\lambda_{\tilde{\theta}'}} & \hat{\tilde{J}}' \xrightarrow{\hat{\nu}} & \hat{P}_{\pi'} \\
\tilde{\varphi}' \downarrow & \tilde{\varphi}' \downarrow & \uparrow \hat{\tilde{\varphi}}' & \uparrow \hat{\tilde{\varphi}}' \\
P_{\tilde{\pi}} \xrightarrow{\nu} & \tilde{\tilde{J}} \xrightarrow{2\lambda_{\tilde{\tilde{\theta}}}} & \hat{\tilde{\tilde{J}}} \xrightarrow{\hat{\nu}} & \hat{P}_{\tilde{\pi}} \\
\tilde{\varphi}'' \uparrow & \tilde{\varphi}'' \uparrow & \downarrow \hat{\tilde{\varphi}}'' & \downarrow \hat{\tilde{\varphi}}'' \\
P_{\pi'} \xrightarrow{\nu} & \tilde{J}' \xrightarrow{2\lambda_{\tilde{\theta}'}} & \hat{\tilde{J}}' \xrightarrow{\hat{\nu}} & \hat{P}_{\pi'}
\end{array}$$

Отсюда

$$(\tilde{\varphi}')^*(\tilde{\rho}_\pi) = \hat{\tilde{\varphi}}' \cdot \hat{\nu} \cdot \lambda_{\tilde{\tilde{\theta}}} \cdot \nu \cdot \tilde{\varphi}' = \hat{\nu} \cdot 2\lambda_{\tilde{\theta}'} \cdot \nu = 2\rho_{\pi'}.$$

Аналогично $(\tilde{\varphi}'')^*(\tilde{\rho}_\pi) = 2\rho_{\pi''}$.

Пусть, далее, $\tilde{\tilde{x}} = (\tilde{\varphi}' + \tilde{\varphi}'')(\tilde{x}', 0)$. Поскольку $\hat{\tilde{\varphi}}'' \cdot \rho_{\tilde{\pi}} \cdot \tilde{\varphi}'' = (\hat{\tilde{\varphi}}'')^*(\rho_{\tilde{\pi}}$, имеем

$$\hat{\tilde{\varphi}}'' \rho_{\tilde{\pi}}(\tilde{\tilde{x}}) = (\hat{\tilde{\varphi}}'')^*(\rho_{\tilde{\pi}}((\tilde{\varphi}'')^{-1}) \cdot (\tilde{\varphi}' + \tilde{\varphi}'')(\tilde{x}', 0)) = 0$$

т. е. $P_{\pi'} \to \hat{P}_{\pi''}$ – нулевое отображение. По двойственности и $P_{\pi''} \to \hat{P}_{\pi'}$ – нулевое отображение. □

Следствие 6.3.8. *Если* $C = \mathbb{P}^1$ *и* $\deg W_{\tilde{\pi}} \le 2$ *то*

$$(p_{\tilde{\pi}}, \Xi_{\tilde{\pi}}) = (J_{C'}, \theta_{C'}) \times (J_{C''}, \theta_{C''}),$$

где под произведением поляризованных абелевых многообразий подразумевается поляризованное абелево многообразие

$$(J_{C'} \times J_{C''}, \theta_{C'} \times J_{C''} + J_{C'} \times \theta_{C''}).$$

6.4 Примиан разветвленного двулистного накрытия гиперэллиптической кривой

Вычислим многообразие Прима двулистного накрытия гиперэллиптической кривой, разветвленного в двух точках. Для этого построим башню кривых и накрытий

$$\begin{array}{c}
\tilde{\tilde{C}} \\
\tilde{\pi}' \qquad\qquad \tilde{\pi} \swarrow \tilde{\pi}_0 \downarrow \quad \searrow \tilde{\pi}_1 \qquad\qquad \tilde{\pi}_1' \\
\tilde{C}' \qquad \tilde{C} \qquad\qquad \tilde{C}_0 \qquad\quad \tilde{C}_1 \qquad \tilde{C}_1' \\
\pi' \searrow \pi \downarrow \pi_0 \swarrow \pi_0'' \downarrow \quad \searrow \pi_0' \downarrow \pi_1 \swarrow \pi_1' \\
C \qquad\qquad C_0 \qquad\qquad C_1 \\
p \searrow \;\; p_0 \downarrow \qquad \swarrow p_1 \\
\mathbb{P}^1
\end{array} \qquad (***)$$

Исходить будем из двулистного накрытия $\pi : \tilde{C} \to C$ с $Y(\pi) = (C, W_\pi, U_\pi)$, где C – гиперэллиптическая кривая с гиперэллиптическим накрытием $p : C \to \mathbb{P}^1$, $\deg W_\pi = 2$ и $(W_\pi, i_p(W_\pi)) = 0$.

Построим $\pi' : \tilde{C}' \to C$ из условия $Y(\pi') = (C, i_p(W_\pi), i_p(U_\pi))$. Можно считать, что $\tilde{C}' = \tilde{C}$. Далее, $\tilde{\tilde{C}} = \tilde{C} \times_C \tilde{C}'$ и $\tilde{\pi}_0, \tilde{C}_0, \pi_0$, получены на основании теоремы 6.3.2.

На $\tilde{\tilde{C}}$, кроме трех очевидных инволюций $i_{\tilde{\pi}}, i_{\tilde{\pi}'}, i_{\tilde{\pi}_0}$, можно указать еще одну инволюцию. Точками расслоенного произведения $\tilde{\tilde{C}}$ являются пары (x, x'), где x, x' – точки $\tilde{C} = \tilde{C}'$ и $\pi(\tilde{x} = \pi'(\tilde{x}'))$. Рассмотрим инволюцию $i_{\tilde{\pi}}$ на $\tilde{\tilde{C}}$, переставляющую координаты. Факторизуя $\tilde{\tilde{C}}$ по этому действию, получим кривую $\tilde{C}_1$, и двулистное накрытие $\tilde{\pi}_1 : \tilde{\tilde{C}} \to \tilde{C}_1$. Инволюции $i_{\tilde{\pi}_0}$ и $i_{\tilde{\pi}_1}$ коммутируют и порождают клейнову группу четвертого порядка. Факторизуя $\tilde{\tilde{C}}$ по ее действию, получаем кривую $C_1 = \mathbb{P}^1$ и накрытия π_0', π_1. Кривые $\tilde{C}_1'$ и C_0 и накрытия $\tilde{\pi}_1', \pi_1', \pi_0'', p_2$ существуют согласно теореме 6.3.2. Башня (***) построена. Отметим, что она содержит три блока башни (*): один на первом „этаже“ и два – на втором.

Прямым вычислением проверяется, что если $Y(\pi_1) = (C_1, W_{\pi_1}, U_{\pi_1})$, то

$$Y(\pi_1') = (C_1, i_{p_1}(W_{\pi_1}), i_{p_1}(U_{\pi_1})), \qquad (p_1)_*(W_{\pi_1}) = W_p,$$

т. е. можно считать $\pi_1' = i_{p_1} \cdot \pi_1$, $\tilde{C}_1' = \tilde{C}_1$. Значит, если вместо накрытия $\pi : \tilde{C} \to C$ исходить из накрытия $\pi_1 : \tilde{C}_1 \to C_1$ и проводить шаг за шагом ту же конструкцию, получим опять башню (***). В этом смысле она обратима.

Построенная башня (***) дает контрпример к теореме 6.3.5, когда нижнее накрытие композиции (6.3.1) неразветвлено. Рассмотрим композицию

$$\tilde{\tilde{C}} \xrightarrow{\tilde{\pi}_0} \tilde{C}_0 \xrightarrow{\pi_0''} C_0.$$

Нетрудно проверить, что это – неразветвленные накрытия.

Так как π_0 и π_0' – разветвленные накрытия, то по теореме 6.3.5 существование двух верхних блоков башни (***) эквивалентно условию $(\pi_0)_* U_{\tilde{\pi}_0} \equiv (\pi_0')_* U_{\tilde{\pi}_0} \equiv 0$. Пусть

$$(f) = (\pi_0)_* U_{\tilde{\pi}_0}, \quad (f_1) = (\pi_0')_* U_{\tilde{\pi}_0}, \quad (\tilde{f}) = 2U_{\tilde{\pi}_0}.$$

Тогда

$$((\pi_0')^*(f_1) \cdot i_{\pi_0''}(\pi_0^*(f))/i_{\pi_0'}(\tilde{f})) = U_{\tilde{\pi}_0} + i_{\pi''0}(U_{\tilde{\pi}_0})$$

Отсюда и $(\pi_0'')_* U_{\tilde{\pi}_0} \equiv 0$. Тем не менее башня (*) для композиции $\pi_0'' \cdot \tilde{\pi}_0$ не существует, ибо группа Галуа $Gal(\tilde{\tilde{C}}/\mathbb{P}^1)$ восьмого порядка и, кроме единичного элемента, содержит 5 инволюций $i_{\tilde{\pi}'}, i_{\tilde{\pi}'}, i_{\tilde{\pi}_0}, i_{\tilde{\pi}_1}, i_{\tilde{\pi}_1'}$ и два элемента четвертого порядка: $i_{\tilde{\pi}} \cdot i_{\tilde{\pi}_1}$ и $i_{\tilde{\pi}_1} \cdot i_{\tilde{\pi}}$.

Отметим, что невырожденная башня (***) существует и в случае, когда одна из точек W_π является точкой ветвления накрытия p. Но при этом $\tilde{\pi}_0, \pi_0''$ являются уже разветвленными накрытиями. Если же обе точки W_π являются точками ветвления, наша конструкция дает невырожденную башню (***) с π_0' неразветвленным, но $\tilde{\pi}_0, \pi_0''$ разветвленными.

Теорема 6.4.1. *Пусть $\pi : \tilde{C} \to C$ двулистное накрытие гиперэллиптической кривой C с гиперэллиптическим накрытием $p : C \to \mathbb{P}^1$, разветвленное в двух точках, не инволютивных относительно i_p. Тогда существует башня (***) и $(P_\pi, \Xi_\pi) = (J_{\tilde{C}_1}, \theta_{\tilde{C}_1})$.*

Доказательство. В обозначениях пар. 2 рассмотрим отображение

$$\tilde{Nm} \cdot \tilde{\varphi}_1 : \tilde{J}_1 \to \tilde{\tilde{J}} \to \tilde{J}.$$

Так как P функториально, то $\operatorname{Im}(\tilde{Nm} \cdot \tilde{\varphi}_1)$ лежит $P_{\tilde{\pi}}$. Покажем, что $\ker(\tilde{Nm} \cdot \tilde{\varphi}_1) = 0$. Пусть $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{\varphi}_1(\tilde{x}_1)$ принадлежит $\ker \tilde{Nm} = \ker(1 + i_{\tilde{\pi}})$. Тогда $i_{\tilde{\pi}_1}(\tilde{\tilde{x}}) = \tilde{\tilde{x}}$ и $i_{\tilde{\pi}}(\tilde{\tilde{x}}) = -\tilde{\tilde{x}}$. Отсюда

$$i_{\tilde{\pi}_0}(\tilde{\tilde{x}}) = [i_{\tilde{\pi}_1}, i_{\tilde{\pi}}](\tilde{\tilde{x}}) = i_{\tilde{\pi}_1} \cdot i_{\tilde{\pi}} \cdot i_{\tilde{\pi}_1} \cdot i_{\tilde{\pi}}(\tilde{\tilde{x}}) = \tilde{\tilde{x}}.$$

Но $\tilde{\pi}_0$ неразветвлено, следовательно (см. [101], п. 1.3, следствие 2), $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{\varphi}_0(\tilde{x}_0)$ принадлежит $\tilde{\varphi}_0(\tilde{J}_0)$.

По лемме 6.3.6

$$\ker \tilde{Nm} \cdot \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_1(\tilde{J}_1) \cap \tilde{\varphi}_0(\tilde{J}_0) = \tilde{\varphi}_1 \cdot \varphi_1(J_{\mathbb{P}^1}) = 0.$$

Поскольку $\dim \tilde{J}_1 = \dim P_\pi$ и P_π неприводимо, отображение $\tilde{Nm} \cdot \tilde{\varphi}_1 : \tilde{J}_1 \to P_\pi$ является изоморфизмом.

Докажем, что поляризации θ_1 и ξ_π соответствуют друг другу при полученном изоморфизме. Согласно пар. 2 имеем

$$\hat{\tilde{Nm}} \cdot \lambda_{\tilde{\theta}} \cdot \tilde{Nm} = \lambda_{\tilde{\tilde{\theta}}} \cdot (1 + i_{\tilde{\pi}}),$$

откуда

$$\hat{\tilde{\varphi}}_1 \cdot (\hat{\tilde{Nm}} \cdot \lambda_{\tilde{\theta}} \cdot \tilde{Nm}) \cdot \tilde{\varphi}_1 = \hat{\tilde{\varphi}}_1 \cdot \lambda_{\tilde{\tilde{\theta}}} \cdot \tilde{\varphi}_1 + \hat{\tilde{\varphi}}_1 \cdot \lambda_{\tilde{\tilde{\theta}}} \cdot i_{\tilde{\pi}} \cdot \tilde{\varphi}_1$$

Здесь

$$\hat{\tilde{\varphi}}_1 \cdot \lambda_{\tilde{\tilde{\theta}}} \cdot i_{\tilde{\pi}} \cdot \tilde{\varphi}_1 = \hat{\tilde{\varphi}}_1 \cdot \lambda_{\tilde{\tilde{\theta}}} \cdot \tilde{\varphi'}_1 = 0.$$

В самом деле, рассмотрим сквозной гомоморфизм

$$\tilde{J}_1 \times \tilde{J}_1 \xrightarrow{(\tilde{\varphi}_1),\tilde{\varphi'}_1} P_{\tilde{\pi}_0} \xrightarrow{Nm} P_\pi.$$

Для любой точки $\tilde{\tilde{x}}$ многообразия Прима $P_{\tilde{\pi}_0} \subset \tilde{\tilde{J}}$ имеем

$$\hat{\tilde{\varphi}}_1 \cdot \lambda_{\tilde{\tilde{\theta}}}(\tilde{\tilde{x}}) = \hat{\tilde{\varphi}}_1 \cdot cl(T^*_{\tilde{\tilde{x}}}\tilde{\tilde{\theta}} - \tilde{\tilde{\theta}}) = cl(T^*_{\tilde{\varphi}_1^{-1}(\tilde{\tilde{x}})}\tilde{\varphi}_1^*(\tilde{\tilde{\theta}}) - \tilde{\varphi}_1^*(\tilde{\tilde{\theta}})).$$

Причем, если

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{\varphi'}_1(\tilde{x'}_1) = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi'}_1)(0, x'_1),$$

то $\tilde{\varphi}_1^{-1}(\tilde{\tilde{x}}) = 0$. Итак,

$$\hat{\tilde{\varphi}}_1 \cdot \hat{\tilde{Nm}} \cdot \lambda_{\tilde{\theta}} \cdot \tilde{\varphi}_1 \cdot \tilde{Nm} = 2\lambda_{\tilde{\theta}}.$$

Но по определению $\lambda_{2\Xi} = \hat{\nu} \cdot \lambda_{\tilde{\theta}} \cdot \nu$, где ν – вложение многообразия Прима в якобиан. Значит, $\tilde{\theta}$ и Ξ соответствуют друг другу. □

Методами этого пункта можно доказать более общее утверждение.

Для семейства кривых $\mathcal{M}$ положим $Cov_{\mathcal{M}}(2n)$ равным множеству двулистных накрытий $\pi : \tilde{C} \to C$ таких, что $C \in \mathcal{M}, \deg W_\pi = 2n$.

Будем рассматривать $\mathcal{M} = M_g^h$ – многообразие модулей гиперэллиптических кривых рода g.

Теорема 6.4.2. *Существует биекция между $Cov_{M^h_{g_1}}(2g+2)$ и $Cov_{M^h_g}(2g_1+2)$, задаваемая башней (***).*

Если

$$\pi_1 : \tilde{C}_1 \to C_1 \in Cov_{M^h_{g_1}}(2g+2), \quad \pi : \tilde{C} \to C \in Cov_{M^h_g}(2g_1+2)$$

соответствующие накрытия, то существуют изогении

$$\alpha_1 : P_{\pi_1} \to P_\pi, \quad \ker \alpha_1 = \pi_1^*(J_2(C_1)), \qquad \alpha : P_\pi \to P_{\pi_1}, \quad \ker \alpha = \pi_1^*(J_2(C))$$

удовлетворяющие соотношениям $\alpha_1 \cdot \alpha = 2_{P_\pi}$, $\alpha \cdot \alpha_1 = 2_{P_{\pi_1}}$. При этом

$$\alpha_1^*(\rho_\pi) = 2\rho_{\pi_1}, \qquad \alpha^*(\rho_{\pi_1}) = 2\rho_\pi.$$

6.5 Отображение Прима

В этом параграфе мы покажем, что существует целая плоскость накрытий с одинаковым многообразием Прима. Пусть $\mathcal{M}$ – семейство кривых, а $\mathcal{M}\dot{\times}\tilde{S_{2n}}(C)$ – расслоенное пространство (см. [88]) с базой $\mathcal{M}$ и слоем $\tilde{S_{2n}}(C)$ над каждой кривой $C \in \mathcal{M}$. Тогда согласно утверждению пар. 2 и результатам пар. 3 существует отображение

$$Cov_{\mathcal{M}}(2n) = \mathcal{M}\dot{\times}Cov_C(2n) \to \mathcal{M}\dot{\times}\tilde{S_{2n}}(C) \to \mathcal{M}, \qquad (\pi : \tilde{C} \to C) \mapsto C,$$

причем первое отображение является вложением, а второе – канонической проекцией на базу. Обозначим сквозное отображение через Ψ. Посредством Ψ можно перенести структуру многообразия с $\mathcal{M}$ на $Cov_{\mathcal{M}}(2n)$.

Пусть $\mathcal{M} = M_g^h$ – многообразие модулей гиперэллиптических кривых рода g и $Cov_{M_g^h}(2)$ – многообразие, параметризующее двулистные накрытия гиперэллиптических кривых рода g, разветвленные в двух точках. Утверждение пар. 2 позволяет определить на $Cov_{M_g^h}(2)$ некоторую каноническую инволюцию, ассоциированную с гиперэллиптической инволюцией кривых:

$$\pi \in Cov_{M_g^h}(2), \quad Y(\pi) = (C, W, U) \;\Rightarrow\; i\pi \in Cov_{M_g^h}(2), \quad Y(i\pi) = (C, iW, iU).$$

Подмногообразие D неподвижных точек введенной инволюции параметризует двулистные накрытия, дивизоры ветвления которых инвариантны относительно гиперэллиптической инволюции.

Отображение Прима P сопоставляет каждому накрытию $\pi \in Cov_{M_g^h}(2)$ его главно поляризованное многообразие Прима (P_π, Ξ_π). Если $\pi \notin D$, то согласно теореме 6.4.1, $(P_\pi, \Xi_\pi) = (J_{\tilde{C}}, \theta_{\tilde{C}})$, и отображение Прима можно продолжить до отображения

$$P : (Cov_{M_g^h}(2) - -D) \to M_g^h, \qquad \pi \mapsto \tilde{C}_1.$$

Если $\pi \in D$, то действует теорема 6.3.5 и мы получаем башню (*). Отсюда согласно теореме 6.3.7 имеем $(P_\pi, \Xi_\pi) = (J_{C'}, \theta_{C'}) \times (J_{C''}, \theta_{C''})$, где C', C'' – гиперэллиптические кривые и $g(C') = g(C'') = \dim P_\pi = g$. Таким образом, на замкнутом подмножестве $D \subset$

$Cov_{M_g^h}(2)$ имеем

$$P : D \to \prod_{\gamma=0}^{g} M_\gamma^h, \qquad \pi \mapsto (C', C''), \qquad g(C') + g(C'') = g$$

Тот же результат методом варьирования можно получить из общей конструкции, но башня (***) уже вырождается.

Пусть $W_\pi = P + O$. Проварьируем Q в окрестности точки $i_p P$ кривой C. При этом будем варьировать U_π непрерывно, т. е. выберем некоторый лист $2^{2g(C)}$-листного отображения $(Cov_{M_g^h}(2) \to M_g^h \dot{\times} S_2(C)$. Пока $Q \neq i_p P$ имеется каноническая диаграмма (***). При совпадении Q с $i_p P$ имеем $(W_\pi, U_\pi) = (i_p W_\pi, i_p U_\pi)$ и $p(P) = p(Q)$.

Значит, накрытия $\tilde{\pi}$ и p_1 распадаются, $\tilde{\tilde{C}} = \tilde{\tilde{C}}^{(1)} \cup \tilde{\tilde{C}}^{(2)}$, C_1 – пара прямых $\mathbb{P}^1$. Получаем последовательности накрытий кривых

$$\tilde{\tilde{C}}^(i) \xrightarrow{\tilde{\pi}_1^{(i)}} \tilde{C}^(i) \xrightarrow{\pi_1^{(i)}} \mathbb{P}^1 \qquad (i = 1, 2). \tag{6.5.1}$$

При этом

$$W_{\pi_1^{(1)}} + W_{\pi_1^{(2)}} = W_{\pi_1} + p_1^{-1}(p(P)).$$

Отсюда

$$g(\tilde{C}_1^{(1)}) + g(\tilde{C}_1^{(2)}) = g(C) = g.$$

Как мы уже отмечали, $Cov_{M_g^h}(2)$ вкладывается в $M_g^h \dot{\times} S_2 \tilde{(C)}$, а именно, $(Cov_{M_g^h}(2) = (M_g^h \dot{\times} S_2 \tilde{(C)}) - \Delta$, где Δ – диагональ. Если интерпретировать $(C, 2P, U)$ как неразветвленное накрытие $(C, 0, U - P)$ с отмеченной точкой $P \in C$, то конструкцию пар 4 можно распространить на $M_g^h \dot{\times} S_2 \tilde{(C)}$. Надо проварьировать дивизор $W_\pi = P + Q$ к дивизору $W_\pi = 2P$, непрерывно варьируя и U_π. При этом $\tilde{\pi}$ и p_1 опять распадутся, но в (6.5.1) уже

$$W_{\pi_1^{(1)}} + W_{\pi_1^{(2)}} = W_{\pi_1}, \qquad g(\tilde{C}_1^{(1)}) + g(\tilde{C}_1^{(2)}) = g - 1$$

как и должно было быть, поскольку теперь π – неразветвленное накрытие.

Итак, получено отображение

$$P : M_g^h \dot{\times} S_2 \tilde{(C)} \to \prod_{\gamma=0}^{g} M_\gamma^h,$$

причем на замкнутых множествах $D, \Delta \subset M_g^h \dot{\times} S_2 \tilde{(C)}$, где $D := \{(C, W, U) \mid iW = W\}$ (i – гиперэллиптическая инволюция C), $\Delta := \{(C, W, U) \mid W = 2P,\ P \in C\}$, имеем

$$\pi \mapsto (C', C'')$$

и $g(C') + g(C'') = g$, если $\pi \in D$, или $g(C') + g(C'') = g - 1$, если $\pi \in \Delta$, а на их дополнении $\overline{D \cup \Delta}$

$$\pi \mapsto \tilde{C}_1,$$

где $g(\tilde{C}_1) = g$. При этом

$$(P_\pi, \Xi_\pi) = (J_{C'}, \theta_{C'}) \times (J_{C''}, \theta_{C''}) \qquad (\pi \in D \cup \Delta),$$

$$(P_\pi, \Xi_\pi) = (J_{\tilde{C}_1}, \theta_{\tilde{C}_1}) \qquad (\pi \in \overline{D \cup \Delta}).$$

Благодаря обратимости конструкции башни (***), можно вычислить слой отображения P. По паре накрытий

$$\tilde{C}_1 \xrightarrow{\pi_1} C_1 = \mathbb{P}^1 \xrightarrow{p_1} \mathbb{P}^1$$

можно восстановить всю башню, а следовательно, и накрытие $\pi : \tilde{C} \to C$. Сопоставление $\tilde{C}_1, i_{p_1} \mapsto \pi$ задает отображение

$$M_g^h \times \mathrm{Inv}\mathbb{P}^1 \xrightarrow{p_1} M_g^h \dot{\times} S_2 \tilde{(C)},$$

где $\mathrm{Inv}\mathbb{P}^1$ – множество инволюций $\mathbb{P}^1$. При этом, хотя накрытие π_1 определяется с точностью до $\mathrm{Aut}\mathbb{P}^1$, это влечет неоднозначность p (до $\mathrm{Aut}\mathbb{P}^1$), тогда как π определяется однозначно. Значит, отображение корректно.

Далее, это отображение инъективно. Действительно, если парам $(\tilde{C}_1, i_{p_1}), (\tilde{C}'_1, i'_{p_1})$ соответствует одно и то же π, то диаграммы (***) отличаются только на автоморфизмы $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ и $C_1 \to C_1$. Образом построенного отображения будет $M_g^h \dot{\times} S_2 \tilde{(C)} - D \cup \Delta$. Отображение станет сюръективным, если распространить его на вырожденные башни (***).

Автоморфизмы $\mathbb{P}^1$ задаются элементами $\mathbf{PGL}(2)$, а инволюции – матрицами

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathbf{PGL}(2)$$

и, следовательно, параметризуются точками

$$(a:b:c)\in\mathbb{P}^2, \qquad a^2+bc\neq 0.$$

Доказана

Теорема 6.5.1. *Слои отображения P над точками M_g^h биективны $\mathbb{P}^2-V$, где V – плоская кривая $a^2+bc=0$. Существует бирациональный изоморфизм $M_g^h\times\mathbb{P}^2\to M_g^h\dot{\times}S_2\tilde{(C)}$.*

Следствие 6.5.2. $M_g^h\dot{\times}S_2\tilde{(C)}$ *– унирациональное многообразие.*

Известно, что для гиперэллиптических кривых локальная теорема Торелли неверна, тем не менее глобальная теорема Торелли справедлива. В то же время для двулистных накрытий гиперэллиптических кривых не выполняется уже „глобальная теорема Торелли“, т. е. по поляризованному многообразию Прима само накрытие восстанавливается неоднозначно. Согласно доказанной теореме для любого накрытия $\pi:\tilde{C}\to C$ существует параметризованное проективной плоскостью семейство накрытий, поляризованные многообразия Прима которых совпадают с (P_π,Ξ_π).

Имеем два отображения из $Cov_{M_g^h}(2)$ в M_g^h:

$$\begin{array}{ccc} & Cov_{M_g^h}(2) & \\ \Psi\swarrow & & \searrow P \\ M_g^h & & M_g^h \end{array}$$

Что можно сказать о пересечении слоев этих отображений?

Пусть $(\tilde{C}_1,i_{p_1}),(\tilde{C}_1,i_{p_1}^+)$ принадлежат слою $P^{-1}(\tilde{C}_1)$, где $\tilde{C}_1\in M_g^h$, $i_{p_1},i_{p_1^+}\in\mathrm{Inv}\mathbb{P}^1$. Построим для них башни (***). Получим два накрытия

$$\pi:\tilde{C}\to C, \qquad \pi^+:\tilde{C}^+\to C^+.$$

Тогда

$$\Psi(\tilde{C}_1,i_{p_1})=\Psi(\tilde{C}_1,i_{p_1^+})\iff C=C^+\iff p_1(W_{\pi_1})=\alpha(p_1^+(W_{\pi_1^+})),$$

где $\alpha \in \mathrm{Aut}\mathbb{P}^1$. Это следует из того, что для $p : C \to \mathbb{P}^1$, $p^* : C^* \to \mathbb{P}^1$' имеем соответственно

$$W_p = p_1(W_{\pi_1}) \qquad W_{p^+} = p_1^+(W_{\pi_1^+}).$$

Но башни (***) определяются с точностью до нижнего автоморфизма $\alpha : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Поэтому после соответствующей замены можно считать, что $p_1(W_{\pi_1}) = p_1^+(W_{\pi_1^+})$. Теперь заметим, что $p_1^+ = p_1 \cdot \beta$, где $\beta \in \mathrm{Aut}C_1$ $(C_1 = \mathbb{P}^1)$. При этом $i_{p_1^+} = \beta^{-1} \cdot i_{p_1} \cdot \beta$. Итак,

$$\Psi(\tilde{C}_1, i_{p_1}) = \Psi(\tilde{C}_1, i_{p_1^+}) \iff p_1(W_{\pi_1}) = p_1(\beta(W_{\pi_1})) \iff \beta(W_{\pi_1}) = W_{\pi_1}^{\epsilon}$$

где, если $W_{\pi_1} = \sum_{k=1}^{2g+2} P_k$, то $W_{\pi_1}^{\epsilon} = \sum_{k=1}^{2g+2} \epsilon_k P_k$, $\epsilon_k = 1$ или i.

Из соображений монодромии дивизоры $W_{\pi_1} \in S_{2g+2}\mathbb{P}^1 \mid \beta(W_{\pi_1}) = W_{\pi_1}^{\epsilon}$, имеют коразмерность, не меньшую 1. Таким образом, справедлива

Теорема 6.5.3. *Отображение Ψ инъективно на общем слое отображения P.*

Глава 7

Башни кривых и многообразия Прима

Задача отличения многообразий Прима от якобианов кривых стала актуальной после решения проблемы рациональности кубики Клеменсом и Гриффитсом [81]. Было установлено, что при разложении среднего якобиана в прямую сумму двух компонент, одна из которых является произведением якобианов кривых, а другая – компонента Гриффитса [110] – не содержит якобианов кривых, они преобразуются автономно, причем компонента Гриффитса является бирациональным инвариантом. В случае кубики в $\mathbb{P}^1$ (а также расслоения на коники, пересечения трех квадрик [112]) средний якобиан возникает как многообразие Прима двулистного накрытия, поэтому появляется необходимость отличения его от якобиана кривой.

Усилиями Мамфорда [101], разобравшего общий случай, и Тюрина [110], [111], Рецилласа [102], автора [1], Масиевицкого [97], исследовавшими оставшиеся специальные случаи, был получен ответ для многообразий Прима неразветвленных двулистных накрытий. В статье автора [2] было показано, что в случае разветвленного в двух точках накрытия гиперэллиптической кривой, как и в неразветвленном случае, многообразие Прима изоморфно якобиану кривой. Развивая метод башен кривых и накрытий, мы в этой главе докажем, что многообразие Прима, разветвленного в двух точках двулистного накрытия тригональной кривой, является якобианом при ограничительных условиях на точки ветвления (пар. 5 предыдущей главы).

Сводка основных обозначений

$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ – циклическая группа порядка k,

$R(C)$ – поле рациональных функций кривой C,

$C_1 \times_C C_2$ – расслоенное произведение,

W_π – дивизор ветвления накрытия $\pi : \tilde{C} \to C$,

U_π – половинка дивизора ветвления, соответствующая двулистному накрытию π,

(W_π, U_π) – характеристика двулистного накрытия π,

(W_1, W_2) – общая часть дивизоров W_1, W_2,

i_π – инволюция кривой C, индуцированная двулистным накрытием π,

$G(\tilde{C}/C) = Gal(R(\tilde{C})/R(C))$– группа Галуа накрытия π,

$\deg \pi$ – степень накрытия π,

$1 = id$ – тождественное отображение,

$\hat{A}$ – двойственное многообразие к абелеву многообразию A,

$\hat{\alpha}\hat{B} \to \hat{A}$ – дуальное отображение к $\alpha : A \to B$.

Раздел I. БАШНИ КРИВЫХ И НАКРЫТИЙ

7.1 Категория конечнолистных накрытий

Построим категорию конечнолистных накрытий полных неособых кривых Cov. Объектами этой категории являются конечнолистные накрытия полных неособых кривых $\pi : \tilde{C} \to C$. Морфизм объекта $\pi : \tilde{C} \to C$ в объект $\pi' : \tilde{C}' \to C'$ определяется как пара накрытий $(\tilde{\alpha} : \tilde{C} \to \tilde{C}', \alpha : C \to C')$, удовлетворяющая условию коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{C}' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ C & \xrightarrow{\alpha} & C' \end{array} \qquad (T_1 1)$$

Композицией морфизмов $(\tilde{\alpha}, \alpha) : \pi \to \pi'$ и $(\tilde{\alpha}', \alpha') : \pi' \to \pi''$ называется морфизм $(\tilde{\alpha}' \cdot \tilde{\alpha}, \alpha' \cdot \alpha) : \pi \to \pi''$. Проверка аксиом категории тривиальна.

В категории Cov можно определить понятие расслоеного произведения. Если $\pi_1 : \tilde{C}_1 \to C$ и $\pi_2 : \tilde{C}_2 \to C$ – накрытия с общим концом C, их расслоенным произведением назовем пару накрытий

$$\tilde{\pi}_1 : \check{C} \to \tilde{C}_1, \qquad \tilde{\pi}_2 : \check{C} \to \tilde{C}_2,$$

удовлетворяющую условиям:

(i) $\pi_1 \cdot \tilde{\pi}_1 = \pi_2 \cdot \tilde{\pi}_2$

(ii) свойству универсальности: если пара накрытий $\alpha_1 : X \to \tilde{C}_1, \alpha_2 : X \to \tilde{C}_2$ подчиняется равенству $\pi_1 \cdot \alpha_1 = \pi_2 \cdot \alpha_2$, то существует единственный морфизм $\alpha : X \to \check{C}$ такой, что $\pi_1 \cdot \alpha_1 = \pi_2 \cdot \alpha_2$. Из свойства универсальности сразу выводится единственность расслоенного произведения (с точностью до изоморфизма). Существование расслоенных произведений в более общей ситуации доказывается, например, в [100], [107] (а также в фундаментальных учебниках по алгебраической геометрии [92], [91], [98], [113]).

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & \pi & \alpha \downarrow & \tilde{\alpha} & \\
 & & \check{C} & & \\
 & \swarrow \tilde{\pi}_1 & & \tilde{\pi}_2 \searrow & \\
\tilde{C}_1 & & & & \tilde{C}_2 \\
\pi_1 \searrow & & & & \swarrow \pi_2 \\
 & & C & &
\end{array} \qquad (T2)$$

Рассмотрим накрытие Галуа $\tau : \check{C} \to C$ с группой Галуа G. Каждой подгруппе H группы G соответствует кривая C_H, получаемая из C факторизацией по действию H. Паре вложенных подгрупп $H_! \subset H_2$, соответствует каноническое конечнолистное накрытие $C_{H_1} \to C_{H_2}$. Возьмем все получаемые описанным образом кривые и те из накрытий, которые не разлагаются в произведение других таких же накрытий. Построенную башню кривых и накрытий назовем башней Галуа накрытия τ. Если рассматривать полученную башню как ориентированный граф, то очевидно, что он будет совпадать с графом структуры подгрупп группы G. Типом башни назовем соответствующий ей орграф. Две однотипные башни называются изоморфными, если между их соответствующими кривыми существуют изоморфизмы, объединяющие эти две башни в одну коммутативную башню. Внутренние автоморфизмы группы G определяют автоморфизмы башен Галуа с изоморфизмами сопряжения соответствующих кривых.

Предложение 7.1.1. *Пусть $\tau : \check{C} \to C$ – накрытие Галуа с группой Галуа $G(\check{C}/C) = G$, подгруппы $\tilde{H}_1 \subset H_1$, группы G сопряжены подгруппам $\tilde{H}_2 \subset H_2$, а*

$$\pi_1 : \tilde{C}_1 = \check{C}/\tilde{H}_1 \to C_1 = \check{C}/H_1, \qquad \pi_2 : \tilde{C}_2 = \check{C}/\tilde{H}_2 \to C_2 = \check{C}/H_2$$

ассоциированные накрытия кривых. Тогда π_1 изоморфно π_2, т.е. существует коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_1 & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{C}_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ C_1 & \xrightarrow{\alpha} & C_2 \end{array}$$

с бирегулярными изоморфизмами $\tilde{\alpha}$ и α.

Доказательство. Пусть для $j \in G, \quad \sigma_j(g) = jgj^{-1}, \quad g \in G$ и

$$\sigma_j(\tilde{H}_1) = \tilde{H}_2, \qquad \sigma_j(H_1) = H_2.$$

Определим изоморфизмы $\tilde{\alpha} : \tilde{C}_1 \to \tilde{C}_2$, $\alpha : C\_1 \to C_2$ равенствами

$$\tilde{\alpha}(\tilde{H}_1 x) = \tilde{H}_2 j(x), \qquad \alpha(H_1 x) = H_2 j(x).$$

Они определены корректно и обратимы:

$$\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{H}_2 x) = \tilde{H}_1 j(x), \qquad \alpha^{-1}(H_2 x) = H_1 j(x).$$

□

7.2 Нормализации трехлистных накрытий

Двулистные накрытия всегда являются накрытиями Галуа, но уже для трехлистных накрытий это не верно. Пусть $t_0 : C_0 \to C$ – произвольное трехлистное накрытие. Соответствующее расширение полей рациональных функций является кубическим, и можно считать, что $R(C_0) = R(C)(x)$, где x – корень уравнения

$$f(X) = X^3 + aX + b = 0, \qquad a, b \in R(C).$$

Если дискриминант $\Delta = -4a^3 - 27b^2$ равен квадрату элемента из $R(C)$, то $R(C_0)/R(C)$ является расширением Галуа с группой Галуа $Gal(R(C_0)/R(C)) = G(C_0/C)$, изоморфной циклической группе $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ([121]). Очевидно, что в этом случае у трехлистного накрытия все точки ветвления индекса три, и обозначив их число через w, по формуле Гурвица получим

$$g(C_0) = w - 2 + 3g(C).$$

Если $\Delta \notin R(C)^2$, то расширение $R(C_0)/R(C)$ не является расширением Галуа, ибо не нормально. Поле разложения F многочлена $f(X)$ (на линейные множители) имеет степень 6 относительно $R(C)$ и группа Галуа $Gal(F/R(C))$ изоморфна симметрической группе S_6. Неособая модель $\tilde{C}_N$ поля F шестилистно накрывает C, причем существует коммутативная башня кривых и накрытий

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \tilde{C}_N & & & \\
\nu_0 \swarrow & t \downarrow & \nu_1 \searrow & \nu_2 & \\
C_0 & X & C_1 & C_2 & \\
t_0 \searrow & \nu \downarrow & t_1 \swarrow & t_2 & \\
 & C & & &
\end{array} \qquad (T3)
$$

Предложение 7.2.1. *Шестилистное накрытие $\tau : \tilde{C}_N \to C$ допускает башню (T3) с различными двулистными накрытиями ν_0, ν_1, ν_2 и трехлистным накрытием t тогда и только тогда, когда оно является накрытием Галуа с группой Галуа $G(\tilde{C}_N/C) \cong S_3$. При этом $\tilde{C} = C_k \times_C X \quad (k = 0, 1, 2)$.*

Доказательство очевидно.

Обозначив через j элемент третьего порядка группы $G(\tilde{C}/C)$.

Предложение 7.2.2. *Существуют бирегулярные изоморфизмы* $\vartheta_{kl} : C_k \to C_l \quad (k, l = 0, 1, 2, \quad k, l)$, *вписывающиеся в коммутативные башни*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_N & \xrightarrow{j^{l-k}} & \tilde{C}_N \\ \nu_k \downarrow & & \downarrow \nu_l \\ C_N & \xrightarrow{\vartheta_{kl}} & C_N \\ t_k \searrow & & \swarrow t_l \\ & C & \end{array}$$

Доказательство получается специализацией предложения 7.2.1.

Предложение 7.2.3. *В башне (T3) накрытия* t_0, t_1, t_2 *разветвлены над одним и тем же дивизором* $W = W_2 + W_3$, *причем над точками* W_m *имеют ветвления индекса* m, *двулистные накрытия* ν, ν_0, ν_1, ν_2 *разветвлены над дивизорами*

$$W_\nu = W_2, \quad W_{\nu_k} = t_k^*(W_2) \ (\mathrm{mod} 3) \quad (k = 0, 1, 2),$$

а трехлистное накрытие t *имеет только ветвления индекса три над дивизором* $\nu^*(W_3)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что сквозное шестилистное накрытие может иметь только ветвления индексов два и три. □

Следствие 7.2.4. *Тригональное накрытие* $C_0 \to \mathbb{P}^1$ *нормально тогда и только тогда, когда все его точки ветвления индекса три.*

Доказательство. Действительно, если тригональное накрытие с ветвлениями индекса три не нормально, то, нормализуя его, получим башню (T3) с распадающимся накрытием ν. Обратное утверждение было доказано. □

Следствие 7.2.5. *В башне (T3) трехлистные накрытия* t_0, t_1, t_2 *не нормальны, причем башня, возникающая при нормализации любой из них, совпадает с башней (T3).*

Предложение 7.2.6. *Накрытия* $\nu_k, t_k \quad (k = 0m1m2)$ *и автоморфизм третьего порядка* $j \in G(\tilde{X}_k/C)$ *связаны соотношением*

$$(\nu_k)_* \cdot j \cdot \mu_k^* = t_k^* \cdot (t_k)_* - id.$$

Доказательство. Проверяется непосредственно. □

7.3 Восьмилистные накрытия группы квадрата

Ключевую роль в получении основных результатов настоящей главы будет играть конструируемая в следующем параграфе „многоэтажная“ башня (T5). В предыдущем параграфе мы отдельно исследовали нижний блок этой башни. Этот параграф посвящен изучению трех однотипных верхних блоков этой башни. Впервые башни такого типа появились при доказательстве совпадения примианов разветвленных двулистных накрытий гиперэллиптических кривых с якобианами (см. статью [2] автора).

Группа Галуа восьмилистного накрытия Галуа имеет порядок 8. Неабелевых групп восьмого порядка всего две: группа единиц тела кватернионов и группа Q движений плоскости, переводящих фиксированный квадрат в себя. Эта группа изоморфна сопряженным между собой подгруппам восьмого порядка симметрической группы S_4 и называется группой квадрата.

Определение 7.3.1. Композицию двулистных накрытий

$$\tilde{\tilde{C}} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$$

назовем *диаграммизуемой*, если сквозное четырехлистное накрытие является накрытием Галуа с группой Галуа

$$G(\tilde{\tilde{C}}/C) = \mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Теоремы 6.3.2 и 6.3.5 главы 6 дают некоторые необходимые и достаточные условия диаграммизуемости.

Предложение 7.3.1. *Восьмилистное накрытие* $\tau : \tilde{\tilde{C}} \to C$ *допускает разложение в башню (T4) из двулистных накрытий с недиаграммизуемой композицией* $\pi_0 \cdot \tilde{\pi}_0$ *тогда и только тогда, когда* τ *является накрытием Галуа с группой Галуа* C, *изоморфной группе квадрата* Q.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{\tilde{C}} & & \\
\tilde{\pi}'_1 & \tilde{\pi}'_2 \swarrow & \tilde{\pi}_0 \downarrow & \tilde{\pi}''_1 \searrow & \tilde{\pi}''_2 \\
\tilde{C}'_1 \quad & \tilde{C}'_2 & \tilde{C}_0 & \tilde{C}''_1 & \quad \tilde{C}'_2 \\
\pi'_1 \searrow & \pi'_2 \downarrow \pi'_0 \swarrow & \downarrow \pi_0 & \searrow \pi''_0 \downarrow \pi''_1 & \swarrow \pi''_2 \\
 & \tilde{C}' & \tilde{C} & \tilde{C}'' & \\
 & \tilde{\pi}' \searrow & \tilde{\pi} \downarrow & \swarrow \tilde{\pi}'' & \\
 & & C & &
\end{array} \qquad (T4)$$

Доказательство. Из существования башни (T4) следует, что группа $R(C)$-автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{R(C)} R(\tilde{\tilde{C}})$ поля $R(\tilde{\tilde{C}})$ заведомо содержит инволюции $i_{\tilde{\pi}'_1}$, $i_{\tilde{\pi}'_2}$, $i_{\tilde{\pi}_0}, i_{\tilde{\pi}''_1}$, $i_{\tilde{\pi}''_2}$ и значит порядок ее, который должен делить степень расширения $[R(\tilde{\tilde{C}}) : R(C)]$, равен восьми, т. е. τ является накрытием Галуа.

Подгруппа $G(\tilde{\tilde{C}})/\tilde{C})$ группы $G(\tilde{\tilde{C}})/C)$ отлична от $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, следовательно, циклическая. Группа $G(\tilde{\tilde{C}})/C)$ порождается образуюшей j этой циклической группы и, скажем, инволюцией $i_{\tilde{\pi}'_1} = i$, причем если бы $ij = ji$, то $1 = (ij)^2 = j^2$, поэтому $ij = j^3 i$. Значит G_τ изоморфна группе квадрата. Обратное утверждение теоремы получается факторизацией $\tilde{\tilde{C}}$ по действию подгрупп группы G_τ. □

В гл. 6 башня (T3) получается следующим построением. Рассматриваются двулистные накрытия π'_1 и π'. Строится накрытие $\pi'_2 = i_{\pi'} \cdot \pi'_1$ и расслоенное произведение $\tilde{\tilde{C}} = \tilde{C}'_1 \times_{\tilde{C}'} \tilde{C}'_2$ с каноническими накрытиями (проекциями) $\tilde{\pi}'_1$ и $\tilde{\pi}'_2$. Устанавливается, что на $\tilde{\tilde{C}}$ кроме $i_{\tilde{\pi}'_1}, i_{\tilde{\pi}'_2}$ есть еще ровно три инволюции, факторизуя по действию которых получаем накрытия $\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}'_1, \tilde{\pi}'_2$ и π''_1, π''_2. Остальные накрытия существуют из условия диаграммизуемости (гл. 6, теорема 6.3.2).

Мы покажем, что приведенная конструкция универсальна, т. е. любая башня (T4) может быть получена таким построением.

Предложение 7.3.2. *Между кривыми $\tilde{C}'_1$ и $\tilde{C}'_2$ башни (T4) существует бирегулярный изоморфизм $\gamma : \tilde{C}'_1 \to \tilde{C}'_2$, вписывающийся в коммутативный квадрат*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}'_1 & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{C}'_2 \\ \pi'_1 \downarrow & & \downarrow \pi'_2 \\ \tilde{C}' & \xrightarrow{i_{\pi'}} & \tilde{C}' \end{array}$$

Доказательство. следует из предложения 7.1.1. □

Следствие 7.3.3. *Приведенная выше конструкция башни (T4) универсальна.*

Доказательство. Достаточно отождествить $\tilde{C}'_1$ и $\tilde{C}'_2$ с помощью изоморфизма γ. □

Заметим, что из соображений симметрии утверждение предложения 7.3.2 справедливо и для кривых $\tilde{C}''_1$ и $\tilde{C}''_2$, поэтому конструировать башню (T4) можно, исходя и из композиции $\pi'' \cdot \pi''_1$. Это так называемое свойство обратимости (конструкции) башни (T4).

Предложение 7.3.4. *Характеристики накрытий π'_1, π' и π'' связаны соотношениями*

$$W_{\pi''} = \pi'_*(W_{\pi'_1} - W_0), \qquad U_{\pi''} \equiv (\pi'^*)^{-1}(U_{\pi'_1} + i_{\pi'}U_{\pi'_1} - W_0),$$

$$W_0 = (W_{\pi'_1}, i_{\pi'}W_{\pi'_1}) - ((W_{\pi'_1}, i_{\pi'}W_{\pi'_1}), W_{\pi'}),$$

где $W_{\pi'}$ – дивизор ветвления π', $W_{\pi'_1}$ – дивизор, над которым разветвлено π'_1, $U_{\pi'_1}$ – половинка $W_{\pi'_1}$, соответствующая π'_1, а $(W_{\pi''}, U_{\pi''})$ – характеристика π''.

7.4 Накрытия Галуа с группой S_4

В этом параграфе мы построим и изучим башни двадцатичетырехлистных накрытий Галуа с группой Галуа, изоморфной симметрической группе S_4.

Основная конструкция. Пусть $t_0 : C_0 \to C$ – не нормальное трехлистное накрытие, $\pi_0 : \tilde{C}_0 \to C_0$ – двулистное накрытие. Нормализуя t_0 согласно пар. 2, получим башню (T3). Построим расслоенное произведение $\tilde{\tilde{C}}_0 = \tilde{C}_0 \times_{C_0} \tilde{C}_N$ с канонической проекцией $\tilde{\nu}_0 : \tilde{\tilde{C}}_0 \to \tilde{C}_N$, а также отображение

$$\tilde{\nu}_1 = j \cdot \tilde{\nu}_0 : \tilde{\tilde{C}}_1 = \tilde{\tilde{C}}_0 \to \tilde{C}_N,$$

где j – элемент третьего порядка группы $G(\tilde{C}_N/C))$, и кривую $\check{C} = \tilde{\tilde{C}}_0 \times_{\tilde{C}_N} \tilde{\tilde{C}}_1$ с каноническими проекциями $\tilde{\tilde{\nu}}_0$ и $\tilde{\tilde{\nu}}_1$.

Предложение 7.4.1. *Сквозное отображение $\tau : \check{C} \to$, получающееся в результате основной конструкции, является накрытием Галуа с группой Галуа $G_\tau \cong S_4$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (D): существует дивизор D без кратных компонент такой, что*

$$(t_0)_*(W_{\pi_0}) = 2D, \qquad (t_0)_*(U_{\pi_0}) \cong D.$$

Любое накрытие Галуа с группой Галуа S_4 может быть получено с помощью основной конструкции.

Доказательство. Предположим сначала, что $G_\tau \cong S_4$. Факторизуя $\check{C}$ по действию подгрупп группы S_4, получим башню (T5), где стрелки, обозначенные буквой q с различными метками представляют четырехлистные накрытия, буквой t – трехлистные накрытия, а буквами π и ν – двулистные накрытия. Чтобы не перегрузить рисунок, мы чертим только один из трех блоков типа (T4) и накрытие

$$\tilde{\tilde{t}}_k \quad (k = 0, 1, 2, 3),$$

ассоциированное с одним из четырех сопряженных друг другу подгрупп третьего порядка группы S_4.

Из предположения $G_\tau = S_4$ следует, что $G(\check{C}/\tilde{C}_N \cong \mathbb{K}$ является нормальным делителем в G_τ. Значит $\tilde{C}_N$ будет накрытием Галуа с группой Галуа $G(\tilde{C}_N/C) \cong S_4$, и следовательно, согласно пар. 2 будет нормализацией накрытия $t_0 : C_0 \to C$.

$$
\begin{array}{c}
\check{C} \\
\tilde{\tilde{\pi}}_0'' \qquad \tilde{\tilde{\pi}}_0' \qquad \tilde{\tilde{\nu}}_0 \swarrow \tilde{\tilde{\nu}}_1 \downarrow \tilde{\tilde{\nu}}_2 \qquad \tilde{\tilde{t}}_k \\
\tilde{\tilde{C}}_0'' \qquad \tilde{\tilde{C}}_0' \qquad \tilde{\tilde{C}}_0 \qquad \tilde{\tilde{C}}_1 \qquad \tilde{\tilde{C}}_2 \qquad \tilde{Y}_k \\
\tilde{\pi}_0'' \searrow \tilde{\pi}_0' \downarrow \tilde{\pi}_0 \swarrow \tilde{\nu}_0' \downarrow \tilde{\nu}_0 \searrow \tilde{\nu}_1 \downarrow \tilde{\nu}_2 \swarrow \qquad \tilde{t}_k \qquad \downarrow \mu_k \\
\tilde{C}_0 \qquad \tilde{C}_0' \qquad \tilde{C}_N \qquad \tilde{Y}_k \\
\pi_0 \searrow \nu_0' \downarrow \nu_0 \swarrow \nu_1 \downarrow \nu_2 \searrow \qquad t \qquad \tilde{q}_k \\
C_0 \qquad C_1 \qquad C_2 \qquad X \\
t_0 \qquad t_1 \searrow \ t_2 \downarrow \ \nu \swarrow \qquad q_k \\
C
\end{array}
\qquad (T5)
$$

Лемма 7.4.2. *Если кривая $\check{C}$ башни из двулистных накрытий (T6)*

$$
\begin{array}{c}
\check{C} \\
\tilde{\tilde{\nu}}_0 \swarrow \tilde{\tilde{\pi}}_1 \downarrow \quad \searrow \tilde{\tilde{\pi}}_2 \\
\tilde{\tilde{C}}_0 \qquad \tilde{\tilde{C}}_1 \qquad \tilde{\tilde{C}}_2 \\
\tilde{\nu}_0 \searrow \tilde{\nu}_1 \downarrow \quad \swarrow \tilde{\nu}_2 \\
\tilde{C}_N
\end{array}
\qquad (T6)
$$

имеет такой автоморфизм j_k, третьего порядка, что $i_{\tilde{\nu}_0} = j_k^2 i_{\tilde{\nu}_1} = j_k i_{\tilde{\nu}_2} j_k^2$, то существуют автоморфизм $j \in G(\tilde{C}_N/C)$ третьего порядка и изоморфизмы $\vartheta_{rs} : \tilde{\tilde{C}}_r \to \tilde{\tilde{C}}_s$ $(r < s)$, вписывающиеся в коммутативную диаграмму (T7)

$$
\begin{array}{ccccc}
\check{C} & \xrightarrow{j_k} & \check{C} & \xrightarrow{j_k} & \check{C} \\
\tilde{\tilde{\nu}}_0 \downarrow & & \tilde{\tilde{\nu}}_1 \downarrow & & \downarrow \tilde{\tilde{\nu}}_2 \\
\tilde{\tilde{C}}_0 & \xrightarrow{\vartheta_{01}} & \tilde{\tilde{C}}_1 & \xrightarrow{\vartheta_{12}} & \tilde{\tilde{C}}_2 \\
\tilde{\nu}_0 \downarrow & & \tilde{\nu}_1 \downarrow & & \downarrow \tilde{\nu}_2 \\
\tilde{C}_N & \xrightarrow{j} & \tilde{C}_N & \xrightarrow{j} & \tilde{C}_N
\end{array}
\qquad (T7)
$$

Доказательство получается специализацией предложения 7.1.1.

Из леммы 7.4.2 следует универсальность основной конструкции. Проверим выполнение условия (D).

Лемма 7.4.3. *Если $\tilde{C}_N$ – кривая с автоморфизмом j третьего порядка, то для существования коммутативной башни (T6) с $\tilde{\nu}_l = j^l \cdot \tilde{\nu}_0$ $(l = 1, 2)$ необходимо и достаточно, чтобы характеристика $(W_{\tilde{\nu}_0}, U_{\tilde{\nu}_0})$ накрытия $\tilde{\nu}_0$ удовлетворяла условию $(\tilde{D})$:*

$$(1 + j + j^2)W_{\tilde{\nu}_0} = 2\tilde{D}, \qquad (1 + j + j^2)U_{\tilde{\nu}_0} \equiv \tilde{D},$$

где $\tilde{D}$ – j-инвариантный дивизор без j-неподвижных точек и кратных компонент.

Доказательство. В самом деле, согласно лемме 6.3.1 гл. 6 характеристики башни (T6) должны удовлетворять соотношениям

$$W_{\tilde{\nu}_0} = W_{\tilde{\nu}_1} + W_{\tilde{\nu}_2} - 2(W_{\tilde{\nu}_1}, W_{\tilde{\nu}_2}), \qquad U_{\tilde{\nu}_0} \equiv U_{\tilde{\nu}_1} + U_{\tilde{\nu}_2} - (W_{\tilde{\nu}_1}, W_{\tilde{\nu}_2}).$$

Откуда

$$W_{\tilde{\nu}_0} + W_{\tilde{\nu}_1} + W_{\tilde{\nu}_2} = (1 + j + j^2)W_{\tilde{\nu}_0} = 2W_{\tilde{\nu}_0} + 2(W_{\tilde{\nu}_1}, W_{\tilde{\nu}_2})$$

$$U_{\tilde{\nu}_0} + U_{\tilde{\nu}_1} + U_{\tilde{\nu}_2} \equiv (1 + j + j^2)U_{\tilde{\nu}_0} \equiv W_{\tilde{\nu}_0} + (W_{\tilde{\nu}_1}, W_{\tilde{\nu}_2}).$$

Очевидно, что $\tilde{D} = W_{\tilde{\nu}_0} + (W_{\tilde{\nu}_1}, W_{\tilde{\nu}_2})$ j-инвариантен и имеет только однократные точки. Если бы он имел неподвижную относительно j точку, то эта точка принадлежала бы всем дивизорам ветвления $W_{\tilde{\nu}_0}, W_{\tilde{\nu}_1}, W_{\tilde{\nu}_2}$, что противоречит условию существования башни (T6). Лемма 7.4.3 доказана. □

Поскольку мы предположили, что в результате основной конструкции получается башня (T5) с группой Галуа S_4, то на основании леммы 7.4.2 $\tilde{\nu}_l = j^l \cdot \nu_0$ $(l = 1, 2)$ и, следовательно, согласно лемме 7.4.3

$$(1 + j + j^2)W_{\tilde{\nu}_0} = 2\tilde{D}, \qquad (1 + j + j^2)U_{\tilde{\nu}_0} \equiv \tilde{D},$$

где $\tilde{D}$ j-инвариантен, без кратных компонент и j-неподвижных точек. Кроме того, применяя лемму 6.3.4 гл. 1, получаем

$$W_{\tilde{\nu}_0} = \nu_0^*(W_{\pi_0} - (W_{\pi_0}, W_{\nu_0})), \qquad U_{\tilde{\nu}_0} \equiv \nu_0^*(U_{\pi_0}) - \frac{1}{2}\nu_0^*(W_{\pi_0}, W_{\nu_0}).$$

Отсюда следует, что $\tilde{D}$ также i_{ν_0}-инвариантен, но может содержать i_{ν_0}-неподвижные точки. Значит

$$(t_0)_*(\nu_0)_*(\tilde{D}) = \sum_R 6P_r + \sum_S 3Q_s,$$

где над Q_s накрытия ν_0, t_0 ветвятся, а над P_r – не ветвятся (возможно R или S – пустые множества). Положим $D = \sum_R P_r + \sum_S Q_s$.

Осталось доказать, что основная конструкция при выполнении условия (D) приводит к башне (T5) с $G(\check{(C)}/C) \cong S_4$.

Так как композиции $\tilde{\nu}_0 \cdot \tilde{\tilde{\nu}}_0 = \tilde{\nu}_1 \cdot \tilde{\tilde{\nu}}_1$ диаграммизуемы, то их можно вложить в башню (T6) (теорема 6.3.2 гл. 6). При этом, используя лемму 6.3.4 гл 6, из условия (D) можно вывести условие $(\tilde{D})$ и значит на основании леммы 7.4.3 $\tilde{\nu}_l = j^l \cdot \tilde{\nu}_0$.

Лемма 7.4.4. *Если кривая $\tilde{C}_N$ коммутативной башни (T6) имеет автоморфизм третьего порядка j и $\tilde{nu}_0 = j^2 \cdot \tilde{\nu}_1 = j \cdot \tilde{\nu}$, то на $\tilde{\tilde{C}}_0 = \tilde{\tilde{C}}_1 \tilde{\tilde{C}}_0 = \tilde{\tilde{C}}_2$ существует сохраняющееся при циклических перестановках тернарное отношение, которое индуцирует автоморфизм третьего порядка на $\check{C}$.*

Доказательство. Определим тернарное отношение (x_0, x_1, x_2) условиями

$$\tilde{\nu}_0(x_0) = \tilde{\nu}_1(x_1) = \tilde{\nu}_2(x_2), \qquad x_2 = \tilde{\tilde{\nu}}((x_1, x_2)),$$

где (x_1, x_2) - точка расслоенного произведения $\check{C} = \tilde{\tilde{C}}_0 \times_{\tilde{C}_N} \tilde{\tilde{C}}_1$.

Непосредственно проверяется, что (x_1, x_2, x_0) и (x_2, x_0, x_1) также образуют тернарное отношение. Чтобы определить автоморфизм j_0 на кривой $\check{C}$, представим ее в виде расслоенного произведения $\tilde{\tilde{C}}_0 \times_{\tilde{C}_N} \tilde{\tilde{C}}_1$ и положим $j_0(x_0, x_1) := (x_1, x_2)$. □

Применяя лемму 7.4.4 к нашей ситуации, получаем на $\check{C}$ кроме построенного автоморфизма j_0 еще три:

$$j_{k+1} = i_{\tilde{\nu}_k}\, j_0\, i_{\tilde{\nu}_k} \qquad (k = 0, 1, 2)$$

всего вместе с обратными восемь автоморфизмов третьего порядка.

Лемма 7.4.5. *В блоке (Т6) башни (Т5) характеристики накрытий $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2$ i_{ν_0}-инволютивны. По симметрии аналогичные утверждения справедливы для других пар накрытий тройки $\tilde{\nu}_0, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2$.*

Действительно,

$$(W_{\tilde{\nu}_2}, U_{\tilde{\nu}_2}) = j((W_{\tilde{\nu}_0}, U_{\tilde{\nu}_0})) = ji_{\nu_0}((W_{\tilde{\nu}_0}, U_{\tilde{\nu}_0})) = i_{\mu_0}j^2((W_{\tilde{\nu}_0}, U_{\tilde{\nu}_0})) = i_{\nu_0}((W_{\tilde{\nu}_1}, U_{\tilde{\nu}_1})).$$

Из леммы 7.4.4 следует, что применима универсальная конструкция пар. 3 и восьмилистные накрытия

$$\nu_l \cdot \tilde{\nu}_l \cdot \tilde{\tilde{\nu}}_l : \check{C} \to C \qquad (l = 0, 1, 2)$$

вкладываются в башни типа (Т4), причем с использованием предложений 7.3.4 и 7.2.6 доказывается, что кривая $\check{C}/\{1, i_{\tilde{\tilde{\nu}}_0}, i_{\tilde{\tilde{\pi}}'_0}, i_{\tilde{\tilde{\pi}}''_0}\}$ совпадает с $\tilde{C}_0$ при выполнении условия (D). Нетрудно проверить, что три полученные башни типа (Т4) изоморфны между собой. На основании предложения 7.3.1 кривая $\check{C}$ имеет девять инволюций и шесть автоморфизмов четвертого порядка. Значит сквозное отображение $\tau : \check{C} \to C$ имеет 24 автоморфизма и, следовательно, является накрытием Галуа. Точно так же, как это делается в предложении 7.5.1, можно показать, что инволюции $i_{\tilde{\tilde{\nu}}_0}$ и $i_{\tilde{\tilde{\nu}}_1}$ вместе с любым автоморфизмом третьего порядка порождают знакопеременную группу $A_4 \subset S_4$. Инволюции $i_{\tilde{\tilde{\nu}}_0}, i_{\tilde{\tilde{\nu}}_1}, i_{\tilde{\tilde{\pi}}_0}$ порождают группу квадрата (ф 3). Отсюда получается, что $G_\tau \cong S_4$. Предложение 7.4.1 доказано.

Таким образом, башня $(T5)$ вполне определяется не нормальным трехлистным накрытием $t_0 : C_0 \to C$ и двулистным накрытием $\pi_0 : \tilde{C}_0 \to C$, удовлетворяющим условию (D). Поэтому, исходя из характеристик этих двух накрытий, можно определить все характеристики башни $(T5)$. Нам понадобится следующий частичный результат.

Предложение 7.4.6. *В башне $(T5)$ накрытия*

$$\pi_l : \tilde{C}_l \to C_l \qquad l = (0, 1, 2)$$

изоморфны между собой, а накрытия

$$q_k : Y_k \to C \qquad k = (0, 1, 2, 3)$$

изоморфны между собой, причем роды этих кривых связаны соотношением

$$g(Y_k) - g(C) = g(\tilde{C}_l) - g(C_l).$$

Доказательство. Существование изоморфизмов устанавливается из общего предложения 7.1.1. Соотношение на роды вытекает из следующей леммы. □

Лемма 7.4.7. *Пусть x – точка кривой C. Тогда*

(i) если t_l и π_i не разветвлены над x, то все накрытия башни (T5) не разветвлены над ней;

(ii) если t_l над x имеет ветвление индекса три, то π_l над x не разветвлено, а q_k имеет ветвление индекса три;

(iii) если t_l над x имеет ветвление индекса два, а π_l над x не разветвлено, то q_k над x имеет одно ветвление индекса два;

(iv) если π_l над x разветвлено, а t_l не разветвлено, то π_l и q_k над x имеют ровно два ветвления индекса два;

(v) если и π_l, и t_l над x разветвлены, то t_l над x имеет одно ветвление индекса два, следовательно, два прообраза, π_l разветвлено над ними обоими, а q_k над x имеет ветвление индекса 4.

Обозначим число точек x типа (ii), (iii), (iv), (v) соответственно через w'', w''', w^{iv}, w^v. Применив формулу Гурвица, получим

$$g(Y_k) = 4g(C) - 3 + w'' + \frac{1}{2}w''' + w^{iv} + \frac{3}{2}w^v,$$

$$g(C_l) = 3g(C) - 2 + w'' + \frac{1}{2}w''' + \frac{1}{2}w^v,$$

$$g(\tilde{C}_l) = 6g(C) - 5 + 2w'' + w''' + w^{iv} + 2w^v,$$

$$g(\tilde{C}_l) - g(C_l) = 3g(C) - 3 + w'' + \frac{1}{2}w''' + \frac{3}{2}w^v = g(Y_k) = g(C).$$

Замечание 7.4.8. Из доказанной леммы следует, что при неразветвленном накрытии π_0 ряд g_4^1, индуцированный накрытием $q_k : Y_k \to C = \mathbb{P}^1$, не содержит элементов вида $4P$ и $2P + 2Q$.

Замечание 7.4.9. Башня $(T5)$ обладает свойством обратимости конструкции в следующем смысле. Все сопряженные накрытия q_k башни $(T5)$ не нормальны, причем их нормализацией является 24-листное накрытие $\tau : \check{C} \to C$. Следовательно, башню $(T5)$ можно конструировать, исходя из накрытия q_k. Для этого надо взять его нормализацию τ и башню Галуа накрытия τ.

7.5 Нормальный случай

Исследуем случай, когда трехлистное накрытие $t_0 : C_0 \to C$ нормально, следовательно, является накрытием Галуа. Тогда группа Галуа G_{t_0} изоморфна $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, и через j мы обозначим ее образующую. Как и прежде, $\pi_0 : \tilde{C}_0 \to C$ – двулистное накрытие. Нас интересует вопрос: когда композицию $t_0 \cdot \pi_0$ можно вписать в коммутативную башню $(T6)$?

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \check{C} & & & \\
\tilde{\pi}_0 & \tilde{\pi}_1 & \tilde{\pi}_2 \swarrow & \downarrow \tilde{t}_0 \searrow \tilde{t}_1 & & \tilde{t}_2 & \tilde{t}_3 \\
\tilde{C}_0 & \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\
\pi_0 \searrow & \pi_1 \downarrow & \pi_2 \swarrow & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\
 & C_0 & & & & & \\
 & & t_0 & & & & \\
 & & & C & & &
\end{array}
\qquad (T8)
$$

Здесь, как и в башне $(T5)$, стрелки, обозначенные буквой q с различными метками представляют четырехлистные накрытия, буквой t – трехлистные накрытия, буквой π – двулистные накрытия.

Предложение 7.5.1. *Двенадцатилистное накрытие $\tau : \check{C} \to C$ допускает разложение в башню $(T8)$ тогда и только тогда, когда является накрытием Галуа с группой Галуа, изоморфной знакопеременной группе $A_4 < S_4$. При этом*

$$\check{C} = C_0 \times_C Y_k \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Доказательство. Отображение $\tau : \check{C} \to C$ башни $(T8)$ имеет три инволюции и восемь автоморфизмов третьего порядка, следовательно, является накрытием Галуа. Инволюции $i_{\tilde{\pi}_0}, i_{\tilde{\pi}_1}, i_{\tilde{\pi}_2}$ вместе с произвольным автоморфизмом j_k третьего порядка порождают группу G_τ. Если бы j_k был перестановочен с какой-либо инволюцией, то G_τ была бы циклической группой. Значит можно предположить, что

$$i_{\tilde{\pi}_0} = j_k\, i_{\tilde{\pi}_1}\, j_k^2 = j_k^2\, i_{\tilde{\pi}_2}\, j_k.$$

Получено описание группы A_4 с помощью образующих и определяющих соотношений. □

Предложение 7.5.2. *Композиция $t_0 \cdot \pi_0$ вписывается в коммутативную башню $(T8)$ тогда и только тогда, когда характеристика (W_{π_0}, U_{π_0}) накрытия π_0 удовлетворяет условию (D): существует дивизор D такой, что*

$$(t_0)_* W_{\pi_0} = 2D, \qquad (t_0)_* U_{\pi_0} = D.$$

Доказательство. Необходимость условия (C) получается из леммы 7.4.3. Обратно, при условии (D) строится блок типа $(T6)$ башни $(T8)$ с $\pi_l = j^l \cdot \pi_0 \quad (l = 1, 2)$.Тогда на основании леммы 7.4.4 на $\check{(C)}$ существуют четыре пары автоморфизмов третьего порядка, факторизуя по действию которых получаем кривые $Y_k \quad (k = 0, 1, 2, 3)$. Накрытия q_k корректно определяются условием коммутативности башни $(T8)$.

Если композиция $t_0 \cdot \pi_0$ удовлетворяет условию (D), то башню $(T8)$ можно получить, взяв $\check{C} = \tilde{C}_0 \times_{C_0} \tilde{C}_2$, где $\pi_1 : \tilde{C}_1 \to C_0$ определяется как $j \cdot \pi_0$. Из леммы 7.4.2 и предложения 7.5.2 следует, что любая башня $(T8)$ может быть получена таким путем. □

Предложение 7.5.3. *В башне $(T8)$ накрытия $q_k : y_k \to C$ изоморфны между собой, а накрытия $\pi_l : \tilde{C}_l \to C_0$ – между собой, причем $g(Y_k) - g(C) = g(\tilde{C}_l) - g(C_0)$.*

Доказательство. Изоморфизмы накрытий получаются специализацией предложения 7.1.1. Соотношение на роды выводится из следующей леммы. □

Лемма 7.5.4. *Пусть x – точка кривой C башни (8). Тогда* *(i) если t_0 и π_0 не разветвлены над x, то все накрытия башни (8) не разветвлены над ней;*

(ii)если t_0 над x имеет ветвление индекса три, то π_l над x не разветвлено, а q_k имеет ветвление индекса три;

(iii) если π_l над x разветвлено, то t_0 над x не разветвлено, а π_l и q_k имеют ровно два ветвления индекса два.

Отметим, что замечания 7.4.8 и 7.4.9 пар. 4 остаются в силе и сейчас, с той лишь разницей, что нормализацией четырехлистных накрытий $q_k : Y_k \to C$ в этом случае будет 12-листное накрытие $\tau : \check{C} \to C$.

Раздел II. МНОГООБРАЗИЯ ПРИМА

7.6 О функториальности соответствия Прима

Каждому конечнолистному накрытию кривых $\pi : \tilde{C} \to C$ соответствует ассоциированный гомоморфизм якобиевых многообразий, так называемое норменное отображение. Неприводимая компонента нуля этого гомоморфизма называется многообразием Прима или просто примианом накрытия π – $P_\pi = \ker^0 J_*(\pi)$. Изучим вопрос: является ли соответствие Прима функтором из категории конечнолистных накрытий кривых в категорию абелевых многообразий (см. пар. 1).

Соответствие Якоби $J : C \mapsto J(C)$ индуцирует два функтора из категории кривых в категорию абелевых многообразий:

(i) ковариантный функтор прямого образа, сопоставляющий накрытию кривых $\alpha : C \to C'$ норменное отображение $J_*(\alpha) : J(C) \to J(C')$;

(ii) контравариантный функтор обратного образа $J^*(\alpha) : J(C') \to J(C)$.

Диаграмма (1) индуцирует диаграммы

$$J(\tilde{C}) \xrightarrow{J_*(\tilde{\alpha})} J(\tilde{C}')$$

$$J_*(\pi) \downarrow \qquad\qquad \downarrow J_*(\pi') \qquad\qquad (T_2 1)$$

$$J(C) \overset{J_*(\alpha)}{\to} J(C')$$

и

$$\begin{array}{ccc} & J(\tilde{C}') \xrightarrow{J^*(\tilde{\alpha})} J(\tilde{C}) & \\ J_*(\pi') \downarrow & & \downarrow J_*(\pi) \\ & J(C') \overset{J^*(\alpha)}{\to} J(C). & \end{array} \qquad (T_3 1)$$

Из функториальности J_* следует, что диаграмма $(T_2 1)$ коммутативна. Поэтому $J_*(\tilde{\alpha})P_\pi \subset P_{\pi'}$ и, доопределив $P_*(\tilde{\alpha}, \alpha) = J_*(\tilde{\alpha})|_{P_\pi}$, получаем ковариантный функтор Прима.

Во втором случае вопрос решается с помощью расслоенного произведения. Пусть сначала $\tilde{C}$ в диаграмме $(T_1 1)$ является расслоенным произведением $C \times_{C'} \tilde{C}'$. Тогда, как нетрудно проверить, диаграмма $(T_3 1)$ коммутативна. Поэтому $J^*(\tilde{\alpha})P_{\pi'} \subset P_\pi$.

Если $\tilde{C} \neq C \times_{C'} \tilde{C}'$, то диаграмму $(T_1 1)$ можно дополнить до диаграммы $(T2)$ и $J^*(\tilde{\alpha})P_{\pi'} = j^*(\tilde{\pi})(J^*(\tilde{\alpha}_0)P_{\pi'})$, причем $J^*(\tilde{\alpha}_0)P_{\pi'} \subset P_{\pi_1}$. Но тогда

$$J_*(\pi)(J^*(\tilde{\alpha})P_{\pi'}) = J_*\pi_0 J_*(\tilde{\pi})J^*(\tilde{\pi})J^*(\tilde{\alpha}_0)P_{\pi'} \subset \deg\tilde{\pi} \cdot J^*(\tilde{\pi}_0)P_{\pi_0}.$$

Итак, соответствие Прима индуцирует два функтора из категории конечнолистных накрытий кривых в категорию абелевых многообразий:

(i) ковариантный $P_*(\tilde{\alpha}, \alpha) = J_*(\tilde{\alpha})|_{P_\pi}$;

(ii)контравариантный $P^*(\tilde{\alpha}, \alpha) = J^*(\tilde{\alpha})|_{P_{\pi'}}$.

Любая поляризация $\rho_J : J \to \hat{J}$ якобиана накрывающей кривой индуцирует поляризацию на примиане условием коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\rho_J} & \hat{J} \\ \nu \uparrow & & \downarrow \hat{\nu} \\ P & \xrightarrow{\rho_P} & \hat{P}, \end{array}$$

где ν – вложение.

Полученная поляризация примиана называется канонической. Канонические поляризации примианов двулистных накрытий изучены Мамфордом [101]. Сасаки обобщил его результаты на случай произвольных циклических накрытий [103]. Он показал, что хотя, вообще говоря, каноническая поляризация примиана циклического накрытия не является главной, существует изогенное примиану многообразие, ассоциированная поляризация которой главная. Построенная изогения превращается в изоморфизм для примианов:

(1) неразветвленных двулистных накрытий,

(2) разветвленных p-листных циклических накрытий с глобальным индексом ветвления

$$r = \sum(r_i - 1) = (p-2)(g-1)$$

где g – род накрываемой кривой.

В этих случаях говорят о главно поляризованном многообразии Прима. В частности, многообразия Прима двулистных накрытий главно поляризованы тогда и только тогда, когда накрытия разветвлены не более, чем в двух точках. Заметим, что главно поляризованное многообразие Прима произвольного конечнолистного накрытия $C \to \mathbb{P}^1$ совпадает с канонически поляризованным якобианом кривой C.

Как оказалось, действие функторов Прима не распространяется на канонически поляризованные многообразия Прима: канонические поляризации не соответствуют друг другу при морфизмах многообразий (гл. 6, теорема 6.3.7) .

7.7 Многообразие Прима двулистного накрытия тригональной кривой

Здесь мы докажем основной результат об изогении многообразий Прима, которая превращаетя в некоторых интересных случаях в изоморфизм примиана с якобианом.

Согласно разделу I этой главы композицию

$$\tilde{C}_0 \xrightarrow{\pi_0} C_0 \xrightarrow{t_0} C$$

двулистного накрытия π_0 и трехлистного накрытия t_0 можно вписать в башню $(T5)$, если t_0 не является накрытием Галуа, или в башню $(T8)$, если t_0 – нормальное накрытие.

Предложение 7.7.1. *Между многообразиями Прима P_{π_0} и P_{q_k} башни $(T5)$ (или $(T8)$) существуют изогении*

$$\alpha_k : P_{\pi_0} \to P_{q_k}, \qquad \alpha'_k : P_{q_k} \to P_{\pi_0},$$

такие, что

$$\alpha'_k \cdot \alpha_0 = 2_{P_{\pi_0}}, \qquad \alpha^*_k(\rho_{q_k}) = 2\rho_{\pi_0}.$$

Доказательство. проведем сначала для более простого нормального случая. Определим

$$\alpha_k = (\tilde{t}_k)_* \cdot \tilde{\pi}^*_0, \qquad \alpha'_k = (\tilde{\pi}_0)_* \cdot \tilde{t}^*_k.$$

Ввиду функториальности соответствия Прима имеем

$$\alpha_k(P_{\pi_0}) \subset P_{q_k} \qquad \alpha'_k(P_{q_k}) \subset P_{\pi_0}.$$

Рассмотрим композицию

$$P_{\pi_0} \xrightarrow{\alpha_k} P_{q_k} \xrightarrow{\alpha'_k} P_{\pi_0} : \ \alpha'_k \cdot \alpha_k = 2_{P_{\pi_0}} + (\tilde{\pi}_0)_* j_k \tilde{\pi}^*_0 + (\tilde{\pi}_0)_* j^2_k \tilde{\pi}^*_0,$$

причем $(\tilde{\pi}_0)_* j^l_k \tilde{\pi}^*_0 = \pi^*_0 j^l_k (\pi_0)_* = 0$ на многообразии Прима P_{π_0} $(l = 1, 2)$. Так как к тому же многообразия Прима P_{π_0} и P_{q_k} неприводимы и одинаковой размерности (предложение 7.5.3), то α_k и α'_k – изогении.

Проверим соотношение на поляризации. По определению

$$\alpha^*_k(\rho_{q_k}) = \hat{\alpha}_k \cdot \rho_{q_k} \cdot \alpha_k = \hat{\tilde{\pi}}^*_0 \cdot (\hat{\tilde{t}}_k)_* \cdot \hat{\rho}_{q_k} \cdot (\tilde{t}_k)_* \cdot \tilde{\pi}_0{}^*.$$

Ниже $\nu_{P_{q_k}}$ означает естественное вложение P_{q_k} в $J(Y_k)$. Построим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
P_{\pi_0} & \xrightarrow{\nu} & J(\tilde{C}_0) & \xrightarrow{\lambda_{2\theta(\tilde{C}_0)}} & \hat{J}(\tilde{C}_0) & \xrightarrow{\hat{\nu}} & \hat{P}_{\pi_0} \\
\tilde{\pi}^*_0 \downarrow & & \tilde{\pi}^*_0 \downarrow & & \uparrow \hat{\tilde{\pi}}^*_0 & & \uparrow \hat{\tilde{\pi}}^*_0 \\
P_{\tilde{\pi}_1} & \xrightarrow{\nu} & J(\check{C}) & \xrightarrow{\gamma} & \hat{J}(\check{C}) & \xrightarrow{\hat{\nu}} & \hat{P}_{\tilde{\pi}_1} \\
(\check{t}_k)_* \downarrow & & (\check{t}_k)_* \downarrow & & \uparrow (\hat{\check{t}}_k)_* & & \uparrow (\hat{\check{t}}_k)_* \\
P_{q_k} & \xrightarrow{\nu} & J(Y_k) & \xrightarrow{\lambda_{\theta(Y_k)}} & \hat{J}(Y_k) & \xrightarrow{\hat{\nu}} & \hat{P}_{q_k}
\end{array}$$

Нужное соотношение на поляризации сразу следует из коммутативности этой диаграммы, причем коммутативность всех ее квадратов очевидна за исключением двух средних. Для доказательства коммутативности нижнего среднего квадрата заметим, прежде всего, что гомоморфизмы прямого и обратного образов якобиевых многообразий

$$(\tilde{t}_k)_* : J(\check{C}) \to J(Y_k), \quad \tilde{t}_k^* : J(Y_k) \to J(\check{C})$$

дуальны друг к другу:

$$(\hat{\tilde{t}}_k)_* = \lambda_{\theta(\check{C})}\, \tilde{t}_k^*\, \lambda^{-1}_{\theta(Y_k)}, \quad \hat{\tilde{t}}_k^* = \lambda_{\theta(Y_k)}\, (\tilde{t}_k)_*\, \lambda^{-1}_{\theta(\check{C})}.$$

Поэтому

$$((\tilde{t}_k)_*)^*\, (\lambda_{\theta(Y_k)}) = (\hat{\tilde{t}}_k)_*\, \lambda_{\theta(Y_k)}\, (\tilde{t}_k)_* = \lambda_{\theta(\check{C})}\, \tilde{t}_k^*\, (\tilde{t}_k)_* = \lambda_{\theta(\check{C})}\, (1 + j_k + j_k^2).$$

Поскольку $\hat{\tilde{\pi}}_0^*\, \lambda_{\theta(\check{C})}\, \tilde{\pi}_0^* = \lambda_{2\theta(\tilde{C}_0)}$ ([101], [2*]), ${}^*_0\, \lambda_{\theta(\check{C})}\, j_k^l \tilde{\pi}_0^* = 0$ $(l = 1, 2)$.

Рассмотрим гомоморфизм

$$J(\tilde{C}_0) \times J(\tilde{C}_1) \times J(\tilde{C}_2) \xrightarrow{\gamma} J(\check{C}), \quad \gamma = \tilde{\pi}_0^* + \tilde{\pi}_1^* + \tilde{\pi}_2^*,$$

и представим $\tilde{\pi}_l^*$ в виде композиции канонического вложения $J(\tilde{C}_l)$ в $J(\tilde{C}_0) \times J(\tilde{C}_1) \times J(\tilde{C}_2)$ и гомоморфизма $\gamma = \tilde{\pi}_0^* + \tilde{\pi}_1^* + \tilde{\pi}_2^*$. Для любой точки $x \in J(\check{C})$ имеем

$$\hat{\tilde{\pi}}_0^* \lambda_{\theta(\check{C})}(x) = \hat{\tilde{\pi}}_0^* \mathrm{cl}(T_x^* \theta(\check{C}) - \theta(\check{C})) = \mathrm{cl}(T^*_{(\tilde{\pi}_0^*)^{-1} x} \hat{\tilde{\pi}}_0^* \theta(\check{C}) - \hat{\tilde{\pi}}_0^* \theta(\check{C})).$$

Так как $j_k^l \tilde{\pi}_0^* = \tilde{\pi}_{3-l}^*$ (лемма 7.4.2), то при $x \in j_k^l \tilde{\pi}_0^* J(\tilde{C}_0)$ имеем $x \in \tilde{\pi}_{3-l}^* J(\tilde{C}_{3-l})$ и можно взять $(\tilde{\pi}_0^*)^{-1} x = 0$. Отсюда $\hat{\tilde{\pi}}_0^* \lambda_{\theta(\check{C})} \tilde{\pi}_{3-l}^* = 0$ $(l = 1, 2)$.

Перейдем к доказательству не нормального случая (башня $(T5)$).

Положим

$$\tilde{\alpha}_k = (\mu_k)_* (\tilde{\tilde{t}}_k)_* \tilde{\tilde{\nu}}_0^*\, \tilde{\pi}_0^*, \qquad \tilde{\alpha}'_k = (\tilde{\pi}_0)_* (\tilde{\tilde{\nu}}_0)_*\, \tilde{t}_k^*\, \nu_k^*.$$

Опять из-за функториальности соответствия Прима

$$\tilde{\alpha}_k(P_{\pi_0}) \subset P_{q_k}, \qquad \tilde{\alpha}'_k(P_{q_k}) \subset P_{\pi_0}.$$

Вместе с $\tilde{\alpha}_k$ и $\tilde{\alpha}'_k$ удобно рассматривать

$$\alpha_k = (\tilde{t}_k)_* \, \tilde{\pi}'_0, \qquad \alpha'_k = (\tilde{\pi}'_0)_* \, \tilde{t}^*_k,$$

так как ввиду

$$\tilde{\pi}_0 \cdot \tilde{\tilde{\pi}}_0 = \tilde{\pi}'_0 \cdot \tilde{\tilde{\pi}}'_0, \qquad \mu_k \cdot \tilde{\tilde{t}}_k = \tilde{t}_k \cdot \tilde{\tilde{\pi}}'_0$$

имеем $\tilde{\alpha}_k = 2\alpha_k$ и $\tilde{\alpha}'_k = 2\alpha'_k$.

Прямое вычисление дает

$$\tilde{\alpha}'_k \cdot \tilde{\alpha}_k = 4\,\alpha'_k \alpha_k = 8_{P_{\pi_0}}.$$

Отсюда следует, что $\alpha'_k \alpha_k = 2_{P_{\pi_0}}$ и значит α'_k и α_k изогении (предложение 7.4.6).

Для доказательства соотношения на поляризации нам понадобится коммутативность диаграммы (где все ν означают вложения):

$$\begin{array}{ccccccc}
P_{\pi_0} & \xrightarrow{\nu} & J(\tilde{C}_0) & \xrightarrow{\lambda_{8\theta(\tilde{C}_0)}} & \hat{J}(\tilde{C}_0) & \xrightarrow{\hat{\nu}} & \hat{P}_{\pi_0} \\
\tilde{\pi}^*_0 \downarrow & & \tilde{\pi}^*_0 \downarrow & & \uparrow \hat{\tilde{\pi}}^*_0 & & \uparrow \hat{\tilde{\pi}}^*_0 \\
P_{\tilde{\nu}_0} & \xrightarrow{\nu} & J(\tilde{\tilde{C}}_0) & \xrightarrow{\gamma} & \hat{J}(\tilde{\tilde{C}}_0) & \xrightarrow{\hat{\nu}} & \hat{P}_{\tilde{\nu}_0} \\
\tilde{\tilde{\pi}}^*_0 \downarrow & & \tilde{\tilde{\pi}}^*_0 \downarrow & & \uparrow \hat{\tilde{\tilde{\pi}}}^*_0 & & \uparrow \hat{\tilde{\tilde{\pi}}}^*_0 \\
P_{\tilde{\tilde{\nu}}_2} & \xrightarrow{\nu} & J(\check{C}) & \xrightarrow{\check{\gamma}} & \hat{J}(\check{C}) & \xrightarrow{\hat{\nu}} & \hat{P}_{\tilde{\tilde{\nu}}_2} \\
(\sigma_k)_* \downarrow & & (\sigma_k)_* \downarrow & & \uparrow (\hat{\sigma}_k)_* & & \uparrow (\hat{\sigma}_k)_* \\
P_{q_k} & \xrightarrow{\nu} & J(Y_k) & \xrightarrow{\lambda_{\theta(Y_k)}} & \hat{J}(Y_k) & \xrightarrow{\hat{\nu}} & \hat{P}_{q_k}
\end{array}$$

где

$$\gamma = \lambda_{2\theta(\tilde{\tilde{C}}_0)}(1 + i_{\tilde{\tilde{\pi}}_0}), \quad \check{\gamma} = \lambda_{\theta(\check{C})}(1 + j_k + j_k^2 + i_{\tilde{\tilde{\pi}}_0} + i_{\tilde{\tilde{\pi}}_0}\, j_k + i_{\tilde{\tilde{\pi}}_0}\, j_k^2), \quad \sigma_k = \mu_k \cdot \tilde{\tilde{t}}_k.$$

По существу в доказательстве нуждается лишь коммутативность трех средних квадратов.

Так как отображения

$$(\sigma_k)_* : J(\check{C}) \to J(Y_k), \quad \sigma^*_k : J(Y_k) \to J(\check{C})$$

дуальны друг к другу, то

$$(\hat{\sigma}_k)_* = \lambda_{\theta(\check{C})}\, \sigma^*_k \, \lambda^{-1}_{\theta(Y_k)}, \quad \hat{\sigma}^*_k = \lambda_{\theta(Y_k)}\, (\sigma_k)_* \, \lambda^{-1}_{\theta(\check{C})}.$$

Отсюда получается коммутативность нижнего среднего квадрата.

Для доказательства коммутативности центрального квадрата используется равенство $i_{\tilde{\tilde{\pi}}_0'} \cdot \tilde{\pi}_0' = \tilde{\tilde{\pi}}_0' \cdot i_{\tilde{\pi}_0'}$.

Наконец, коммутативность верхнего среднего квадрата следует из равенства $i_{\tilde{\pi}_0} \cdot \tilde{\pi}_0^* = \tilde{\pi}_0^*$.

Используя коммутативность построенной диаграммы, получаем

$$\tilde{\alpha}_k^*(\rho_{q_k}) = \hat{\tilde{\alpha}}_k \cdot \rho_{q_k} \cdot \tilde{\alpha}_k = 8_{\rho_{\pi_0}} = 4\alpha_k^*(\rho_{q_k}).$$

Отсюда $\alpha_k^*(\rho_{q_k}) = 2_{\rho_{\pi_0}}$. Предложение 7.7.1 доказано. □

Предложение 7.7.2. *Если $C \to \mathbb{P}^1$ – тригональная кривая, $\pi_0 : \tilde{C}_0 \to C_0$ – двулистное накрытие, разветвленное не более, чем над двумя точками кривой C_0, отображающимися при t_0 в одну и ту же точку, то главно поляризованные абелевы многообразия (P_{π_0}, Ξ_{π_0}) и $(J(Y_k), \theta(Y_k))$ изоморфны.*

Доказательство. С одной стороны имеем $\alpha_k' \cdot \alpha_k = 2_{P_{\pi_0}}$. С другой стороны, из-за $\alpha_k \cdot \pi_0^* = q_k^* \cdot (t_0)_* = 0$ верно включение

$$\pi_0^*(J(C_0)) \cap P_{\pi_0} = (P_{\pi_0})_2 \subset \ker^0 \alpha_k.$$

Отсюда $\alpha_k = 2\alpha_{k0}$, где α_{k0} и α_k' – взаимно обратные изоморфизмы. Поскольку главная поляризация $\lambda_{\Xi_{\pi_0}}$ определяется условием $2\lambda_{\Xi_{\pi_0}} = \rho_{\pi_0}$ [101], то из $\alpha_k^*(\rho_{q_k}) = 2\rho_{\pi_0}$ получаем $\alpha_0^*(\theta(Y_k)) = \Xi_{\pi_0}$. Ограничение на U_{π_0} условия (D) при $t_0 : C_0 \to C = \mathbb{P}^1$ выполняется автоматически, ибо дивизоры равных степеней на $\mathbb{P}^1$ линейно эквивалентны. □

Результаты предложения 7.7.2 в случае неразветвленного накрытия π_0 известны по работе Рецилласа [102]. Там по произвольной кривой Y с рядом g_4^1, не содержащим дивизоров вида $2P + 2Q$ и $4P$, строится неразветвленное двулистное накрытие $\pi_0 : C_0 \to C$ с тригональной кривой C и изоморфное отображение ее якобиана $J(Y)$ в многообразие Прима двулистного накрытия π_0.

Предложение 7.7.3. *("Теорема Торелли") Пусть M – семейство двулистных накрытий, удовлетворяющих условиям предложения 7.7.2. Тогда отображение Прима, сопоставляющее накрытию $\pi_0 \in M$ его главно поляризованный примиан, инъективно.*

Доказательство. следует из предложения 7.7.2 и свойства обратимости конструкции башен $(T5)$ и $(T8)$. □

Если ограничиться неразветвленными накрытиями, получаем результат, хорошо известный по статье [111].

Глава 8

Примианы разветвленных двулистных накрытий тригональных кривых

В данной главе излагаются результаты статьи [5] автора.

По двулистному накрытию $\pi : \tilde{C} \to C$ и трехлистному накрытию $t : C \to X$ полных неособых кривых строятся четырехлистное накрытие $q : Y \to X$ и двулистное накрытие $p : \tilde{Y} \to Y$ так, что многообразия Прима двулистных накрытий связаны парой гомоморфизмов, индуцирующих взаимно обратные изоморфизмы при $X = \mathbb{P}^1$ и некотором ограничительном условии на ветвления.

Рассматривается категория полных неособых алгебраических кривых и их конечнолистных накрытий над алгебраически замкнутым основным полем, характеристика которого не равна двум и трем. В этой категории существуют расслоенные произведения и факторобъекты по действию конечных групп автоморфизмов.

8.1 Построение башен

Пусть $\pi : \tilde{C} \to C$ – двулистное накрытие, $t : C \to X$ – нормальное трехлистное накрытие с циклической группой Галуа G_t. Образуем тройное расслоенное произведение $\check{X} \to C$

семейства морфизмов $\pi_a = a \cdot \pi,\ a \in G_t$. Оно разлагается в композиции проекций

$$\check{X} \xrightarrow{\check{q}_a} \tilde{C} \xrightarrow{\pi_a} C \qquad (a \in G_t)$$

и является накрытием Галуа с абелевой группой Галуа, порожденной тремя инволюциями. Кроме того, на $\check{X}$ действует автоморфизм j третьего порядка, перестановочный со сквозным морфизмом $\kappa = t \cdot \pi \cdot q$. Нетрудно заметить, что группа, порожденная указанными четырьмя автоморфизмами, изоморфна подгруппе G симметрической группы S_6, порожденной транспозициями $(12), (34), (56)$ и подстановкой $j = (135)(246)$. Порядок группы G равен 24, т. е. степени сквозного накрытия κ, поэтому κ является накрытием Галуа с группой $G_\kappa \cong G$.

Профакторизовав кривую $\check{X}$ по действию автоморфизма j и перестановочной с ним инволюции группы G_κ, получим башню (7.1), где $q, \tilde{q}, \check{q}$ – четырехлистные, $t, \tilde{t}, \check{t}$ – трехлистные и $\pi, \check{\tau}, p$ – двулистные накрытия.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \check{X} & & & \\
 & \check{q} \swarrow & & \check{\tau}\downarrow & & \check{t} \searrow & \\
\tilde{C} & & & \tilde{X} & & & \tilde{Y} \\
\pi\downarrow & \tilde{q} \swarrow & & & & \searrow \tilde{t} & \downarrow p \\
C & & & & & & Y \\
 & t \searrow & & & & \swarrow q & \\
 & & & X & & &
\end{array} \tag{7.1}$$

Если накрытие $t : C \to X$ не нормально, то, предварительно нормализуя его, получим шестилистное накрытие Галуа

$$C_0 \xrightarrow{\nu} C \xrightarrow{t} X$$

с группой Галуа, изоморфной S_3. Построим композицию морфизмов

$$C_0 \xrightarrow{t_0} X_0 \xrightarrow{\tau} X,$$

определенную факторизацией кривой C_0 по действию знакопеременной подгруппы $A_2 < S_3$. Рассмотрим расслоенное произведение $\tilde{C}_0 = \tilde{C} \times_C C_0$ и проекцию $\pi_0 : \tilde{C}_0 \to C_0$.

Теперь предыдущая конструкция применима к двулистному накрытию π_0 и трехлистному накрытию t_0. В результате получится башня (7.2),

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \check{X} & & & & \\
 & & & \check{q}\swarrow & \check{\tau}\downarrow & \check{t}\searrow & & & \\
 & & \tilde{C}_0 & & \tilde{X}_0 & & \tilde{Y}_0 & & \\
 & \tilde{\nu}\swarrow & \pi_0\downarrow & \tilde{q}\swarrow & & \searrow\tilde{t} & \downarrow p_0 & \searrow\tilde{\mu} & \\
\tilde{C} & & C & & & & Y & & \tilde{Y} \\
 & \pi\searrow & \nu\downarrow & t_0\searrow & & \swarrow q_0 & \downarrow\mu & \swarrow p & \\
 & & C & & X_0 & & Y & & \\
 & & & t\searrow & \tau\downarrow & \swarrow q & & & \\
 & & & & X & & & &
\end{array}
\tag{7.2}
$$

где сквозное накрытие $\kappa : \check{X} \to X$ является накрытием Галуа, группа Галуа которого изоморфна подгруппе G симметрической группы S_6, порожденной элементами

$$i_l = (2l-1\ 2l) \quad (l = 1, 2, 3), \qquad i = (34)(56), \qquad j = (135)(246)$$

Кривая $\tilde{Y}$ (соответственно Y) и накрытие $\tilde{\mu}$ (соотв. $p \cdot \tilde{\mu}$) получаются факторизацией $\check{X}$ по действию группы $G_{\tilde{Y}}$, порожденной элементами i и j (соотв. G_Y, порожденной элементами i, j и i_1, i_2, i_3). Отметим, что накрытия $q, q_0, \tilde{q}, \check{q}$ четырехлистны, $t, t_0, \tilde{t}, \check{t}$ трехлистны, остальные двулистны.

8.2 Вычисление ветвлений

Пусть G – конечная группа автоморфизмов кривой $\check{X}$, $\kappa : \check{X} \to X$ – соответствующее ей накрытие. Если $N < H < G$ – подгруппы, то факторизацией $\check{X}$ по их действию морфизм κ можно разложить в композицию

$$\check{X} \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} X$$

где $\alpha, \beta \cdot \alpha$ – накрытия Галуа с группами соответственно N и H. Вычислим ветвления накрытия β.

Полный прообраз точки P кривой X относительно κ представляет из себя орбиту $G\check{P}$ произвольной точки $\check{P}$ этого прообраза. Если G_0 – группа изотропии точки $\check{P}$, то орбита $G\check{P}$ биективна фактормножеству правых смежных классов G/G_0, а ее образы $\alpha(G\check{P})$ и $\beta \cdot \alpha(G\check{P})$ изоморфны соответственно двойным фактормножествам

$$N \setminus G/G_0 = \{NgG_0 \mid g \in G\}, \qquad H \setminus G/G_0 = \{HgG_0 \mid g \in G\}.$$

Группой изотропии точки $g\check{P}$ накрытия Галуа κ является подгруппа $G_0^g = gG_0g^{-1}$ группы G (которая совпадает с G_0 тогда и только тогда, когда $g \in \mathrm{Nor}_G(G_0)$), причем каждая сопряженная к G_0 подгруппа группы G выступает как изотропная группа некоторой точки полного прообраза точки P. Индекс ветвления $i_\kappa(\check{P}_g)$ точки $\check{P}_g = g\check{P}$ накрытия Галуа κ равен порядку ее группы изотропии

$$i_\kappa(\check{P}_g) = |G_0^g| = |G_0|.$$

Относительно накрытий Галуа α и $\beta \cdot \alpha$ группами изотропии точки $\check{P}_g$ будут соответственно подгруппы $G_0^g \cap N$ и $G_0^g \cap H$, и следовательно, соответствующие индексы ветвления вычисляются по формулам

$$i_\alpha(\check{P}_g) = |G_0^g \cap N|, \qquad i_{\beta\cdot\alpha}(\check{P}_g) = |G_0^g \cap H|.$$

Индекс ветвления обладает свойством мультипликативности относительно композиции отображений:

$$i_{\beta\cdot\alpha}(\check{P}_g) = i_\alpha(\check{P}_g) \cdot i_\beta(\alpha(\check{P}_g)).$$

Отсюда для вычисления индекса ветвления в произвольной точке $Q = \alpha(\check{P}_g)$ кривой Y получаем формулу

$$i_\beta(Q) = \frac{|G_0^g \cap H|}{|G_0^g \cap N|}.$$

Используя известное соотношение для мощности двойного класса смежности

$$|AcB| = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B^c|},$$

получаем другой, более полезный, вид формулы для вычисления индекса ветвления

$$i_\beta(Q) = \frac{|NgG_0|}{|HgG_0|} \cdot (H:N).$$

Применим полученные формулы для вычисления ветвлений накрытий кривых башен (7.1) и (7.2). Эти башни строились, исходя из накрытий π и t. Поэтому точки ветвления и индексы ветвления всех накрытий этих башен определяются аналогичными характеристиками исходных накрытий. Отдельно надо рассмотреть все возможные случаи расположения ветвлений накрытий π и t. Через P будем обозначать точку кривой X, через $\check{P}$ – произвольный ее прообраз на кривой $\check{X}$ и через G_0 – группу изотропии точки $\check{P}$.

A) Рассмотрим случай $t^*(P) = P_1 + P_2 + P_3,\ P_i \neq P_j\,(i \neq j)$.

Aa) Если π не разветвлено над точками P_i, то группа G_0 тривиальна и все накрытия башен неразветвлены над точкой P.

Ab) Если π разветвлено только над одной из точек P_i, то группа G_0 изоморфна $\langle i_1 \rangle$ и q над P имеет две точки ветвления индекса 2, над которыми p не разветвлено.

Ac) Если π разветвлено в точности над двумя из точек P_i, то G_0 изоморфно $\langle i_1 i_2 \rangle$ и опять q над P, имеет две точки ветвления, над которыми p не разветвлено.

Ad) Если π разветвлено над всеми тремя точками P_i, то G_0 изоморфна группе $\langle i_1 i_2 i_3 \rangle$, порожденной элементом $i_1 i_2 i_3$, и q над P имеет четыре простых прообраза, над каждым из которых p разветвлено.

B) Пусть $t^*(P) = 2P_1 + P_2$. (Это возможно только в случае башни (7.2)).

Ba) Если π не разветвлено над обеими точками P_i, то G_0 порождается элементом i и q над P имеет единственное ветвление индекса 2, а p не разветвлено над всеми тремя прообразами точки P.

Bb) Если π разветвлено над P_2 и не разветвлено над P_1, то $G_0 \cong \langle i_1 i \rangle$ и q над P имеет одно ветвление индекса 2, а p разветвлено над простыми прообразами точки P.

Bc) Если π разветвлено над P_1 и не разветвлено над P_2, то G_0 сопряжено с $\langle i_2 i \rangle$ и q над P имеет точку ветвления индекса 4, над которой p не разветвлено.

Bd) Если π разветвлено и над P_1, и над P_2, то G_0 сопряжено подгруппе $\langle i_1 i_2 i \rangle$ в S_6 и опять q над P имеет ветвление индекса 4, над которой p не разветвлено.

C) Предположим, что $t^*(P) = 3P_1$.

Ca) Если π над P_1 не разветвлено, то $G_0 \cong \langle i, j \rangle$ и q над P имеет одну простую точку и одну точку ветвления индекса 3, причем p не разветвлено над ними.

Cb) Если π разветвлено над P_1, то G_0 сопряжено $\langle i_1 j \rangle$ в S_6 и опять q над P имеет единственное ветвление индекса 3, но p уже разветвлено над обоими прообразами P.

Обозначим через w_{Uv} число точек кривой X, принадлежащих типу (Uv). Положим $\delta = w_{Ab} + w_{Ad} + w_{Bb} + w_{Bc} + w_{Cb}$.

Предложение 8.2.1. *Для родов соответствующих кривых башен (7.1) и (7.2) справедливо соотношение*

$$g(\tilde{C}) - g(C) \leq g(\tilde{Y}) - g(Y),$$

за исключением случая $X = \mathbb{P}^1$, $\delta = 0$.

Равенство достигается в двух случаях:

(i) если X – проективная прямая $\mathbb{P}^1$ и $\delta = 2$;

(ii) если X – эллиптическая кривая и $\delta = 0$.

Доказательство. сводится к вычислению родов указанных кривых по формуле Гурвица с учетом полученного описания ветвлений накрытий башен (7.1) и (7.2). □

8.3 Основной результат

Исключим из рассмотрения те башни, для которых не выполняется неравенство доказанного предложения, т. е. случай $X = \mathbb{P}^1$, $\delta = 0$. Заметим, что он разобран в предыдущей главе.

Для обозначения индуцированных накрытиями кривых гомоморфизмов прямого и обратного образов якобиевых многообразий используются соответственно нижняя и верхняя звездочки, а крышечка обозначает двойственный морфизм дуальных абелевых многообразий.

Напомним, что многообразие Прима двулистного накрытия $\pi : \tilde{C} \to C$ определяется как связная компонента нуля ядра гомоморфизма прямого образа (норменного отображения) $\pi_* : J(\tilde{C}) \to J(C)$. Многообразие Прима P_π оснащается канонической поляризацией ρ_π, которая ассоциируется с главной поляризацией, если π разветвлено не более, чем в двух точках ([101]).

Теорема 8.3.1. *Для многообразий Прима P_pi и P_p двулистных накрытий π и p башен (7.1) и (7.2) существуют изогенное вложение $\alpha : P_\pi \to P_p$ и сюрьективный гомоморфизм $\alpha' : P_p \to P_\pi$, для которых $\alpha' \cdot \alpha = 4P_\pi$. При этом*

$$\ker \alpha \supset \pi^*(\ker t_*) \cap P_\pi, \qquad \ker \alpha' \supset p^*(\ker q_*) \cap P_p,$$

а канонические поляризации ρ_π и ρ_p примианов P_π и P_p связаны соотношением

$$\hat{\alpha} \cdot \rho_p \cdot \alpha = 4\rho_\pi.$$

Доказательство. В случае башни (7.1) надо взять

$$\alpha = \check{t}_* \cdot \check{q}^*, \qquad \alpha' = \check{q}_* \cdot \check{t}^*.$$

Включения для ядер получаются из равенств

$$\alpha \cdot \pi^* = p^* \cdot q^* \cdot t_*, \qquad \alpha' \cdot p^* = \pi^* \cdot t^* \cdot q_*.$$

Соотношение на поляризации проверяется непосредственным вычислением.

В случае башни (7.2), если положить

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\mu}_* \cdot \check{t}_* \cdot \check{q}^* \cdot \tilde{\nu}^*, \qquad \tilde{\alpha}' = \tilde{\nu}_* \cdot \check{q}_* \cdot \check{t}^* \cdot \tilde{\mu}^*,$$

получим $\tilde{\alpha}' \cdot \tilde{\alpha} = 16P_\pi$, $\hat{\tilde{\alpha}} \cdot \rho_p \cdot \tilde{\alpha} = 16\rho_\pi$. Рассмотрением групп Галуа накрытий $\tilde{\nu} \cdot \check{q}$ и $\tilde{\mu} \cdot \check{t}$ нетрудно убедиться в существовании двулистного накрытия $\check{X} \to \check{X}_0$, через которое пропускаются восьмилистное накрытие $\tilde{\nu} \cdot \check{q}$ и шестилистное накрытие $\tilde{\mu} \cdot \check{t}$. Поэтому $\tilde{\alpha} = 2\alpha$, $\tilde{\alpha}' = 2\alpha'$ и морфизмы α, α' удовлетворяют требованиям теоремы.

Предположим теперь, что в башнях (7.1) и (7.2) $X = \mathbb{P}^1$, $\delta = 2$ и $w_{Ac} = w_{Bc} = w_{Ad} = 0$. Тогда размерности многообразий Прима P_π и P_p совпадают, причем двулистное накрытие

π разветвлено над двумя точками, отображающимися при t в разные точки прямой $\mathbb{P}^1$, а двулистное накрытие p имеет $2(w_{Bb}+w_{Cb}) \leq 4$ ветвлений. Значит при $w_{Bb}+w_{Cb} \leq 1$ получим главно поляризованные примианы

$$(P_\pi, \Xi_\pi), \quad (P_p, \Xi_p) \qquad (\rho_\pi = 2\lambda_{\xi_\pi}, \quad \rho_p = 2\lambda_{\xi_p})$$

(см. [101]). □

Следствие 8.3.2. *Главно поляризованные абелевы многообразия (P_π, Ξ_π) и (P_p, Ξ_p) изоморфны.*

Согласно [101]

$$\pi^*(\ker t_*) \cap P_\pi, \qquad p^*(\ker q_*) \cap P_p$$

совпадают в точности с подгруппами точек второго порядка примианов $(P_\pi)_2$ и $(P_p)_1$. Поэтому

$$|\ker(\alpha' \cdot \alpha)| = |\ker \alpha'| \cdot |\ker \alpha| \geq |(P_\pi)_2| \cdot |(P_p))2| = 2^{2(\dim P_\pi + \dim P_p)}.$$

С другой стороны,

$$|\ker(\alpha' \cdot \alpha)| = |\ker 4P_\pi| = 4^{2\dim P_\pi}.$$

Мы пользуемся известным фактом ([99]), что число точек n-того порядка A_n на абелевом многообразии A вычисляется по формуле

$$|A_n| = n^{2\dim A}.$$

Из полученных равенств следует, что

$$\ker \alpha = (P_\pi)_2, \qquad \ker \alpha' = (P_p)_2.$$

Следовательно,

$$\alpha = 2\alpha_0, \quad \alpha' = 2\alpha_0', \qquad \alpha_0' \cdot \alpha_0 = 1, \quad \alpha_0^*(\Xi_p) = \Xi_\pi.$$

Таким образом, многообразие Прима двулистного накрытия тригональной кривой, разветвленного над двумя точками, не принадлежащими одному дивизору тригонального ряда, совпадает с многообразием Прима двулистного накрытия кривой с рядом g_4^1, которое не разветвлено, если точки ветвления накрытия тригональной кривой имеют тип (Ab) или (Bc), и разветвлено в двух точках, если эти ветвления типа (Bb) или (Cb).

В связи с вышеприведенными результатами приведем основной результат статьи Донаги [83].

Пусть $\pi : \tilde{C} \to C$ – неразветвленное двулистное накрытие неособой кривой C, допускающей четырехлистное (= тетрагональное) накрытие $q : C \to \mathbb{P}^1$. Тогда существует аналогичная вышеприведенной каноническая конструкция, названная тетрагональной и восходящая к Рецилласу [102], позволяющая с тройкой $(\tilde{C}, C, q)$ ассоциировать еще две аналогичные тройки $(\tilde{C}_0, C_0, q_0)$ и $(\tilde{C}_1, C_1, q_1)$, так что многообразия Прима $P(\tilde{C}, C)$, $P(\tilde{C}_0, C_0)$ и $P(\tilde{C}_1, C_1)$ изоморфны. Далее в указанной статье даются интересные приложения этого результата к вычислению слоев отображения Прима $P_g : \mathcal{R}_g \to \mathcal{A}_{g-1}$ из многообразия модулей $\mathcal{R}_g$ неразветвленных двулистных накрытий $\pi : \tilde{C} \to C$ с неособой кривой C рода g в многообразие модулей $\mathcal{A}_{g-1}$ главно поляризованных абелевых многообразий размерности $g-1$ к проблеме Торелли (инъективности отображения Прима) и к проблеме Шоттки (конкретнее – к уточнению результатов Андреотти-Майера [74] и Бовиля [76], описывающих неприводимые компоненты подмногообразия модулей $\mathcal{V}_g \subset \mathcal{A}_g$ многообразий Андреотти-Майера).

В связи с этими вопросами Донаги выдвигает две гипотезы.

(i) Многообразия Прима неразветвленных двулистных накрытий изоморфны тогда и только тогда, когда накрываемые кривые тетрагональны, а двулистные накрытия получаются друг из друга последовательностью тетрагональных конструкций.

(ii) Все многообразия Андреотти-Майера принадлежат замыканию образа отображения Прима, т. е. исчерпываются якобианами кривых и примианами двулистных накрытий тетрагональных и приводимых кривых.

Наши результаты позволяют сделать следующие замечания к первой гипотезе. Во-первых, если взять две точки ветвления накрытия π типов (Ab) или (Bc), то двулистное накрытие p оказывается неразветвленным и получается, что примиан неразветвленного накрытия тетрагональной кривой может быть изоморфным примиану разветвленного накрытия тригональной кривой. Во-вторых, естественней не ограничиваться примианами неразветвленных накрытий, а рассматривать также разветвленные двулистные накрытия. Согласно вышеприведенному следствию в специальных случаях расположения двух точек ветвления (типы (Bb)и (Cb)) разветвленный тетрагональный примиан оказывается изоморфным разветвленному тригональному примиану.

Глава 9

Тетрагональные кривые

В этой главе исследуются алгебраические кривые, несущие полные линейные ряды g_4^1 без неподвижных точек, то есть четырехлистные накрытия проективной прямой $\mathbb{P}^1$. Такие кривые называются тетрагоналями, а соответствующие ряды и накрытия – тетрагональными. Интерес к тетрагоналям обусловлен, в частности, той ролью, которую они играют в теории многообразий Прима. Так, все исключительные случаи теоремы Мамфорда-Бовиля об особенностях примианов двулистных накрытий кривых ([101], [76]) можно отнести к тетрагоналям, если гиперэллиптические и тригональные накрытия рассматривать как вырождения накрытия тетрагонального. В статье [102] и предыдущих двух главах настоящей диссертации доказывается, что многообразие Прима двулистного накрытия тригонали возникает как якобиан тетрагональной кривой или как примиан двулистного накрытия тетрагонали. В статье [83] выдвигается и обосновывается гипотеза, что тетрагональными примианами исчерпываются все случаи нарушения "теоремы Торелли"для примианов.

В первом параграфе исследуется вопрос единственности ряда данного порядка на кривой. В частности, доказывается, что на кривых рода $g > 9$ может существовать только единственный тетрагональный ряд. Во втором параграфе производится классификация тетрагоналей на основе группы Галуа нормализации тетрагонального накрытия, даются необходимые и достаточные условия принадлежности тетрагонали к тому или иному классификационному типу. Следующие параграфы посвящены определению классификационного типа тетрагональных кривых некоторых частных видов (суперэллиптических, неособых плоских квинтик, тригонально-тетрагональных).

9.1 О единственности ряда g_4^1 на тетрагональной кривой

На тетрагональных кривых малых родов ряд g_4^1 может определяться неоднозначно. Например, на любой негиперэллиптической, нетригональной кривой рода 5 существует, по крайней мере, одно однопараметрическое семейство тетрагональных рядов. Закономерен вопрос: для любого ли рода существуют кривые с более чем одним тетрагональным рядом? Ответ на этот вопрос тем более важен, что с ним связано решение проблемы Торелли для отображения Прима ([111], [77], [94], [90]). Из доказываемой ниже теоремы мы выведем, что род кривой, несущей ряды $g_p^1 \neq g_q^1,\ p, q \leq 4$, ограничен сверху и получим точные оценки.

Теорема 9.1.1. *Если на негиперэллиптической кривой существуют полные линейные ряды Яри $g_p^1 \neq g_q^1$ без неподвижных компонент, то на ней существует полный линейный ряд $g_r^1,\ r \leq p+q-1$.*

Доказательство. Рассмотрим каноническую модель Y кривой рода g в проективном пространстве $\mathbb{P}^{g-1}$. Пусть дивизор $\mathcal{D}$ ряда g_p^1 не имеет кратных точек. По теореме Римана-Роха $i(\mathcal{D}) = g+1-p$. Это означает, что пространство $\langle\mathcal{D}\rangle$, натянутое на носитель $\mathrm{supp}(\mathcal{D})$ дивизора $\mathcal{D}$, имеет размерность $\dim\langle\mathcal{D}\rangle = p-2$.

Выберем дивизор $\mathcal{D}'$ ряда g_q^1 так, чтобы он не содержал кратных компонент и общая часть $\mathcal{D}_0$ дивизоров $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ была бы ненулевая. Пусть

$$\deg\mathcal{D}_0 = s \geq 1, \quad \mathcal{D}' - \mathcal{D}_0 = \sum_{i=1}^{q-s} P_i.$$

Рассмотрии цепочку вложенных проективных пространств

$$\langle\mathcal{D}\rangle \subseteq \langle\mathcal{D}+P_1\rangle \subseteq \langle\mathcal{D}+P_1+P_2\rangle \subseteq ... \subseteq \langle\mathcal{D}+\mathcal{D}'-\mathcal{D}_0\rangle.$$

Поскольку

$$\dim \langle \mathcal{D} \rangle = p-2, \quad \dim \langle \mathcal{D}' \rangle = q-2,$$

легко видеть, что

$$\dim \langle \mathcal{D} + \mathcal{D}' - \mathcal{D}_0 \rangle = p+q-s-3.$$

Следовательно, найдется $t < q-s$ такое, что

$$\dim \left\langle \mathcal{D} + \sum_{i=1}^{t} P_i \right\rangle = \dim \left\langle \mathcal{D} + \sum_{i=1}^{t+1} P_i \right\rangle = p-2+t$$

Тогда

$$l(\mathcal{D} + \sum_{i=1}^{t+1} P_i) = \deg(\mathcal{D} + \sum_{i=1}^{t+1} P_i) - \dim \left\langle \mathcal{D} + \sum_{i=1}^{t+1} P_i \right\rangle = 3.$$

Таким образом, $|\mathcal{D} + \sum_{i=1}^{t+1} P_i| = g_r^2, \quad r = p+t+1 \leq p+q-s \leq p+q-1.$ $\square$

Применим доказанную теорему в трех случаях:

1) когда на кривой существуют два тригональных ряда;

2) когда кривая одновременно тригональна и тетрагональна;

3) когда на кривой существуют два тетрагональных ряда.

Прежде всего заметим, что на гиперэллиптической кривой рода $g \geq 4$ нет полных линейных рядов g_3^1 и g_4^1 без неподвижных точек. Поэтому из существования тригонального или тетрагонального ряда при $g \geq 4$ следует негиперэллиптичность кривой. Далее Y негиперэллиптична.

Пусть Y – произвольная (не обязательно плоская) алгебраическая кривая. Инволюция степени ν на кривой Y – это регулярное отображение $\gamma_\nu : X \to S_\nu(Y)$, где X – алгебраическая кривая, $S_\nu(Y)$ – ν-кратное симметрическое произведение кривой Y. Линейный ряд g_n^r составлен из инволюции γ_ν, если любой дивизор ряда g_n^r представим в виде суммы дивизоров инволюции γ_ν. Ряд g_n^r порядка n и размерности r, составленный из некоторой инволюции γ_ν порядка ν $(1 < \nu < n)$, называется составным. В противном случае, ряд g_n^r называется простым. С любым линейным рядом g_n^r ассоциировано преобразование T кривой Y, которое при g_n^r простом является бирациональным вложением в проективное пространство $\mathbb{P}^r$ размерности r в качестве кривой степени n. Если же ряд g_n^r составлен из инволюции максимального порядка ν, то образ $T(Y) \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ является кривой степени n/ν и все точки дивизора инволюции γ_ν отображаются в одну точку кривой $T(Y)$.

Предложение 9.1.2. *На тригональной кривой Y рода $g(Y) \geq 5$ ряд g_3^1 единствен. На кривой Y рода 4 либо существуют ровно два тригональных ряда, в сумме дающих канонический класс, либо тригональный ряд единствен и является половинкой канонического класса. На кривой Y рода 3 существует однопараметрическое семейство рядов g_3^1, которое параметризовано точками кривой Y.*

Доказательство. Согласно теореме 9.1.1, если ка кривой существуют два тригональных ряда, то на ней существует полный линейный ряд g_5^2. Если этот ряд без неподвижных компонент, то он простой и определяет бирациональное вложение Y в проективную плоскость в качестве кривой степени 5. Поэтому ее род $g(Y) \leq 6$. При $g(Y) \geq 5$ кривая Y может иметь самое большее одну особую точку, причем обыкновенную.

Для произвольного дивизора $\mathcal{D}$ из тригонального ряда система $|2L - B - \mathcal{D}|$ специальных сопровождающих кривых, проходящих через $\mathcal{D}$, высекает на кривой Y линейный ряд $|K - \mathcal{D}|$ размерности $\dim |k - \mathcal{D}| = g(Y) - 3$. Таким образом,

$$\dim |2L - B - \mathcal{D}| = \dim |2L - B| - 2.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда среди базисных точек системы $|2L - B - \mathcal{D}|$ имеются более трех коллинеарных.

Значит на плоской квинтике рода 6 вообще нет тригонального ряда, а на плоской квинтике рода 5 имеется единственный ряд g_3^1, высекаемый прямыми через особую точку.

Рассмотрим теперь негиперэллиптические кривые рода 4. Их каноническая модель является полным пересечением квадрики и кубики в $\mathbb{P}^3$. Если квадрика неособа, то каждая из двух систем прямых на ней высекает тригональный ряд на канонической модели, причем в сумме эти ряды дают канонический класс. На особой квадрике существует единственная система прямых, которая высекает ряд g_3^1, являющийся половинкой канонического класса. С другой стороны, так как $\dim |K - g_3^1| = 1$, то точки дивизоров $\mathcal{D}$ ряда

g_3^1 коллинеарны и, следовательно, все ряды g_3^1 на кривых рода 4 имеют описанный выше вид.

Если род негиперэллиптической кривой равен трем, то ее канонический образ является неособой плоской квартикой, на которой все ряды g_3^1 высекаются пучками прямых через базисную точку, лежащую на квартике.

Наконец, заметим, что ввиду негиперэллиптичности Y ряд g_5^2 может иметь не более одной базисной точки, причем если $g_5^2 = g_4^2 + P$, то ряд g_4^2 простой. Следовательно, он определяет вложение $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ в качестве квартики, то есть $g(Y) \leq 3$. □

Предложение 9.1.3. *Если на кривой Y существуют полные ряды g_3^1 и g_4^1 без неподвижных точек, то ее род $g(Y) \leq 6$.*

Доказательство. Рассмотрим полный линейный ряд g_r^6 $(r \leq 6)$ на Y, существование которого при условиях предложения 9.1.3 гарантируется теоремой 9.1.1. Если $r \leq 5$, то, очевидно, $g(Y) \leq 6$.

Пусть $r - 6$. Если полный линейный ряд g_6^2 простой, то он определяет бирациональное вложение Y в $\mathbb{P}^2$, имеющее образом кривую $T(Y)$ степени 6, откуда $g(Y) \leq 10$.

Для любого дивизора $\mathcal{D}$ ряда g_3^1

$$\dim |3L - B - \mathcal{D}| = \dim |3L - B| - 2.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда система сопровождающих кубических кривых содержит неподвижную компоненту. Эта компонента – прямая, если существует дивизор $\mathcal{D}'$ такой, что

$$\mathcal{D} < \mathcal{D}' < B + \mathcal{D}, \quad \deg \mathcal{D}' = 5$$

и точки этого дивизора коллинеарны.

Неподвижная компонента – кривая второго порядка, если существует дивизор $\mathcal{D}$' степени 8, удовлетворяющий условию $\mathcal{D} < \mathcal{D}' < B + \mathcal{D}$, точки которой лежат на кривой второго порядка. Поскольку эти условия должны выполняться для любого дивизора $\mathcal{D}$ ряда g_3^1, то отсюда заключаем, что базисный дивизор B системы сопровождающих кривых должен содержать точку кратности два, то есть кривая $T(Y)$ должна иметь особую точку кратности 3.

Аналогично, для произвольного дивизора $\mathcal{D}$ тетрагонального ряда g_4^1 имеем

$$\dim |3L - B - \mathcal{D}| = \dim |3L - B| - 3.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда либо среди точек дивизора B существуют четыре точки кратности 1, лежащие вместе с точками дивизора $\mathcal{D}$ на одной кривой второй степени, либо точки $\mathcal{D}$ коллинеарны с простой точкой базисного дивизора B. Таким образом, для существования рядов g_3^1 и g_4^1 без неподвижных точек на плоской кривой $T(Y)$ степени 6 необходимо и достаточно, чтобы она имела по одной особой точке кратностей 2 и 3, при этом ее род $g(T(Y)) \leq 6$, а соответствующие ряды высекаются пучками прямых через эти точки.

Предположим, что полный линейный ряд g_6^2 составлен из инволюции γ_ν. Тогда рациональное отображение $T : Y \to \mathbb{P}^2$, ассоциированное с g_5^2, будет иметь в качестве образа плоскую кривую $T(Y)$ степени $6/\nu$. При $\nu = 2$ ввиду негиперэллиптичности Y имеем $g(T(Y)) = 1$, то есть Y – суперэллиптическая кривая. Далее будет доказано, что на суперэллиптических кривых рода $g > 4$ тригональных рядов нет. При $\nu = 3$ имеем $g(T(Y)) = 0$ и, следовательно, отображение T определяет тригональный ряд на Y. Из единственности тригонального ряда на кривой рода $g > 4$ заключаем, что он совпадает с данным по условиям предложения 9.1.3 рядом g_3^1. Значит дивизоры ряда g_6^2 имеют вид $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$, где $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ принадлежат ряду g_3^1. С другой стороны, согласно общей конструкции теоремы 9.1.1

$$g_6^2 = |\mathcal{D} + \mathcal{D}_0|, \quad \mathcal{D}_0 \in g_3^1, \quad \mathcal{D}_0 + P \in g_4^1.$$

Отсюда получается, что $g_4^1 = g_3^1 + P$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения 9.1.3. □

Теми же методами доказывается

Предложение 9.1.4. *Если на несуперэллиптической кривой Y существуют два тетрагональных ряда, то ее род $g(Y) \leq 9$.*

Согласно теореме 9.1.1 на кривой Y существует ряд g^2_r с $r \leq 7$. Если он простой, то с ним ассоциировано бирациональное отображение Y либо (при $r = 7$) на плоскую кривую степени 7, имеющую по крайней мере две особые точки кратности 3, либо (при $r = 6$) на плоскую кривую степени 6 с не менее, чем двумя особыми точками кратности 2, либо (при $r = 5$) на плоскую квинтику. Во всех случаях $g(Y) \leq 9$.

Если ряд g^2_6 составной, то таким же образом, как в предложении 9.1.3 показывается, что кривая Y либо суперэллиптична, либо тригональна. Но тригонально-тетрагональные кривые имеют род $g \leq 6$.

Подчеркнем, что ограничения на роды кривых в предложениях 9.1.3 и 9.1.4 точные: существуют кривые рода 6, несущие одновременно тригональный и тетрагональный ряды, и кривые рода 9 с двумя тетрагональными рядами ([77]).

9.2 Классификация тетрагональных накрытий на основе группы Галуа их нормализации

Все кривые, рассматриваемые в этом параграфе, предполагаются полными и неособыми. Основное поле $\mathbf{k}$ имеет характеристику $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2, 3$ и содержит первообразный корень четвертой степени из единицы.

Пусть $q : C \to \mathbb{P}^1$ – тетрагональное накрытие. Им индуцируется расширение степени четыре $K_1 \hookrightarrow K_2$ соответствующих полей рациональных функций и линейный ряд g^1_4 на C. Ввиду ограничения на характеристику основного поля, K_2 является сепарабельным расширением поля K_1, получающимся присоединением корня многочлена $f(X) \in K_1[X]$ степени $\deg f(X) = 4$. Обозначим через K_3 поле разложения многочлена $f(X)$. Группа Галуа G расширения Галуа K_3/K_1 является подгруппой симметрической группы S_4 кратного четырем порядка.

Предположим, что q разлагается в композицию двулистных накрытий

$$C \xrightarrow{\pi} C_0 \xrightarrow{h} \mathbb{P}^1 \tag{9.2.1}$$

и обозначим через $\tilde{W}_\pi$ и $\tilde{W}_h$ дивизоры ветвления накрытий π и h, а через i_π и i_h – инволюции, индуцированные этими накрытиями. Тогда соответствующий ряд g^1_4 – составной и не содержит дивизоров вида $3P+Q, \quad P \neq Q$, а расширение $K_1 \hookrightarrow K_2$ разлагается в башню квадратичных расширений $K_1 \hookrightarrow K \hookrightarrow K_2$, где

$$K = K_1(\sqrt{\alpha}), \quad \alpha \in K_1; \qquad K_2 = K(\sqrt{\beta}), \quad \beta = a + b\sqrt{\alpha}, \quad a, b \in K_1.$$

Очевидно, при этом $K_2 = K_1(\sqrt{a+b\sqrt{\alpha}})$ и $\sqrt{a+b\sqrt{\alpha}}$ является корнем многочлена

$$f(X) = X^4 - 2aX^2 + (a^2 - b^2\alpha).$$

Обратно, если расширение четвертой степени $K_1 \hookrightarrow K_2$ можно определить биквадратным многочленом $f(X) = X^4 + 2uX^2 + v$, то оно разлагается в башню $K_1 \hookrightarrow K \hookrightarrow K_2$ с $K = K_1(\sqrt{\alpha})$, $\alpha = u^2 - v$ и $K_2 = K(\sqrt{\beta})$, $\beta = -u + \sqrt{\alpha}$.

Предложение 9.2.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) тетрагональное накрытие $q : C \to \mathbb{P}^1$ является накрытием Галуа с клейновой группой Галуа: $G_q \cong \mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

(ii) тетрагональное накрытие q разлагается в композицию 9.2.1, где $h_*(\pi_*\tilde{W}_\pi) = 2\mathcal{D}$, а $\mathcal{D}$ – дивизор без кратных точек;

(iii) расширение $K_1 \hookrightarrow K_2$ полей рациональных функций, ассоциированных с тетрагональным накрытием q, определяется биквадратным трехчленом $f(X) = X^4 + 2uX^2 + v, \quad v \in K_1^2$;

(iv) тетрагональный ряд g^1_4 составной и содержит только дивизоры видов $\Sigma_{i=1}^4 P_i$ и $2P_1 + 2P_2$, где $P_i \neq P_j$ при $i \neq j$.

Доказательство. эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (ii) дано в главе 6, (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) очевидно. Покажем, что (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

На основании теоремы 6.3.2 гл. 6 группа G_q изоморфна $\mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда C является расслоенным произведением двух гиперэллиптических кривых, что, в свою очередь, равносильно существованию двух разложений

$$K_1 \hookrightarrow K_\alpha = K_1(\sqrt{\alpha}) \hookrightarrow K_2, \quad K_1 \hookrightarrow K_\beta = K_1(\sqrt{\beta}) \hookrightarrow K_2,$$

$$K_2 = K_\alpha(\sqrt{\beta}) = K_\beta(\sqrt{\alpha}) = K_1(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}) = K_1(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}), \quad \alpha, \beta \in K_1.$$

Очевидно, что при этом K_2 является полем разложения на линейные множители многочлена $f(X) = X^4 - 2(\alpha+\beta)X^2 + (\alpha-\beta)^2$. Обратно, если K_2 является полем разложения на линейные множители многочлена $f(X) = X^4 + 2uX^2 + v$ с $v \in K_1^2$, то можно взять

$$\alpha = -\frac{u}{2} + \frac{\sqrt{v}}{2}, \quad \beta = -\frac{u}{2} - \frac{\sqrt{v}}{2}.$$

□

Предложение 9.2.2. *Следующие условия (i) – (iv) эквивалентны: (i) тетрагональное накрытие $q : C \to \mathbb{P}^1$ циклическое;*

(ii) тетрагональное накрытие q разлагается в композицию (9.2.1) с $\pi_*(\tilde{W}_\pi) = i_h(\pi_*(\tilde{W}_\pi))$, $\pi_*(\tilde{W}_\pi) > W_h$;

(iii) расширение K_2 является полем разложения на линейные множители неприводимого над K_1 двучлена $X^4 - c$;

(iv) ряд g_4^1 составлен из инволюции γ_2 и обязательно содержит дивизоры видов $4P$, $\Sigma_{i=1}^4 P_i$ ($P_i \neq P_j$ при $i \neq j$), а кроме того, возможно, еще дивизоры вида $2P_1 + 2P_2$, составленные из дивизоров $2P_1$ и $2P_2$ инволюции γ_2.

Предложения 9.2.1 и 9.2.2 дают полное описание тетрагональных накрытий Галуа. Предположим теперь, что q разлагается в композицию двулистных накрытий, но не является накрытием Галуа.

Обзор подгрупп симметрической группы S_4 показывает, что в этом случае группа G нормализации накрытия q совпадает с единственной, с точностью до сопряжения, подгруппой S_4 индекса 3, диэдральной группой Q.

Предложение 9.2.3. *Перечисленные ниже условия эквивалентны:*

(i) группа Галуа нормализации тетрагонального накрытия $q : C \to \mathbb{P}^1$ изоморфна диэдральной группе Q;

(ii) тетрагональное накрытие q разлагается в композицию (9.2.1), причем если $\pi_*(\tilde{W}_\pi) = i_h(\pi_*(\tilde{W}_\pi))$, то общая часть $(\pi_*(\tilde{W}_\pi), \tilde{W}_h)$, дивизоров $\pi_*(\tilde{W}_\pi)$,и $\tilde{W}_h$ не равна 0 и $\tilde{W}_h$;

(iii) ассоциированное с тетрагональным накрытием q расширение K_2/K_1 полей рациональных функций определяется биквадратным многочленом $f(X) = X^4 + 2uX^2 + v$, причем $u =\neq o$, $v \notin K_1^2$;

(iv) ряд g_4^1 составлен из инволюции γ_2, не содержит дивизоров вида $3P_1 + P_2$ и обязательно содержит либо дивизоры вида $2P_1+P_2+P_3$, либо одновременно дивизоры видов $4P$ и $2P_1+2P_2$, где P_1+P_2 принадлежит инволюции γ_2 (здесь всюду $P_i \neq P_j$ при $i \neq j$).

Доказательство. Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (iii) следует из эквивалентности соответствующих условий предложений 9.2.1 и 9.2.2. Проверим, что (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Пусть (W_π, U_π) – характеристика накрытия π, где $W_\pi = \pi_* \tilde{W}_\pi$ – дивизор, над которым разветвлено , а U_π – половинка дивизора W_π, соответствующая накрытию π (см. главу 1). Чтобы композиция $h \cdot \pi$ вписывалась в башню Галуа с диэдральной группой Q, необходимо и достаточно, чтобы $(W_\pi, U_\pi) \neq i_h(W_\pi, U_\pi)$ (главы 1 и 2). Если $W_\pi = i_h W_\pi$, то $W_\pi = h^*(W) + \tilde{W}$, $\tilde{W} < \tilde{W}_h$, а $U_\pi \equiv i_h U_\pi$ тогда и только тогда, когда

$$\tilde{U}_\pi + i_h \tilde{U}_\pi = h^* h_* U_\pi \equiv h^*(W + U') \equiv W_\pi,$$

то есть $\tilde{W} \equiv h^*(U')$. Это, в свою очередь, равносильно условию

$$e_1 + ... + e_k \equiv e_{k+1} + ... + e_{2k}, \quad \sum_{j=1}^{2k} e_j = \tilde{W} < \tilde{W}_h,$$

для выполнения которого по теореме Римана-Роха необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{W} = \tilde{W}_h$. Эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) очевидна. □

Перейдем к рассмотрению случая неразложимого накрытия q. При этом можно предположить, что $f(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$ $(b \neq 0)$. Группа Галуа нормализации накрытия q будет изоморфна либо знакопеременной группе $A_4 < S_4$, либо самой симметрической группе S_4.

Предложение 9.2.4. *Каждое из следующих условий эквивалентно другому:*

(i) группа Галуа нормализации тетрагонального накрытия $q : C \to \mathbb{P}^1$ изоморфна знакопеременной группе A_4;

(ii) тетрагональное накрытие q имеет хотя бы одно ветвление индекса 3, а кроме того может иметь еще только парные ветвления индекса 2 над точками $\mathbb{P}^1$;

(iii) дискриминант

$$D = 16a^4c - 4a^3b^2 - 128a^2c^2 + 144ab^2c - 27b^4 + 256c^3$$

многочлена $f(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$ $(b \neq 0)$, определяющего расширение полей рациональных функций K_2/K_1, ассоциированное с тетрагональным накрытием q, лежит в K_1^2;

(iv) ряд g_4^1 не содержит дивизоров видов $4P$, $2P_1 + P_2 + P_3$ и обязательно содержит дивизоры видов $\sum_{i=1}^4 P_i$, $\quad 3P_1 + P_2$, где $P_i \neq P_j$ при $i \neq j$.

Предложение 9.2.5. *Условия (i) – (iv) равносильны:*

(i) группа Галуа нормализации тетрагонального накрытия $q : C \to \mathbb{P}^1$ изоморфна симметрической группе S_4;

(ii) тетрагональное накрытие q не разлагается в композицию двулистных накрытий и либо имеет ветвление индекса 4, либо единственное ветвление индекса 2 над точкой $\mathbb{P}^1$;

(iii) дискриминант

$$D = 16a^4c - 4a^3b^2 - 128a^2c^2 + 144ab^2c - 27b^4 + 256c^3$$

многочлена $f(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$ $(b \neq 0)$, определяющего расширение полей рациональных функций K_2/K_1, ассоциированное с тетрагональным накрытием q, не лежит в K_1^2;

(iv) ряд g_4^1 простой и обязательно содержит дивизор вида $4P$ или $2P_1 + P_2 + P_3$ $(P_i \neq P_j$ при $i \neq j)$.

Доказательство. предложений 9.2.4 и 9.2.5. Эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (ii) следуют из результатов пар. 2, 4 и 5 главы 7. Эквивалентности (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) очевидны. Эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (iii) доказываются аналогично случаю расширений полей степени 3 ([121], VIII, 2). $\square$

Определение 9.2.1. По группе Галуа нормализации тетрагональное накрытие будем называть *клейновым, циклическим, диэдральным, знакопеременным или симметрическим.*

9.3 Суперэллиптические кривые

Кривые рода $g \leq 4$ либо гиперэллиптичны, либо тригональны. Покажем, что суперэллиптические кривые рода $g \geq 5$ не гиперэллиптичны и не тригональны.

Пусть $s : C \to E$ суперэллиптическое накрытие. Если кривая допускает также гиперэллиптическое накрытие $h : C \to \mathbb{P}^1$, то соответствующие инволюции i_s и i_h коммутируют. Действительно, в противном случае существовала бы точка P кривой C такая, что

$$P + i_h P \neq i_s P + i_h i_s P, \quad i_s(P + i_h P) \neq i_s P + i_h i_s P, \quad P + i_h P \equiv i_s P + i_h i_s P.$$

Отсюда

$$s_*(P) + s_*(i_h P) \neq s_*(i_s P) + s_*(i_h i_s P), \quad s_*(P) + s_*(i_h P) \equiv s_*(i_s P) + s_*(i_h i_s P),$$

то есть эллиптическая кривая E рациональна.

Если инволюции i_s и i_h коммутируют, то, как нетрудно заметить, кривая C является расслоенным произведением $E \times_{\mathbb{P}^1} \mathbb{P}^1$, поэтому ее род $g(C) \leq 3$.

Предположим теперь, что C не гиперэллиптична, но допускает тригональное накрытие $t : C \to \mathbb{P}^1$. Покажем, что тогда соответствующий тригональный ряд g^1_3 инволютивен относительно i_s. Предпошлем этому несложную формулу, которая будет часто использоваться в последующих вычислениях.

Пусть $p : \tilde{X} \to X$ – произвольное двулистное накрытие неособых полных кривых, $i = i_p$ – индуцированная им инволюция на $\tilde{X}$, $g \in \mathbf{k}(X)$ – рациональная функция, задающая ассоциированное квадратичное расширение полей рациональных функций:

$$\mathbf{k}(\tilde{X}) = \mathbf{k}(X)(\sqrt{g}).$$

Тогда

(a) на $\mathbf{k}(\tilde{X})$ существует инволюция $i = i_* = i^*$;

(б) $\mathbf{k}(\tilde{X})$ разлагается в прямую сумму подпространств $\mathbf{k}(X)^+$ – инвариантных и $\mathbf{k}(X)^-$ – антиинвариантных относительно инволюции i функций;

(в) $\mathbf{k}(X)^+ = p^*(\mathbf{k}(X)) \cong \mathbf{k}(X)$;

(г) $\mathbf{k}(X)^- = \sqrt{g}\ p^*(\mathbf{k}(X)) \cong \mathbf{k}(X)$.

Пусть далее $\tilde{W}_p$ – дивизор ветвления накрытия p,

$$W_p = p_*\tilde{W}_p \equiv 2U_p,$$

где U_p – половинка дивизора ветвления, соответствующая накрытию p. Любой i-инвариантный дивизор $\tilde{\mathcal{D}}$ на $\tilde{X}$ однозначно представим в виде

$$\tilde{\mathcal{D}} = p^*(\mathcal{D}) + \tilde{\mathcal{D}}' - \tilde{\mathcal{D}}'', \quad \tilde{\mathcal{D}}' + \tilde{\mathcal{D}}'' < \tilde{W}_p.$$

При этом

(а) подпространство

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{D}}) = \{f \in \mathbf{k}(\tilde{X}) \mid (f) + \tilde{\mathcal{D}} > 0\}$$

пространства $\mathbf{k}(\tilde{X})$ i-инвариантно;

(б) $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{D}}) = \mathcal{L}^+(\tilde{\mathcal{D}}) \oplus \mathcal{L}^-(\tilde{\mathcal{D}})$, где $\mathcal{L}^+(\tilde{\mathcal{D}}) = \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{D}}) \cap \mathbf{k}(\tilde{X})^+$, $\quad \mathcal{L}^-(\tilde{\mathcal{D}}) = \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{D}}) \cap \mathbf{k}(\tilde{X})^-$;

(в) $\mathcal{L}^+(\tilde{\mathcal{D}}) = p^*\mathcal{L}(\mathcal{D} - p_*(\tilde{\mathcal{D}}''))$;

(г) $\mathcal{L}^-(\tilde{\mathcal{D}}) \cong \sqrt{g}\ p^*\mathcal{L}((\mathcal{D} + U_p) - (W_p - p_*(\tilde{\mathcal{D}}')))$.

Теорема 9.3.1. $l(\tilde{D}) = l(\mathcal{D} - p_*(\tilde{\mathcal{D}}'')) + l((\mathcal{D} + U_p) - (W_p - p_*(\tilde{\mathcal{D}}')))$.

Возвращаясь к доказательству инвариантности тригонального ряда относительно суперэллиптической инволюции, предположим, что $g^1_3 \neq i_s g^1_3$. Пусть далее $c_l \neq c_k$ – точки ветвления накрытия s и $c_l + \mathcal{D}_l \equiv c_k + \mathcal{D}_k$ – дивизоры ряда g^1_3. Тогда

$$c_k + \mathcal{D}_k + i_s\mathcal{D}_k \equiv c_l + \mathcal{D}_l + i_s\mathcal{D}_l.$$

Значит $\mathcal{D}_l + i_s\mathcal{D}_k \equiv c_l + c_k + s^*(P)$.

Но при $g(C) \geq 5$ согласно полученному выше следствию $l(c_l + c_k + s^*(P)) = 1$, поэтому либо $c_l < \mathcal{D}_l,\ c_k < \mathcal{D}_k$, либо $c_l < \mathcal{D}_k,\ c_k < \mathcal{D}_l$. Оба случая приводятся к противоречию.

Из инволютивности $g_3^1 = i_s g_3^1$ следует, что существует единственная инволюция $i : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ такая, что $t_* \cdot i = i_s \cdot t_*$. Эта инволюция определяет двулистное накрытие $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, разветвленное в двух точках, причем они взаимно однозначно соответствуют i_s-инвариантным дивизорам ряда g_3^1. Легко видеть, что все точки ветвления суперэллиптического накрытия должны входить в i_s-инвариантные дивизоры тригонального ряда g_3^1, то есть их может быть не больше шести. Значит, $g(C) \leq 4$.

Предложение 9.3.2. *На кривой C рода $g \geq 6$ с суперэллиптическим накрытием $s : C \to E$ любой тетрагональный ряд имеет вид $g_4^1 = |s^*(\mathcal{P})|$, где $\mathcal{P}$ – дивизор второй степени на эллиптической кривой E. На суперэллиптической кривой рода 5 возможны еще ряды вида*

$$g_4^1 = |c_1 + c_2 + c_3 + c_4| = |c_5 + c_6 + c_7 + c_8|,$$

где $\sum_{i=1}^8 c_i$ – дивизор ветвления суперэллиптического накрытия.

Доказательство. Сначала проверим, что любой i_s-инвариантный тетрагональный ряд на C имеет указанный вид, потом покажем, что неинвариантных рядов g_4^1 на C нет.

Если $g_4^1 = i_s g_4^1$, то для произвольной точки ветвления c имеем $c + \mathcal{D} \equiv c + i_s\mathcal{D} \in g_4^1$ и, так как C не тригональна при $g \geq 5$, то $\mathcal{D} = i_s\mathcal{D}$. Значит $g_4^1 = |\xi|$, где $\xi = i_s\xi$. Согласно теореме 9.3.1 это возможно только в указанных в предложении случаях.

Предположим, что $g_4^1 \neq i_d g_4^1$. Пусть $c_k \neq c_l$ точки ветвления суперэллиптического накрытия и $c_k + \mathcal{D}_k \equiv c_l + \mathcal{D}_l \in g_4^1$.

Тогда $c_l + \mathcal{D}_l + i_s\mathcal{D}_l \equiv c_k + \mathcal{D}_k + i_s\mathcal{D}_k$. Значит $\mathcal{D}_k + i_s\mathcal{D}_l \equiv c_k + c_l + s^*(\mathcal{P})$ и, следовательно, при $g \geq 6$ $l(\mathcal{D}_k + i_s\mathcal{D}_l) = l(c_k + c_l + s^*(\mathcal{P})) = 2$. Отсюда $\mathcal{D}_k + i_s\mathcal{D}_l = \mathcal{D}_l + i_s\mathcal{D}_k$.

Разложив $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}'_k + \mathcal{D}''_k$, $\mathcal{D}_l = \mathcal{D}'_l + \mathcal{D}''_l$ в суммы инвариантных и чисто неинвариантных дивизоров

$$(\mathcal{D}'_k, i_s\mathcal{D}'_k) = 0, \quad \mathcal{D}''_k = i_s\mathcal{D}''_k, \qquad (\mathcal{D}'_l, i_s\mathcal{D}'_l) = 0, \quad \mathcal{D}''_l = i_s\mathcal{D}''_l,$$

будем иметь $\mathcal{D}'_k + i_s\mathcal{D}'_l = \mathcal{D}'_l + i_s\mathcal{D}'_k$, причем $\mathcal{D}'_k \neq 0$, $\mathcal{D}'_l \neq 0$ ввиду $g_4^1 \neq i_s g_4^1$. Значит $\mathcal{D}'_k = \mathcal{D}'_l$ и, следовательно, $c_k + \mathcal{D}''_k = c_l + \mathcal{D}''_l$, поскольку C не тригональ. Но последнее равенство означает, что $\mathcal{D}''_k$ содержит все $c_l \neq c_k$, что невозможно.

Заметим, что для существования на суперэллиптической кривой рода 5 тетрагонального ряда, не поднятого с эллиптической кривой, достаточно, чтобы

$$U_s \equiv c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \equiv c_5 + c_6 + c_7 + c_8,$$

где $\tilde{W}_s = \sum_{i=1}^{8} c_i$ – дивизор ветвления суперэллиптического накрытия, U_s – половинка дивизора $W_s = s_* \tilde{W}_s$, определяющая суперэллиптическое накрытие s. □

Следствие 9.3.3. *Тетрагональные ряды суперэллиптической кривой рода $g \geq 6$ образуют одномерное семейство, параметризованное точками соответствующей эллиптической кривой, причем все они – составные.*

Составные тетрагональные ряды либо клейновы, либо цикличны, либо диэдральны. Для любого рода $g \geq 5$ существуют суперэллиптические кривые рода g всех трех перечисленных типов. Действительно, если W_s – дивизор, над которым разветвлено суперэллиптическое накрытие, а i – инволюция на эллиптической кривой E, индуцированная эллиптическим накрытием $E \to \mathbb{P}^1$, то согласно результатам пар. 2:

(а) если дивизор W_s i-инвариантен, но не содержит i-инвариантных точек, то соответствующее тетрагональное накрытие клейново;

(б) если дивизор W_s i-инвариантен и содержит все i-инвариантные точки эллиптической кривой, то соответствующее тетрагональное накрытие циклическое;

(в) если дивизор W_s не i-инвариантен или содержит только часть i-инвариантных точек, то соответствующее тетрагональное накрытие диэдрально.

Предложение 9.3.4. *Любая суперэллиптическая кривая рода $g \geq 5$ несет диэдральный тетрагональный ряд. Существуют кривые любого рода $g \geq 5$, несущие циклические или клейновы суперэллиптические ряды. На суперэллиптических кривых рода $g \geq 6$ простых тетрагональных рядов нет.*

9.4 Неособые плоские квинтики

Исследуем неособую плоскую квинтику Y. Если на ней имеется составной тетрагональный ряд, то соответствующее накрытие разлагается в композицию двулистных иакрытий $y \xrightarrow{\pi} C \xrightarrow{h} \mathbb{P}^1$, где род $g(C) = 2$ или 3.

Предположим, что $g(C) = 3$. Тогда дивизор $\tilde{W}_\pi$ ветвления накрытия π имеет степень 2 и канонический класс $K_Y \equiv \pi^* h^*(P_1 + P_2) + \tilde{W}_\pi$,где $P_1 + P_2$ – произвольный дивизор проективной прямой. Но канонический класс кривой Y высекается плоскими кривыми степени 2, следовательно, $\pi^* h^*(P_1 + P_2) + \tilde{W}_\pi$ должно высекаться парой прямых пучка, определяющего ряд g_4^1 то есть $\tilde{W}_\pi$ должно равняться удвоенной базисной точке. Противоречие.

Пусть $g(C) = 2$. В этом случае $\deg \tilde{W} = 6$ и $K_Y \equiv \pi^* h^*(P) + \tilde{W}_\pi \equiv Q \cdot Y$, где кривая Q степени 2 распадается в пару прямых l и l', причем

$$l \cdot y = \Sigma_{i=1}^5 e_i, \quad l' \cdot Y = \pi^* h^*(P) + e_0, \quad \Sigma_{i=0}^5 e_i = \tilde{W}_\pi.$$

Нетрудио видеть, что точка e_0 должна быть точкой перегиба кривой Y. Заметим, что по формулам Плюккера неособая плоская квинтика может иметь не более 45 точек перегиба.

Так как пять точек ветвлений лежат на одной прямой, то в рассматриваемом случае тетрагональный ряд не может быть клейновым.

Согласно теореме 9.3.1

$$l(U\pi - \pi_* e_0) = l(\Sigma_{i=1}^5 e_i) - 1 = 2,$$

где U_π – половинка дивизора $W_\pi = \pi_* \tilde{W}_\pi$, определяющая накрытие π, $\deg U_\pi = 3$. Легко видеть, что на кривой рода 2 $l(\mathcal{D}) = \deg \mathcal{D} - 1$ при $\deg \mathcal{D} \geq 3$, а при $\deg \mathcal{D} = 2$ имеем:

$l(\mathcal{D}) = 2$, если $\mathcal{D} = i_h \mathcal{D}$;

$l(\mathcal{D}) = 1$, если $\mathcal{D} \neq i_h \mathcal{D}$.

Отсюда $U_\pi \equiv \pi_* e_0 + h^8(P)$.

Согласно пар. 2 составной тетрагональный ряд g_4^1 будет циклическим тогда и только тогда, когда W_π совпадает с дивизором ветвления гиперэллиптического накрытия $\tilde{W}_h$, и будет диэдральным накрытием, если и только если $W_\pi \neq \tilde{W}_h$ и в случае $(W_\pi, \tilde{W}_h \neq 0$ дивизор W_π не инвариантен относительно гиперэллиптической инволюции i_h. Значит, если взять произвольное двулистное накрытие $h : C \to \mathbb{P}^1$ с $g(C) = 2$ и дивизором ветвления $\tilde{W}_h = \Sigma_{i=1}^6 c_i$, то, построив двулистное накрытие с характеристикой $(W\pi, U_\pi)$, где $W_\pi = \tilde{W}_h$, $U_\pi \equiv c_0 + h^*(P)$, будем иметь циклическое сквозное $q = h \cdot \pi$ тетрагональное накрытие, а построив двулистное накрытие $\pi : Y \to C$ с характеристикой (W_π, U_π) такой, что $\deg W_\pi = 6$, $\quad W_\pi \neq \tilde{W}_h$ и $i_h W_\pi \neq W_\pi$ при $(W_\pi, \tilde{W}_h) = 0$, а $U_\pi \equiv c_0 + h^*(P)$, будем иметь диэдральное сквозное тетрагональное накрытие, причем в обоих случаях кривая Y рядом $g_5^2 = |\tilde{W}_\pi - \frac{1}{2}\pi^*(c_0)|$ вкладывается в $\mathbb{P}^2$ как кривая степени 5.

Предложение 9.4.1. *(а) Любая неособая плоская квинтика несет простой тетрагональный ряд.*

(б) Существуют неособые плоские квинтики с циклическим тетрагональным рядом, который при этом высекается пучком прямых через базисную точку, являющуюся точкой перегиба кривой. Касательная в ней имеет с Y пятикратное пересечение, еще пять прямых этого пучка имеют с Y четырехкратное касание в точках, лежащих на одной прямой.

(в) Существуют неособые плоские квинтики с диэдральным тетрагональным рядом, который при этом высекается пучком прямых через базисную точку, являющуюся точкой перегиба кривой. Касательная в ней имеет касание порядка 3 или 5 и еще пять прямых пучка имеют с ней двух или четырехкратные касания в пяти коллинеарных точках.

г) На неособой плоской квинтике клейновых тетрагональных рядов нет.

9.5 Тригонально-тетрагональные кривые

Теми же средствами можно исследовать тригонально-тетрагональные кривые рода 6, то есть плоские кривые степени 6, имеющие одну двукратную и одну трехкратную точки (в качестве особенностей). Предположим, чго тетрагональный ряд на ней составной. Тогда он определяет композицию двулистных накрытий

$$Y \xrightarrow{\pi} C \xrightarrow{h} \mathbb{P}^1, \quad g(C) = 2.$$

Поскольку дивизор $\pi^* h^*(P) + \tilde{W}_\pi$ должен высекаться сопровождающей кривой, то

$$e_1 + e_2 + e_3 \equiv e_4 + e_5 + e_6, \qquad \sum_{i=1}^{6} e_i = \tilde{W}_\pi.$$

Согласно теореме 9.3.1 пар. 3 половинка U_π дивизора $W_\pi = \pi_* \tilde{W}_\pi = \sum_{i=1}^{6} c_i$ будет удовлетворять соотношению

$$U_\pi \equiv c_1 + c_2 + c_3 \equiv c_4 + c_5 + c_6.$$

Обратно, если $h : C \to \mathbb{P}^1$ – произвольное гиперэллиптическое накрытие с $g(C) = 2$, $\deg \tilde{W}_h = 6$, а $\pi : Y \to C$ – двулистное накрытие с характеристикой (W_π, U_π), где

$$W_\pi = \sum_{i=1}^{6} c_i, \quad U_\pi \equiv c_1 + c_2 + c_3 \equiv c_4 + c_5 + c_6,$$

то рядом $|\tilde{W}_\pi| = g_6^2$ кривая Y вкладывается в $\mathbb{P}^2$ как кривая степени 6, имеющая тригональный ряд

$$g_3^1 = |e_1 + e_2 + e_3| = |e_4 + e_5 + e_6|, \quad \sum_{i=1}^{6} e_i = \tilde{W}_\pi$$

и тетрагональный ряд, индуцированный композицией $h \cdot \pi$.

Предложение 9.5.1. *Если тетрагональное накрытие тригонально-тетрагональной кривой рода 6 разлагается в композицию двулистных накрытий* $Y \xrightarrow{\pi} C \xrightarrow{h} \mathbb{P}^1$, *то* $g(C) = 2$.

При этом, если обозначить через W_π *дивизор, над которым разветвлено* π, *через* $\tilde{W}_h$ *– дивизор ветвления накрытия* h, *через* $\mathcal{D}$ *– дивизор степени три проективной прямой* $\mathbb{P}^1$, *то:*

(а) $h \cdot \pi$ *клейново тогда и только тогда, когда* $W_\pi = h^*(\tilde{D})$, *то есть* Y *является расслоенным произведением над* $\mathbb{P}^1$ *двух гиперэллиптических кривых рода 2;*

(б) $h \cdot \pi$ *циклично тогда и только тогда, когда* $W_\pi = \tilde{W}_h$*;*

(в) $h \cdot \pi$ *диэдрально тогда и только тогда, когда* $W_\pi \neq h^*(\mathcal{D}), \quad W_\pi \neq \tilde{W}_h$.

Заметим, что существуют тригонально-тетрагональные кривые рода 6 с простыми тетрагональными рядами. Достаточно взять четырехлистное накрытие $q : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ и трехлистное накрытие $t : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ таким образом, чтобы они были разветвлены над различными точками и трехлистное накрытие было бы нормальным. Тогда расслоенное произведение $C = \mathbb{P}^1 \times_{\mathbb{P}^1} \mathbb{P}^1$ вместе с естественным четырехлистным накрытием определяет простой тетрагональный ряд на тригонально-тетрагональной кривой рода 6.

Часть III

Обобщенная жорданова нормальная форма линейного оператора

Теория различных нормальных (канонических) форм для линейных операторов на конечномерных линейных (векторных) пространствах изучалась еще Вейерштрассом [124] и Жорданом [120] (см. Исторический очерк к Главам VI и VII трактата [117]). В настоящее время, эта теория составляет важную часть линейной алгебры и излагается в любом учебнике по линейной алгебре.

Теорема о жордановом нормальном виде линейного оператора (т.е. его матрицы) утверждает следующее.

Теорема Жордана. *Пусть k - алгебраически замкнутое поле, L - конечномерное линейное пространство размерности n, определенное над k, A - произвольный линейный оператор на L. Найдется базис $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$, в котором матрица $A_{\mathbf{e}}$ оператора A будет прямой суммой квадратных блоков J_i, на главной диагонали которых стоят некоторые элементы a_i поля k, непосредственно выше и правее этих элементов стоят единичные элементы поля k, а остальные места заполнены его нулями. При этом a_i являются корнями характеристического многочлена $\chi_A(t) = \det(tE - A_{\mathbf{e}})$ оператора A (здесь E - единичная матрица соответствующего порядка), а прямые слагаемые J_i определяются однозначно (с точностью до произвольных перестановок).*

На самом деле известные доказательства этой теоремы проходят при более слабом условии, когда характеристический многочлен оператора A разлагается над k на линейные множители (см., например, [129], с.385; [125], гл.III; [127], с.485; [128], с.61; [126], с.270; [131], с.160; [130], с.171; [123], с.323; [121], с.445; [116], с.480; [9], гл.VII, 5).

Две книги составляют исключение. Постников в [131], с.171 устанавливает нормальный вид вещественного оператора в случае, когда его комплексификация диагонализуема. Мальцев в [130], с.176-178 рассматривает обобщение формы Жордана в случае, когда основное поле k – подполе поля комплексных чисел (как отмечается в подстрочной сноске, аналогичный результат можно получить при любом совершенном поле k переходом к его алгебраическому замыканию).

Важно отметить следующие обстоятельства. Так как каждой матрице (при фиксированном базисе) соответствует некоторый (единственный) линейный оператор, то с каждой нормальной формой (матрицы) оператора A связано разложение оператора A в прямую сумму подоператоров A_i, являющихся суть ограничением A на подпространство L_i пространства L, равного сумме всех этих L_I. Каждое такое разложение максимально. т.е. все A_i - неразложимые операторы. Любые два разложения указанного вида переводятся друг в друга автоморфизмом (= обратимым линейным преобразованием) пространства L.

Таким образом, с точки зрения теории матриц, суть вышеприведенного результата заключается в том, что в каждом классе сопряженности матриц можно выбрать (в каком-то смысле единственный) „хороший“ нормальный представитель.

Кроме жордановой нормальной формы известна другая каноническая форма линейных операторов и квадратных матриц, (называемая естественной ([130]) или рациональной ([116]), которая существует в случае произвольного поля k и для любого оператора A. Она однозначно определяется условиями:

(1) $A_{\mathbf{e}} = [d_1(t)] \oplus ... \oplus [d_m(t)]$;

(2) каждая матрица $[d_i(t)]$ является сопровождающей матрицей некоторого многочлена $d_i(t)$ над k;

(3) $d_i(t)$ делит $d_j(t)$ при $i < j$.

Циклические блоки $[d_j(t)]$ этого разложения, вообще говоря, не являются неразложимыми, зато само разложение *вполне* единственно.

Сравнивая естественную форму с жордановой нормальной формой, Майкл Артин пишет: „It isn't particularly nice, but it is the best form available for an arbitrary field“. И чуть далее: „Jordan form is much nicer than rational canonical form“. Анатолий Иванович Мальцев пишет более подробно. „Преимуществом естественной нормальной формы является ее абсолютная однозначность: не только сами диагональные клетки, но и порядок их расположения по главной диагонали определяются однозначно. К недостаткам следует отнести то, что эта форма не дает приведения к клеткам наименьших возможных степеней, а также то, что форма Жордана не является ее частным случаем. “

Мальцев предлагает сделать следующие изменения в конструкции Жордана. Он заменяет диагональные элементы a_i сопровождающими матрицами неприводимых (над k)

делителей характеристического многочлена $\chi_A(t)$. В классическом случае они совпадают. Единичные элементы он заменяет единичными матрицами E (соответствующего порядка). При вышеуказанных ограничениях на поле k, оказывается верной соответствующим образом обобщенная теорема Жордана. Полученные обобщенную жорданову форму и составляющие ее обобщенные жордановы клетки (блоки) назовем обобщенной жордановой формой и обобщенными жордановыми клетками первого рода.

Подчеркнем, что жордановы клетки первого рода неразложимы и классическая теорема Жордана следует из данного обобщения. Таким образом, обобщенная жорданова форма первого рода свободна от недостатков, указанных Мальцевым. Но это обобщение оставляет желать лучшего, потому что стесняющие ограничения на поле k не удается полностью снять. В первой главе третьей части (содержащей изложение статьи [18] автора) доказывается, что для обобщенных жордановых форм первого рода основная теорема верна и в более общем случае, когда неприводимые делители характеристического многочлена $\chi_A(t)$ сепарабельны над k. Однако, как показывает несложный пример, приведенный в пар. 4 этой главы, в общем случае обобщенная теорема Жордана первого рода не верна.

Для того, чтобы обобщенная теорема Жордана оказалась верной для любого оператора A при произвольном основном поле k, надо сделать небольшое изменение в предлагаемой Мальцевым конструкции: единичную матрицу $\mathbf{E}$ надо заменить матрицей $\mathbf{F}$ (естественно, того же порядка), в левом нижнем углу которой стоит единица, а все остальные элементы – нули. Таким образом получаются обобщенная жорданова матрица и обобщенная жорданова клетка второго рода. Соответствующая обобщенная теорема Жордана второго рода доказана автором в статьях [19] и [21].

Во второй главе этой части (содержащей изложение первой из вышеуказанных статей) означенная теорема выводится из обычной теоремы Жордана переходом к алгебраическому замыканию поля k (процесс, аналогичный процедуре комплексификации вещественного случая) и специальным алгоритмом сборки обобщенных жордановых клеток второго рода.

Содержание статьи [21] излагается в третьей главе, где дается прямое геометрическое доказательство обобщенной теоремы Жордана второго рода, основанное на построении соответствующего базиса.

Подчеркнем, что в обобщенной теореме Жордана роль собственных значений играют сопровождающие матрицы неприводимых делителей характеристического многочлена оператора. На самом деле их можно заменить произвольными матрицами, имеющими тот же характеристический многочлен.

В вещественном случае $k = \mathbb{R}$ вместо сопровождающих матриц неприводимых многочленов второго порядка можно использовать матричное представление комплексных чисел, являющихся корнями характеристического многочлена оператора. Получающийся результат в частном („диагонализуемом") случае имеется в [131], с. 171, а в общем случае получен в статье [22] автора.

Введенная обобщенная жорданова форма второго рода линейного оператора (в третьей главе она, имея в виду ее строение, называется также поликвазициклической формой) идеально удовлетворяет всем требованиям Мальцева. Эта форма не допускает дальнейших разложений (все ее слагаемые неразложимы). Она пригодна в случае произвольного основного поля k и любого оператора A над k. Из этой формы можно получить и (обычную) жорданову, и рациональную каноническую формы. Таким образом, обобщенная жорданова форма второго рода связывает классическую жорданову форму и рациональную каноническую форму. Другие известные канонические формы для специальных линейных операторов (формы Постникова и Мальцева) также можно получить из поликвазициклической формы.

В заключение хотелось бы отметить следующее. Обобщенную теорему Жордана второго рода можно вывести из основного результата структурной теории ([121], гл.15, пар. 2) конечно порожденных модулей над целостным кольцом главных идеалов или из рационального разложения линейного оператора (матрицы) ([122], параграф 3.29.3). Но первая из этих теорий довольно сложна и абстрактна, вторая имеет длинное, не очень прозрачное доказательство. В обоих случаях используемые методы (в отличие от приведенных в диссертации) не геометрические, чисто алгебраические. Следует также подчеркнуть, что из этого предисловия становится очевидным, что исходная трудность заключалась как раз в нахождении подходящего вида обобщения жордановых клеток и жордановой нормальной формы, которые годились бы в случае произвольного оператора A, определенного над любым основным полем k. Этот эвристический барьер кажется непреодолимым в рамках этих двух теорий.

Глава 10

„Сепарабельная“ теорема

10.1 Основные определения и формулировка „сепарабельной“ теоремы

В этой главе излагаются результаты статьи автора [18]. Мы доказываем, что для любой квадратной матрицы $\mathbf{A}$ с элементами из произвольного поля $\mathbf{k}$, если неприводимые делители ее характеристического многочлена $F(t)$ сепарабельны, найдется такая матрица $\mathbf{Q}$ с элементами из поля разложения K многочлена $F(t)$, что $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ будет обобщенной жордановой матрицей первого рода.

Определение 10.1.1. *Обобщенной жордановой клеткой первого рода или клеткой Мальцева* назовем матрицу вида

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} & \mathbf{E} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{P} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{P}$ - произвольная, $\mathbf{E}$ - единичная, $\mathbf{0}$ - нулевая матрицы одинаковых порядков.

Определение 10.1.2. *Сопровождающей* матрицей многочлена

$$P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + ... + p_{m-2} t^{m-2} + p_{m-1} t^{m-1} + t^m,$$

называется матрица

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_{\kappa 1} & -p_2 & ... & -p_{n-2} & -p_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Матрицы указанного вида называются *циклическими*, как и определяемые ими линейные преобразования. Очевидно, $P(t)$ совпадает с характеристическим многочленом своей сопровождающей матрицы:

$$P(t) = \det(t\mathbf{E} - \mathbf{P}).$$

(Через $\mathbf{E}$ обозначается единичная матрица.)

Определение 10.1.3. Матрица $\mathbf{J}$ с элементами из поля $\mathbf{k}$ называется *обобщенно жордановой*, если является прямой суммой

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \oplus ... \oplus \mathbf{J}_\tau$$

обобщенных жордановых клеток $\mathbf{J}_1, ..., \mathbf{J}_\tau$, по главной диагонали которых стоят сопровождающие матрицы неприводимых над $\mathbf{k}$ многочленов $P_1(t), ..., P_\tau(t)$, т.е. имеет блочно-диагональный вид с блоками $\mathbf{J}_1, ..., \mathbf{J}_\tau$ по главной диагонали.

Тогда характеристический многочлен матрицы $\mathbf{J}$ равен произведению $P_1^{\sigma_1}(t) ... P_\tau^{\sigma_\tau}(t)$, где $\sigma_\iota \deg P_\iota(t)$ равен порядку блока $\mathbf{J}_\iota$ при любом ι.

Теорема 10.1.1. *Пусть* $\mathbf{k}$ *произвольное поле,* $\mathbf{A}$ *матрица над* $\mathbf{k}$. *Предположим что все неприводимые (над* $\mathbf{k}$*) делители характеристического многочлена* $F(t)$ *матрицы* $\mathbf{A}$ *сепарабельны. Тогда:*

1) Найдется матрица $\mathbf{Q}$ *с элементами из поля* K *разложения многочлена* $F(t)$ *такая, что*

$$\mathbf{J} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{J_1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{J}_\tau$$

будет обобщенно жордановой матрицей над полем $\mathbf{k}$. *Она называется обобщенной жордановой нормальной формой матрицы* $\mathbf{A}$.

2) Для матрицы $\mathbf{A}$ *набор обобщенных жордановых клеток* $\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_\tau$ *определяется однозначно, т.е. обобщенная жорданова нормальная форма матрицы единственна, с точностью до расположения обобщенных жордановых клеток на главной диагонали.*

Если все неприводимые (над $\mathbf{k}$) делители характеристического многочлена $F(t)$ линейны (в частности, если поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто), теорема сводится к классическому результату. Мы покажем, что общая теорема выводится из классической.

10.2 Поле разложения многочлена. Сепарабельные и несепарабельные многочлены

Напомним некоторые простые факты из теории Галуа. *Полем разложения* многочлена $F(t) \in \mathbf{k}[t]$ (см., напр., [121], с.198-199) называется поле K, однозначно (с точностью до изоморфизма) определяемое следующими двумя условиями:

(i) $\mathbf{k}$ вкладывается в K так, что $F(t)$ над K разлагается на линейные множители;

(ii) это расширение поля $\mathbf{k}$ минимально, более точно, любое вложение $\mathbf{k}$ в поле K', над которым $F(t)$ разлагается на линейные множители, можно единственным образом продолжить до вложения K в K'.

Таким образом, в поле K многочлен $F(t)$ разлагается в произведение линейных сомножителей, т.е. имеет $\deg F(t)$ корней (с учетом кратности).

Различные неприводимые над $\mathbf{k}$ многочлены (в частности, различные неприводимые над $\mathbf{k}$ сомножители многочлена $F(t)$) имеют в K различные корни (иначе эти многочлены не были бы взаимно простыми).

Определение 10.2.1. Неприводимый многочлен называется *с*епарабельным, если в поле разложения этого многочлена все его корни *простые* (т.е. имеют кратность 1). Неприводимые несепарабельные многочлены существуют только над полями $\mathbf{k}$ конечной (= ненулевой) характеристики p и имеют вид $P(t) = \overline{P}(t^{\nu})$, где $\overline{P}(t) \in \mathbf{k}[t]$, $\nu = p^n$ - *с*тепень несепарабельности многочлена $P(t)$ (ср., [7], с.204-205 и [3], с.142). Любой корень несепарабельного неприводимого многочлена в поле разложения этого многочлена имеет кратность p^n.

Напомним некоторые простые факты из теории Галуа.

Определение 10.2.2. *Полем разложения* многочлена $F(t) \in \mathbf{k}[t]$ (см., напр., [121], с.198-199) называется поле K, однозначно (с точностью до изоморфизма) определяемое следующими двумя условиями:

(i) $\mathbf{k}$ вкладывается в K так, что $F(t)$ над K разлагается на линейные множители;

(ii) это расширение поля $\mathbf{k}$ минимально, более точно, любое вложение $\mathbf{k}$ в поле K', над которым $F(t)$ разлагается на линейные множители, можно единственным образом продолжить до вложения K в K'.

Таким образом, в поле K многочлен $F(t)$ разлагается в произведение линейных сомножителей, т.е. имеет $\deg F(t)$ корней (с учетом их кратности).

Различные неприводимые над $\mathbf{k}$ многочлены (в частности, различные неприводимые над $\mathbf{k}$ сомножители многочлена $F(t)$) имеют в K различные корни (иначе эти многочлены не были бы взаимно простыми).

Неприводимый многочлен называется сепарабельным, если в поле разложения этого многочлена все его корни простые (т.е. имеют кратность 1). Неприводимые несепарабельные многочлены существуют только над полями $\mathbf{k}$ конечной характеристики p и имеют вид $P(t) = \overline{P}(t^{\nu})$, где $\overline{P}(t) \in \mathbf{k}[t]$, $\nu = p^n$, n - некоторое натуральное число (ср., [121], с.204-205 и [9], с.142). Как следствие, любой корень несепарабельного неприводимого многочлена в поле разложения этого многочлена имеет кратность p^n.

10.3 Расширение поля скаляров

Пусть порядок квадратной матрицы $\mathbf{A}$ равен n. Рассмотрим произвольное линейное пространство $L/\mathbf{k}$ размерности n и тензорное произведение $L_K = K \otimes_{\mathbf{k}} L$. Оно является линейным пространством над K с умножением на скаляры, определяемым по правилу

$$\lambda(\alpha \otimes w) = (\lambda\alpha) \otimes w.$$

Сопоставляя $\mathbf{k}$-линейному оператору A отображение

$$A_K = 1_K \otimes_{\mathbf{k}} A : L_K \to L_K \mid \ \alpha \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{x} \mapsto \alpha \otimes_{\mathbf{k}} A(\mathbf{x}),$$

получаем корректно определенный K-линейный оператор пространства L_K. С произвольным базисом $\mathbf{e} = (\mathbf{e_1}, ..., \mathbf{e_n})$ пространства $L/\mathbf{k}$ ассоциируется базис

$$\mathbf{e}_K = (1 \otimes e_1, ..., 1 \otimes e_n)$$

пространства L_K. Очевидно, матрица оператора A_K в этом базисе будет совпадать с матрицей $A_{\mathbf{e}}$ оператора A в базисе $\mathbf{e}$. Поэтому характеристические многочлены операторов A и A_K равны одному и тому же многочлену.

Зафиксировав произвольный базис $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ пространства $L/\mathbf{k}$, определим линейное преобразование $A : L \to L$ по формуле

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x_e},$$

где $\mathbf{x_e}$ - столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}$. Обозначим общий характеристический многочлен операторов A и A_K через $F(t)$.

Рассмотрим разложение характеристического многочлена $F(t)$ на неприводимые сомножители над полем $\mathbf{k}$:

$$F(t) = P_1^{l_1}(t) \dots P_m^{l_m}(t).$$

Все неприводимые многочлены $P_i(t)$ будем считать унитарными (т.е. со старшим коэффициентом 1). В поле разложения K многочлена $F(t)$ они разлагаются на линейные множители

$$P_i(t) = (t - \lambda_{i1})^{\nu_i} ... (t - \lambda_{i\delta_i})^{\nu_i}.$$

Здесь надо различать два случая. Если $P_i(t)$ сепарабельный многочлен, то

$$\nu_i = 1,\ \delta_i = d_i = \deg P_i(t).$$

Если $P_i(t) = \overline{P}_i(t^{p^{n_i}})$ несепарабельный многочлен ($p = \operatorname{char}\mathbf{k}$), то $\nu_i = p^{n_i}$ есть его степень несепарабельности, а $\delta_i = \deg \overline{P}_i(t)$, так что $\deg P_i(t) = d_i = \delta_i \nu_i$.

Далее мы будем считать, что все неприводимые сомножители $P_i(t)$ характеристического многочлена $F(t)$ сепарабельны. Тогда

$$\lambda_{ij} = \lambda_{i'j'} \Leftrightarrow i = i',\, j = j'.$$

Согласно классической теореме Жордана существует такой базис f пространства L_K, в котором матрица $(A_K)_f$ линейного оператора A_K является прямой суммой жордановых клеток J_{ijk} с элементами λ_{ij} на главной диагонали, причем набор этих жордановых клеток один и тот же для различных таких базисов f. Количество жордановых клеток с λ_{ij} по главной диагонали мы обозначим через κ_{ij}, так что $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., \delta_i$; $k = 1, ..., \kappa_{ij}$. Пусть s_{ijk} порядок жордановой клетки J_{ijk}. Тогда

$$s_{ij1} + s_{ij2} + ... + s_{ij\kappa_{ij}} = l_i.$$

Таким образом, оператор A, определенный над полем $\mathbf{k}$, однозначно (с точностью до порядка слагаемых) представляется в виде прямой суммы неразложимых операторов (жордановых клеток), определенных над полем разложения K характеристического многочлена $F(t)$. Вопрос в том, как разложить A в прямую сумму неразложимых операторов, определенных над полем $\mathbf{k}$?

Предложение 10.3.1. *Пусть A квадратная матрица и $P(t)$ неприводимый многочлен, определенные над одним и тем же полем $\mathbf{k}$. Тогда для любых корней λ и λ' многочлена $P(t)$, лежащих в некотором поле разложения K этого многочлена, и для всякого целого числа s*

$$\operatorname{rk}(\lambda E - A)^s = \operatorname{rk}(\lambda' E - A)^s.$$

Доказательство. Известно, что существует автоморфизм поля K, который элементы подполя $\mathbf{k}$ оставляет неподвижными, а λ переводит в λ' ([121], стр. 204). Этот автоморфизм переводит $(\lambda E - A)^s$ в $(\lambda' E - A)^s$ и каждый минор первой матрицы в соответствующий минор второй. Следовательно, минор одной из этих матриц является базисным тогда и только тогда, когда базисным является соответствующий минор другой. Значит ранги этих матриц равны. $\square$

Обозначим через r_{ijs} ранг матрицы $(\lambda_{ij} E - A_e)^s$, где s неотрицательное целое число, причем как обычно нулевую степень любой матрицы будем считать равной единичной матрице E. Из линейной алгебры известно, что r_{ijs} не зависит от выбора базиса e.

Предложение 10.3.2. *Число h_{ijs} жордановых клеток порядка s с λ_{ij} на главной диагонали равно $r_{ij(s+1)} + r_{ij(s-1)} - r_{ijs}$:*

$$h_{ijs} = \#\{k : s_{ijk} = s\} = r_{ij(s+1)} + r_{ij(s-1)} - r_{ijs}. \tag{10.3.1}$$

Доказательство. стандартное. Взяв жорданов базис f, предварительно убеждаемся, что $(r_{ij(s-1)} - r_{ijs})$ - число жордановых клеток порядка $\geq s$. $\square$

Следствие 10.3.3. *h_{ijs}, следовательно, κ_{ij} не зависит от j. Более того, индексы k можно выбрать так, что s_{ijk} также не будет зависеть от j.*

Доказательство. Согласно предложению 10.3.2 при фиксированных i и k значение r_{ijs} одно и то же для всех j. Поэтому h_{ijs} и, следовательно, $\kappa_{ij} = \Sigma_s h_{ijs}$ не зависит от j. Если индексы k для жордановых клеток J_{ijk} при фиксированных i, j выбрать так, чтобы порядки жордановых клеток не возрастали при возрастании k, то s_{ijk} также не будет зависеть от j. $\square$

Как известно (см. любой из приведенных в списке литературы учебников по линейной алгебре) перестановкой базисных векторов можно добиться произвольной перестановки жордановых клеток на главной диагонали.

Имеем $s_{ijk} = s_{i1k}$. Поэтому перетасовкой базисных векторов базиса f можно добиться того, чтобы в матрице $(A_K)_f$ по диагонали стояли подряд жордановы клетки одинакового порядка $s_{i1k} = s_{i2k} = ... = s_{id_ik}$ с диагональными элементами λ_{i1}, λ_{i2}, $...\lambda_{id_i}$, соответственно, причем в порядке возрастания индекса i, а при фиксированном i - в порядке невозрастания размеров жордановых клеток. Таким образом, существует невырожденная матрица $\mathbf{B}_1$ с элементами из поля K такая, что $\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}_1 = (A_K)_f$.

10.4 Доказательство „сепарабельной" теоремы

Предложение 10.4.1. *Предположим, что в жордановом базисе* $\mathbf{e}$ *матрица* $A_{\mathbf{e}}$ *оператора* A *является прямой суммой жордановых клеток одинакового порядка* s*, причем у первой жордановой клетки на главной диагонали стоят элементы* λ_1*, у второй -* λ_2*, и т.д. у последней -* λ_d*. Тогда перестановкой базисных векторов можно перейти к базису* f*, в котором матрица* A_f *будет обобщенной жордановой клеткой, по главной диагонали которой стоят* s *диагональных матриц* $\mathbf{D}$ *порядка* d *с элементами* $\lambda_1, ..., \lambda_d$ *на главной диагонали.*

Доказательство. проведем индукцией по d. При $d = 1$ утверждение тривиально верно. Чтобы сделать индуктивный переход, рассмотрим квадратную подматрицу порядка $s(d-1)$ матрицы A_e, лежащую в ее первых $s(d-1)$ строках и столбцах и, таким образом, содержащую все жордановы клетки с элементами $\lambda_1, ..., \lambda_{d-1}$ на главной диагонали. Согласно индуктивному предположению перестановкой первых $s(d-1)$ базисных векторов, эту подматрицу можно превратить в обобщенную жорданову клетку, по диагонали которой стоят s диагональных матриц порядка $d-1$ с элементами $\lambda_1, ..., \lambda_{d-1}$ на главной диагонали.

Заметим, что при перестановке базисных векторов e_i и e_j у матрицы преобразования меняются местами i-тая и j-тая строки и те же столбцы. Переставляя $s((d-1)+1)$-ые строку и столбец, соответственно, с предыдущими строками и столбцами переместим элемент λ_d, стоящий на $s((d-1)+1)$ месте главной диагонали в пересечение d-той строки и d-того столбца. Аналогично $s((d-1)+2)$-ой элемент главной диагонали переместим в пересечение $2d$-той строки и $2d$-того столбца и т. д. до предпоследнего элемента главной диагонали, который переместим в пересечение $(s-1)d$-той строки и $(s-1)d$-того столбца. В итоге получим матрицу, по главной диагонали которой стоят s диагональных матриц порядка d с элементами $\lambda_1, ..., \lambda_d$ на главной диагонали.

Рассмотрим, как перераспределятся "стандартные"единицы. В матрице, полученной из индуктивного предположения, они стояли на

$$((d-1)(v-1)+w, (d-1)v+w)$$

местах с $v = 1, ..., s-1$ и $w = 1, ..., d-1$, а также на

$$((d-1)s+v, (d-1)s+v+1)$$

местах с $v = 1, ..., s-1$. При вышеописанных преобразованиях единица, стоящая в пересечении $((d-1)(v-1)+w)$-той строки и $((d-1)v+w)$-того столбца передвинется на $v-1$ строку вниз и на v столбцов вправо и окажется на позиции $(d(v-1)+w, dv+w)$. В то же время $((d-1)s+v, (d-1)s+v+1)$-тая единица окажется в dv-той строке на $d(v+1)$-ом месте. Предложение доказано. $\triangleright$

Осуществим перестановку векторов, описанную в доказанном предложении, последовательно для каждой группы векторов базиса f п.8, которые соответствуют подматрицам матрицы $(A_K)_f$, являющимся прямыми суммами стоящих подряд жордановых клеток одинакового порядка $s_{i1k} = s_{i2k} = ... = s_{id_ik}$ с диагональными элементами λ_{i1}, λ_{i2}, ... λ_{id_i}, соответственно. Получим вместо этих подматриц обобщенные жордановы клетки, диагональные блоки которых представляют из себя диагональные матрицы $\mathbf{D}_i$ с корнями $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, ..., \lambda_{id_i}$ полинома $P_i(t)$ на главной диагонали. Если этот перетасованный базис обозначить через $\tilde{f}$, то в результате указанных преобразований получим матрицу $(A_K)_{\tilde{f}} = \mathbf{B}_2^{-1}(A_K)_f\mathbf{B}_2$, где $\mathbf{B}_2$ - матрица общей перестановки базисных векторов. $\square$

Предложение 10.4.2. *Если* $\mathbf{P}$ *- сопровождающая матрица определенного над полем* $\mathbf{k}$ *многочлена* $P(t)$*, который в расширении* K *поля* $\mathbf{k}$ *разлагается на линейные множители*

$$P(t) = \det(tE - \mathbf{P}) = (t-\lambda_1)^{l_1}...(t-\lambda_m)^{l_m},$$

то жорданов нормальный вид матрицы $\mathbf{P}$ *состоит из жордановых клеток* $J_{l_i}(\lambda_i)$ *порядка* l_i *с* λ_i *по главной диагонали* ($i = 1, ..., m$).

Доказательство. Система из всех строк матрицы $(\lambda_i E - \mathbf{P})$ кроме последней, очевидно, линейно независима, а определитель этой матрицы равен 0. Поэтому ее коранг равен 1 и, следовательно, имеется всего одна жорданова клетка с λ_i на главной диагонали. □

Следствие 10.4.3. *Если* $\mathbf{P}$ *- сопровождающая матрица сепарабельного неприводимого над полем* $\mathbf{k}$ *многочлена* $P(t)$ *и* K *- поле разложения* $P(t)$, *то существует матрица* $\mathbf{C}$ *над* K *такая, что* $\mathbf{CPC}^{-1} = \mathbf{D}$ *диагональная матрица с корнями многочлена* $P(t)$ *на главной диагонали.*

Доказательство. Действительно, в этом случае $l_1 = ... = l_m = 1$, следовательно, жорданов нормальный вид матрицы $\mathbf{P}$ диагональный, и получается он, как всегда, умножением слева на некоторую невырожденную матрицу (которая является матрицей перехода от одного базиса к другому), а справа - на обратную к ней. □

Предложение 10.4.4. *Если матрицы* U *и* V *разбиты, соответственно, на квадратные блоки* U_{ij} *и* V_{ij} *одинаковых размеров, то их произведение* $W = UV$ *разбивается на блоки* $W_{ij} = \Sigma_k U_{ik} V_{kj}$ *того же размера.*

От каждой диагональной матрицы $\mathbf{D}_i$ перейдем к сопровождающей матрице $\mathbf{P}_i = \mathbf{C}_i^{-1}\mathbf{D}_i\mathbf{C}_i$ неприводимого полинома $P_i(t)$. Построим блочно-диагональную матрицу $\mathbf{B}_3$ из блоков $\mathbf{C}_i$ в тех местах главной диагонали, где у матрицы $(A_K)_{\tilde{f}}$ стоит блок $\mathbf{D}_i$. Тогда на основании предложения этого пункта заключаем, что матрица $\mathbf{B}_3^{-1}(A_K)_{\tilde{f}}\mathbf{B}_3$ является обобщенно жордановой. Это означает, что при $\mathbf{Q} = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3$ обобщенно жорданова матрица $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$. Первая часть теоремы доказана.

Из предложения 10.3.2 и доказательства существования обобщенной жордановой нормальной формы матрицы $\mathbf{A}$ следует, что число ее обобщенных жордановых клеток, по главной диагонали которых стоят s сопровождающих матриц полинома $P_i(t)$, есть (не зависящее от j) число $h_{ijs} = r_{ij(s+1)} + r_{ij(s-1)} - r_{ijs}$, где $r_{ijs} = \mathrm{rk}(\lambda_{ij}E - A_e)^s$. Это одновременно доказывает вторую часть теоремы и дает способ построения обобщенной жордановой нормальной формы. Заметим, что из единственности обобщенной жордановой нормальной формы матрицы следует неразложимость любой обобщенной жордановой клетки.

10.5 Контрпример

Существуют линейные операторы с несепарабельным характеристическим полиномом, которые не приводимы к обобщенной жордановой форме первого рода.

В качестве поля k рассмотрим трансцендентное расширение $\mathbb{F}_2(u)$ двухэлементного поля Галуа $\mathbb{F}_2$, $\mathrm{char} k = 2$. На четырехмерном координатном пространстве над этим полем рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}$, задаваемый сопровождающей матрицей полинома $[t^4 + u^2]$. Таким образом, в каноническом базисе координатного пространства оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу

$$A = [t^4 + u^2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ u^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этого оператора приводим над k

$$\chi_A(t) = t^4 + u^2 = (t^2 + u)^2,$$

причем многочлен $t^2 + u$, как нетрудно проверить, неприводимый. Его производная равна нулю, следовательно, это – несепарабельный многочлен над k.

Если бы обобщенная теорема Жордана первого рода для оператора A была справедливой, то матрица $A = [t^4 + u^2]$ должна была бы быть сопряженной какой-либо одной из следующих матриц:

$$B = \begin{pmatrix} [t^2 + u] & 0 \\ 0 & [t^2 + y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & u & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$C = \begin{pmatrix} [t^2+u] & E \\ 0 & [t^2+y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & u & 0 \end{pmatrix}.$$

На самом деле ни одна из этих возможностей не осуществляется.

Если (вообще говоря, произвольные, но нас интересуют данные выше) матрицы A и B сопрягаются невырожденной матрицей X, то и соответствующие характеристические матрицы $tE - A$ и $tE - B$ сопрягаются той же матрицей. Тогда для любого значения $t = \lambda$ из произвольного расширения K основного поля k, таким же образом сопряжены матрицы $\lambda E - A$ и $\lambda E - B$. Следовательно, определители и, более общо, ранги этих матриц должны быть равными.

Возьмем в качестве λ произвольный корень (в алгебраическом замыкании поля k) характеристического многочлена оператора A. Легко видеть, что тогда ранг $\lambda E - A$ равен трем, а ранги $\lambda E - B$ и $\lambda E - C$ - двум. Это противоречие показывает, что матрица A не сопряжена ни B, ни C.

Глава 11

Общая основная теорема. Доказательство методом сборки

11.1 Формулировка общей основной теоремы

Определение 11.1.1. *Обобщенной жордановой клеткой второго рода* называется матрица вида

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{F} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} & \mathbf{F} & ... & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P} & ... & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{P} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{pmatrix},$$

где все блоки $\mathbf{P}, \mathbf{F}, \mathbf{0}$ - квадратные матрицы одинакового порядка, причем $\mathbf{P}$ - произвольная, $\mathbf{0}$ - нулевая матрицы, а $\mathbf{F}$ - имеет 1 в левом нижнем углу и нули в остальных местах.

Определение 11.1.2. Матрица $\mathbf{J}$ с элементами из поля $\mathbf{k}$ называется *обобщенно жордановой матрицей второго рода*, если является прямой суммой

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \oplus \, ... \, \oplus \mathbf{J}_\tau$$

обобщенных жордановых клеток $\mathbf{J}_1$, ..., $\mathbf{J}_\tau$ второго рода, по главной диагонали которых стоят сопровождающие матрицы неприводимых над $\mathbf{k}$ многочленов $P_1(t)$, ..., $P_\tau(t)$. Таким образом, обобщенно жорданова матрица имеет блочно-диагональный вид с блоками $\mathbf{J}_1$, ..., $\mathbf{J}_\tau$ по главной диагонали.

Характеристический многочлен матрицы $\mathbf{J}$ равен произведению $P_1^{\sigma_1}(t)\dots P_\tau^{\sigma_\tau}(t)$, где произведение $\sigma_\iota \deg P_\iota(t)$ равно порядку блока $\mathbf{J}_\iota$ $(\iota = 1, ..., \tau)$.

Теорема 11.1.1. *Пусть* $\mathbf{k}$ *- произвольное поле,* L *- линейное пространство над полем* $\mathbf{k}$ *и* $\mathcal{A}$ *- линейный оператор пространства* L*. Тогда:*

(i) Найдется базис пространства L*, в котором оператор* $\mathcal{A}$ *будет задаваться обобщенно жордановой матрицей второго рода.*

(ii) Набор обобщенных жордановых клеток второго рода для оператора $\mathcal{A}$ *определяется однозначно, т.е. обобщенная жорданова матрица линейного оператора единственна с точностью до расположения обобщенных жордановых клеток (второго рода) на главной диагонали.*

Если все неприводимые (над $\mathbf{k}$) делители характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$ линейны (в частности, если поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто), эта теорема сводится к классической теореме Жордана. Мы покажем, что обратно, вышеприведенная теорема выводится из классической теоремы Жордана. При этом ключевую роль играет теорема 11.3.1 задающая необходимое и достаточное условие того, чтобы (обычная) жорданова нормальная матрица J, определенная над полем K, являлась матрицей оператора, определенного над подполем $\mathbf{k}$ поля K.

Заметим, что теорему 11.1.1 можно получить также в рамках теории модулей над кольцами главных идеалов, рассматривая L как модуль над кольцом $\mathbf{k}[\mathcal{A}]$ и выбирая соответствующий базис.

11.2 Функтор расширения поля скаляров

Пусть $\mathcal{L}_\mathbf{k}$ - категория конечномерных линейных пространств над полем $\mathbf{k}$ и их линейных отображений. Пусть $\operatorname{End}_\mathbf{k} L = \mathcal{L}_\mathbf{k}(L, L)$ - множество линейных преобразований $\mathbf{k}$-линейного пространства L. В каждом базисе линейного пространства L оператору $\mathcal{A} \in \operatorname{End}_\mathbf{k} L$ соответствует матрица $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{k})$, $n = \dim_\mathbf{k} L$. Переходу к новому базису соответствует переход к подобной матрице $Q^{-1}AQ$, $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$. Таким образом, если рассмотреть действие $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ на $\mathbf{M}_n(\mathbf{k})$ подобием (сопряжением):

$$\tau_\mathbf{k} : \mathbf{GL}_n(\mathbf{k}) \times \mathbf{M}_n(\mathbf{k}) \to \mathbf{M}_n(\mathbf{k}) \mid \ (Q, A) \mapsto Q^{-1}AQ,$$

то $\operatorname{End}_\mathbf{k} L$ биективно фактормножеству $\mathbf{M}_n(\mathbf{k})/\tau_\mathbf{k}$.

Основная задача заключается в том, чтобы в каждом классе фактормножества $\mathbf{M}_n\,(\mathbf{k})/\tau_\mathbf{k}$ найти подходящие канонические представители и с их помощью координатизировать (см. [132]) или, иначе говоря, параметризовать это фактормножество. Во введении было отмечено, что хорошо известны два типа таких представителей: рациональная каноническая форма матрицы (при любом поле $\mathbf{k}$) и жорданова нормальная форма матрицы (при алгебраически замкнутом поле $\mathbf{k}$). С помощью функтора расширения поля скаляров понятие жордановой нормальной формы обобщается на случай произвольного поля $\mathbf{k}$.

Пусть K произвольное расширение поля $\mathbf{k}$. Функтор расширения поля скаляров

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_K^\mathbf{k} = K \otimes_\mathbf{k} : \mathcal{L}_\mathbf{k} \to \mathcal{L}_K$$

сопоставляет линейному пространству L, определенному над $\mathbf{k}$, тензорное произведение $L_K = K \otimes_\mathbf{k} L$, снабженное структурой линейного пространства над полем K. Умножение на элементы поля K определяется по правилу

$$\lambda(\alpha \otimes x) = (\lambda\alpha) \otimes x, \ \ \lambda, \alpha \in K, \ x \in L.$$

При этом $\mathbf{k}$-линейному отображению $f : L \to L'$ соответствует K-линейное отображение

$$f_K : L_K \to L'_K \mid \ \alpha \otimes x \mapsto \alpha \otimes f(x).$$

В частности, линейному оператору $\mathcal{A}$ пространства L соответствует линейный оператор $\mathcal{A}_K$ пространства L_K, тем самым имеем отображение

$$\mathcal{E} : \operatorname{End} L \to \operatorname{End} L_K \mid \ \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}_K. \tag{11.2.1}$$

Пусть ζ произвольный ненулевой элемент поля K. Тогда если $e = (e_1, ..., e_n)$ - базис пространства $L \in \mathcal{L}_{\mathbf{k}}$, то $\zeta \otimes e = (\zeta \otimes e_1, ..., \zeta \otimes e_n)$ будет базисом пространства L_K и для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ соответствующий оператор $\mathcal{A}_K$ в базисе $\zeta \otimes e$ будет иметь ту же матрицу A, что и оператор $\mathcal{A}$ в базисе e. Поэтому отображение (11.2.1) индуцирует корректно определенное отображение

$$\mathbf{E} : \mathbf{M}_n(\mathbf{k})/\tau_{\mathbf{k}} \to \mathbf{M}_n(K)/\tau_K \mid \ A \,(\operatorname{mod} \tau_{\mathbf{k}}) \mapsto A \,(\operatorname{mod} \tau_K).$$

Ввиду следствия 3 гл.VII, пар.5 [117] это отображение будет инъективным. Очевидно, $A \,(\operatorname{mod} \tau_K)$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$ принадлежит образу отображения $\mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда содержит матрицу из $\mathbf{M}_n(\mathbf{k})$. В теореме 11.3.1 задаются необходимые и достаточные условия на обычную жорданову матрицу J с элементами из поля K, при выполнении которых в факторклассе $J(\operatorname{mod} \tau_K)$ содержится матрица над $\mathbf{k}$.

11.3 Критерий сужаемости поля скаляров

Так как операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_K$ в соответствующих базисах имеют одну и ту же матрицу, их характеристические многочлены совпадают. Рассмотрим разложение этого многочлена $F(t)$ на неприводимые сомножители над полем $\mathbf{k}$:

$$F(t) = P_1(t)^{l_1} \dots P_m(t)^{l_m}.$$

Все многочлены $P_i(t)$ будем считать унитарными (т.е. со старшим коэффициентом 1).

Пусть K - поле разложения многочлена $F(t)$. Таким образом, над полем K многочлены $P_i(t)$ разлагаются на линейные множители

$$P_i(t) = (t - \lambda_{i1})^{\nu_i} ... (t - \lambda_{i\delta_i})^{\nu_i}.$$

Здесь надо различать два случая.

Если $P_i(t)$ несепарабельный многочлен, то $P_i(t) = \overline{P}_i(t^{\nu_i})$, где $\nu_i = p^{n_i}$ - степень несепарабельности многочлена $P_i(t)$, $p = \operatorname{char}\mathbf{k}$, $\overline{P}_i(t)$ неприводимый многочлен степени δ_i, так что $\deg P_i(t) = d_i = \delta_i\nu_i$. Если $P_i(t)$ сепарабельный многочлен, то $\nu_i = 1$, $\delta_i = d_i = \deg P_i(t)$. Отметим, что в обоих случаях

$$\lambda_{ij} = \lambda_{i'j'} \Leftrightarrow i = i',\, j = j'.$$

Согласно классической теореме Жордана существует такой базис f пространства L_K, в котором матрица A_K линейного оператора $\mathcal{A}_K$ является прямой суммой жордановых клеток J_{ijk} с элементами λ_{ij} на главной диагонали, причем набор этих жордановых клеток один и тот же для различных таких базисов f. Количество жордановых клеток с λ_{ij} по главной диагонали обозначим через κ_{ij}, так что $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., \delta_i$; $k = 1, ..., \kappa_{ij}$. Пусть s_{ijk} порядок жордановой клетки J_{ijk}. Тогда

$$s_{ij1} + s_{ij2} + ... + s_{ij\kappa_{ij}} = l_i.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$, определенный над полем $\mathbf{k}$, однозначно (с точностью до порядка слагаемых) представляется в виде прямой суммы неразложимых операторов (жордановых клеток), определенных над полем разложения K его характеристического многочлена $F(t)$. Задача в том, как получить подобное разложение в прямую сумму операторов, определенных и неразложимых над полем $\mathbf{k}$. Ключевую роль в решении этой задачи играет

Теорема 11.3.1. *Пусть K - расширение поля $\mathbf{k}$. Обычная жорданова нормальная матрица J с элементами из поля K (и следовательно, любая матрица над K, приводимая над K к жорданову нормальному виду J) будет матрицей некоторого оператора $\mathcal{A}_K$, где $\mathcal{A}$ - оператор над $\mathbf{k}$, если и только если выполняются следующие условия:*

(i) характеристический многочлен $F_J(t)$ матрицы J принадлежит $\mathbf{k}[t]$;

(ii) число h_{ijs} жордановых клеток J_{ijk} матрицы J, имеющих порядок s и диагональные элементы λ_{ij}, являющиеся корнями неприводимого над $\mathbf{k}$ многочлена $P_i(t)$, не

зависит от j;

(iii) *порядок s_{ijk} жордановой клетки J_{ijk} матрицы J кратен степени несепарабельности ν_i многочлена $P_i(t)$ над $\mathbf{k}$.*

Разобьем доказательство этой теоремы на несколько этапов.

Предложение 11.3.2. *Пусть A квадратная матрица и $P(t)$ неприводимый многочлен, определенные над одним и тем же полем $\mathbf{k}$. Тогда для любых корней λ и λ' многочлена $P(t)$ и для всякого целого числа s*

$$\mathrm{rk}\,(\lambda E - A)^s = \mathrm{rk}\,(\lambda' E - A)^s.$$

Доказательство. Существует автоморфизм поля разложения K поля $\mathbf{k}$, который элементы из $\mathbf{k}$ оставляет неподвижными, а λ переводит в λ' (см. [121], стр. 204). Этот автоморфизм переводит $(\lambda E - A)^s$ в $(\lambda' E - A)^s$и каждый минор первой матрицы - в соответствующий минор второй. Следовательно, минор одной из этих матриц является базисным тогда и только тогда, когда базисным является соответствующий минор другой. Значит ранги этих матриц равны. □

Пусть теперь A - матрица линейного оператора $\mathcal{A}$, определенного над полем $\mathbf{k}$, в некотором фиксированном базисе пространства L. В предыдущих обозначениях пусть r_{ijs} - ранг матрицы $(\lambda_{ij} E - A)^s$, где s неотрицательное целое число, причем, как обычно, нулевую степень любой матрицы будем считать равной единичной матрице E. Число r_{ijs} не зависит от выбора базиса в пространстве L оператора $\mathcal{A}$, будучи инвариантным относительно преобразования подобия матриц. Число h_{ijs} жордановых клеток порядка s с λ_{ij} на главной диагонали равно $r_{ij(s-1)} - 2r_{ijs} + r_{ij(s+1)}$. Это непосредственно следует из того, что число жордановых клеток порядка $\geq s$ с λ_{ij} на главной диагонали равно $r_{ij(s-1)} - r_{ijs}$. В частности, общее число жордановых клеток с λ_{ij} на главной диагонали равно корангу матрицы $(\lambda_{ij} E - A)$.

Следствие 11.3.3. *h_{ijs}, следовательно, κ_{ij} не зависят от j. Более того, индексы k можно выбрать так, что s_{ijk} также не будет зависеть от j.*

Доказательство. Согласно вышедоказанному предложению при фиксированных i и k значение r_{ijs} одно и то же для всех j. Поэтому h_{ijs} и, следовательно, $\kappa_{ij} = \Sigma_s h_{ijs}$ не зависят от j. Если индексы k для жордановых клеток J_{ijk} при фиксированных i, j выбрать так, чтобы порядки жордановых клеток не возрастали при возрастании k, то s_{ijk} также не будет зависеть от j. $\triangleright$ $\square$

Предложение 11.3.4. *В предыдущих обозначениях, если неприводимый многочлен $P_i(t)$ несепарабельный, то при любых j и k порядок s_{ijk} жордановой клетки J_{ijk} делится на степень несепарабельности $\nu_i = p^{n_i}$ этого многочлена.*

Доказательство. Семейство $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств L' пространства L таких, что $L'_K = K \otimes_{\mathbf{k}} L'$ содержит область определения L_{ijk} оператора J_{ijk}, не пусто и замкнуто относительно пересечений. Пересечение всех подпространств этого семейства обозначим $\langle L_{ijk} \rangle_{\mathbf{k}}$, а ограничение оператора $\mathcal{A}$ на это подпространство - через $\mathcal{A}_{ijk}$.

Согласно теореме Гамильтона-Кели $F(\mathcal{A}_K) = P_1(\mathcal{A}_K)^{l_1} ... P_m(\mathcal{A}_K)^{l_m} = 0$. Из этого нетрудно вывести, что $L_{ijk} \subset \mathrm{Ker} P_i(\mathcal{A}_K)^{l_i}$. Воспользовавшись тем, что в соответствующих базисах матрицы операторов $P_i(\mathcal{A}_K)^l$ и $P_i(\mathcal{A})^l$ совпадают, заключаем, что

$$\mathrm{Ker} P_i(\mathcal{A}_K)^l = K \otimes_{\mathbf{k}} \mathrm{Ker} P_i(\mathcal{A})^l.$$

Поэтому $\langle L_{ijk} \rangle_{\mathbf{k}}$ лежит в $\mathrm{Ker} P_i(\mathcal{A})^{l_i}$, то есть $P_i(\mathcal{A}_{ijk})^{l_i} = 0$. Отсюда, ввиду неприводимости многочлена $P_i(t)$ над $\mathbf{k}$, получаем, что характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}_{ijk}$ равен $P_i(t)^{\sigma_{ijk}}$, $\sigma_{ijk} \leq l_i$. Над полем K оператор $\mathcal{A}_{ijk}$ разлагается в прямую сумму жордановых клеток $J_{ij'k}$, $(j' = 1, ..., \delta_i)$, которые на основании следствия п.6 имеют одинаковый порядок s_{ijk}. Значит $s_{ijk}\delta_i$ равен порядку матрицы оператора $\mathcal{A}_{ijk}$, то есть степени $\sigma_{ijk} \deg P_i(t)$ его характеристического многочлена. Здесь δ_i - число различных корней несепарабельного многочлена $P_i(t)$ степени несепарабельности ν_i, так что $\deg P_i(t) = \delta_i \nu_i$. Итак, $s_{ijk} = \sigma_{ijk}\nu_i$. Предложение доказано. $\square$

Из вышедоказанных результатов следует необходимость условий (i), (ii), (iii) теоремы 11.3.1. Докажем достаточность этих условий.

Пусть (обычная) жорданова нормальная матрица J, определенная над полем K, удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii) теоремы 11.3.1 Рассмотрим прямую сумму $C = \bigoplus_{ik} C_{ik}$ всех циклических матриц $C_{ik} = [P_i(t)^{\sigma_{ik}}]$, где $\sigma_{ik} = s_{ijk} : \nu_i$ - натуральное число, не зависящее от j (в силу условий (ii) и (iii)). Матрица C определена над полем $\mathbf{k}$.

Предложение 11.3.5. *Если* $\mathbf{P}$ *- сопровождающая матрица многочлена* $P(t)$*, который над полем* K *разлагается на линейные множители*

$$P(t) = \det(tE - \mathbf{P}) = (t - \lambda_1)^{l_1} ... (t - \lambda_m)^{l_m},$$

то жорданов нормальный вид матрицы $\mathbf{P}$ *над* K *является прямой суммой жордановых клеток* $J_{l_i}(\lambda_i)$ *порядка* l_i *с* λ_i *по главной диагонали* ($i = 1, ..., m$)*.*

В частности, если $P(t)$ *является* l*-той степенью неприводимого над полем* $\mathbf{k}$ *многочлена степени* d*, то жорданов нормальный вид матрицы* $\mathbf{P}$ *над полем разложения* K *многочлена* $P(t)$ *есть прямая сумма* δ *жордановых клеток одинакового порядка* $l\nu$*, где* ν *- степень несепарабельности неприводимого полинома и* $\delta = d : \nu$*.*

Здесь многочлен $P(t)$ может быть как сепарабельным ($\nu = 1$), так и несепарабельным ($\nu \neq 1$).

Доказательство. Система из всех строк матрицы $(\lambda_i E - \mathbf{P})$ кроме последней, очевидно, линейно независима, а определитель этой матрицы равен 0. Поэтому ее коранг равен 1 и, следовательно, имеется всего одна жорданова клетка с λ_i на главной диагонали. □

Согласно доказанному предложению, каждое прямое слагаемое C_{ik} над K имеет жорданов нормальный вид $\bigoplus_j J_{ijk}$. Следовательно, C над K имеет жорданов нормальный вид J. Теорема 11.3.1 доказана.

Следствие 11.3.6. *Всякая матрица* $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ *с характеристическим многочленом* $F(t)$ *подобна над* $\mathbf{k}$ *прямой сумме* $C = \bigoplus C_{ik}$ *циклических матриц* $C_{ik} = [P_i(t)^{\sigma_{ik}}]$*, где* $F(t) = P_1(t)^{l_1} ... P_m(t)^{l_m}$ *- разложение в произведение неприводимых над* $\mathbf{k}$ *многочленов,* $\Sigma_k(\sigma_{ik}\nu_i) = l_i$*,* ν_i *- степень несепарабельности* $P_i(t)$ ($i = 1, ..., m$)*. В частности, любой* *оператор $\mathcal{A}$ n-мерного линейного пространства L над полем $\mathbf{k}$ в некотором базисе может быть представлен полициклической матрицей C указанного вида. При этом набор циклических матриц C_{ik} определяется однозначно.*

Доказательство. Матрица A над полем K разложения поля $\mathbf{k}$ приводится к жордановой нормальной форме J, удовлетворяющей условиям (i) - (iii) теоремы 11.3.1. Следовательно, согласно вышедоказанному J, а значит и A, подобна над полем K полициклической матрице C указанного вида. Тогда согласно следствию 3 гл. 7 пар. 5 [117] (с.75) A будет подобна C и над $\mathbf{k}$. Однозначность набора циклических матриц C_{ik} следует из единственности (обычной) жордановой нормальной формы оператора. □

11.4 Доказательство общей основной теоремы

Перейдем к доказательству общей основной теоремы 11.1.1. Рассмотрим (обычную) жорданову нормальную матрицу J оператора $\mathcal{A}$ над полем разложения K его характеристического многочлена. Она будет удовлетворять условиям (i), (ii), (iii) теоремы 11.3.1.

Пусть C - соответствующая J полициклическая матрица над $\mathbf{k}$, построенная в п.8. Заменим каждое прямое слагаемое $C_{ik} = [P_i(t)^{\sigma_{ik}}]$ матрицы C обобщенной жордановой клеткой $\mathbf{J}_{ik}$ второго рода, имеющей порядок $d_i\sigma_{ik}$ и сопровождающую матрицу $[P_i(t)]$ по главной диагонали ($d_i = \deg P_i(t)$). Положим $\mathbf{J} = \bigoplus_{i,k} \mathbf{J}_{ik}$. Матрицы C_{ik} и $\mathbf{J}_{ik}$ имеют одинаковый характеристический многочлен $P_i(t)^{\sigma_{ik}}$ и для любого его корня λ_{ij} матрицы $\lambda_{ij}E - C_{ik}$ и $\lambda_{ij}E - \mathbf{J}_{ik}$ имеют одинаковый коранг 1 (потому что определители этих матриц равны нулю и все их строки, кроме последней, линейно независимы). Поэтому над полем K эти матрицы имеют одинаковую (обычную) жорданову нормальную форму. Значит C_{ik} и $\mathbf{J}_{ik}$ подобны над К. Поскольку они определены над $\mathbf{k}$, то будут подобны и над $\mathbf{k}$. Но тогда над $\mathbf{k}$ подобны также матрицы $C = \bigoplus_{i,k} C_{ik}$ и $\mathbf{J} = \bigoplus_{i,k} \mathbf{J}_{ik}$. Первая половина теоремы доказана.

Из следствия 11.3.3 и доказательства существования обобщенной жордановой нормальной формы оператора $\mathcal{A}$ следует, что число ее обобщенных жордановых клеток, по главной диагонали которых стоят s сопровождающих матриц полинома $P_i(t)$, есть (не зависящее от j) число $h_{ijs} = r_{ij(s-1)} - 2r_{ijs} + r_{ij(s+1)}$, где $r_{ijs} = \mathrm{rk}(\lambda_{ij}E - A_e)^s$. Это одновременно доказывает вторую часть основной теоремы и дает способ построения обобщенной жордановой нормальной формы. Отметим, что из единственности разложения линейного оператора в прямую сумму матриц какого-либо типа (в частности, обобщенных жордановых нормальных матриц второго рода) следует неразложимость матриц этого типа. Общая основная теорема доказана.

Замечание 11.4.1. Приведенное доказательство без каких-либо изменений применимо к модификации теоремы 11.1.1, где блоки $[P_i(t)]$, являющиеся сопровождающими матрицами неприводимых многочленов, заменяются произвольными матрицами D_i, у которых (i) одинаковый с этим блоком характеристический многочлен: $|tE - D_i| = P_i(t)$; (ii) дополнительный минор матрицы $tE - D_i$ к первому элементу последней строки взаимно прост с $P_i(t)$.

Глава 12

Прямое доказательство общей основной теоремы

12.1 Переформулировка основной теоремы

Целью этой главы является изложение результатов статьи [21] автора, в частности, доказательство следующей теоремы.

Теорема 12.1.1. *[Теорема о квазициклическом максимальном разложении (ТКМР)] Пусть* $\mathbf{k}$ *– произвольное поле,* L *– конечномерное линейное пространство над* $\mathbf{k}$*,* $\mathcal{A}$ *– линейный оператор на* L*,* $m_{\mathcal{A}}(t)$ *– минимальный полином оператора* $\mathcal{A}$ *и* $m_{\mathcal{A}}(t) = p_1^{\mu_1}(t) \dots p_l^{\mu_l}(t)$ *– (унитарное) неприводимое разложение* $m_{\mathcal{A}}(t)$ *над полем* $\mathbf{k}$*.*

Тогда найдется базис $\mathbf{e}$ *в* L *такой, что матрица* $\mathcal{A}_{\mathbf{e}}$ *оператора* $\mathcal{A}$ *в* $\mathbf{e}$ *есть прямая сумма неразложимых матриц*

$$P = (\oplus_{ij} P_{1ij}) \oplus \dots \oplus (\oplus_{ij} P_{lij}), \tag{12.1.1}$$

где каждая матрица P_{kij} $(k = 1, \dots, l;\ i = \mu_k, \dots, 1;\ j = 1, \dots, n_{ki} - n_{k(i+1)})$ *– квазициклическая матрица с* i *сопровождающей матрицей* $[p_k(t)]$ *на диагонали, а* j *параметризует все такие блоки. Здесь*

$$n_{ki} = \dim_{K_k} \left(L_{ki}/L_{k(i-1)} \right), \quad L_{ki} = \ker \left(p_k(\mathcal{A})^i \right), \quad K_k = \mathbf{k}[t]/p_k(t)$$

при $i = 1, \ldots, \mu_k$ *и* $n_{k(\mu_k+1)} = 0$.

Любые два таких представления различаются только порядками прямых слагаемых. Таким образом, система, состоящая из:

(a) *всех (унитарных) неприводимых делителей* $p_k(t)$ *минимального полинома* $m_{\mathcal{A}}(t)$,

(b) *кратностей* μ_k *этих делителей,*

(c) *размерностей* n_{ki} *для каждого* $k = 1, \ldots, l$ *и* $i = 1, \ldots, \mu_k$

является полной системой инвариантов оператора $\mathcal{A}$.

Матрица (12.1.1) представляет обобщенную жорданову форму второго рода линейного оператора $\mathcal{A}$. Разложение (12.1.1) является *максимальным* в том смысле, что все P_{kij} – неразложимы. В утверждении вышеупомянутой теоремы $[p(t)]$ обозначает *сопровождающую матрицу* полинома $p(t)$, а определение квазициклических матриц дано в параграфе 12.5. Подчеркнем, что ТКМР дает как разложение произвольного линейного оператора в прямую сумму неразложимых линейных операторов, так и подходящую (а именно, квазициклическую) форму для этих неразложимых операторов.

В этой главе дается прямое доказательство ТКМР. Центральная используемая идея, заключается в том , что в качестве собственных значений оператора $\mathcal{A}$ на L рассматриваются точки $\operatorname{Spec} \mathbf{k}[t]$ (т.е. множества простых идеалов $(p(t))$ кольца $\mathbf{k}[t]$), удовлетворяющих условию $p(\mathcal{A})(x) = 0$ для некоторого ненулевого $x \in L$. При этом $\operatorname{Spec}_{\mathbf{k}} \mathcal{A}$ определяется как множество всех характеристических значений оператора $\mathcal{A}$ над $\mathbf{k}$. Очевидно, что $\operatorname{Spec} \mathbf{k}[t] = \mathbf{k}$, если $\mathbf{k}$ – алгебраически замкнутое поле, или, более обще, $\operatorname{Spec}_{\mathbf{k}} \mathcal{A} \subset \mathbf{k}$, если все неприводимые делители $m_{\mathcal{A}}(t)$ линейны.

В параграфе 12.2 вводятся некоторые используемые в статье обозначения и напоминается теорема о примарном разложении (см. [119], глава 6.8). Параграфы 12.3 – 12.5 посвящены доказательству ТКМР для простых операторов (теорема 12.5.6 параграфа 12.5). Сформулированная выше общая ТКМР непосредственно следует из этих двух теорем.

Для ссылок на использованные в этой главе понятия и результаты мы используем [119].

12.2 Разложение линейного оператора в прямую сумму примарных операторов

Пусть $\mathbf{k}$ – произвольное поле, L – линейное пространство над $\mathbf{k}$, $\operatorname{End}_{\mathbf{k}} L$ – $\mathbf{k}$-алгебра линейных операторов на L и $\mathbf{k}[t]$ – кольцо полиномов с коэффициентами в $\mathbf{k}$, т.е свободная $\mathbf{k}$-алгебра, порожденная элементом t. Тогда для любого $\mathcal{A} \in \operatorname{End}_{\mathbf{k}} L$ существует стандартный гомоморфизм $\mathbf{k}$-алгебр

$$\sigma_{\mathcal{A}} : \mathbf{k}[t] \to \operatorname{End}_{\mathbf{k}} L \quad | \quad f(t) \mapsto f(\mathcal{A}).$$

Образ $\sigma_{\mathcal{A}}$ является коммутативной подалгеброй в $\operatorname{End}_{\mathbf{k}} L$, порожденной $\mathcal{A}$ (которую будем обозначать через $\mathbf{k}[\mathcal{A}]$), и ядро $\sigma_{\mathcal{A}}$ есть идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ кольца $\mathbf{k}[t]$.

Предложение 12.2.1. *Если* $\dim_{\mathbf{k}} L < \infty$, *то* $\mathcal{I}_{\mathcal{A}} \neq 0$.

Доказательство. Зафиксируем базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на L и заметим, что для любого базисного вектора e_i существует целое число d_i такое, что:

1) система векторов $e_i, \mathcal{A}(e_i), \mathcal{A}^2(e_i), \ldots, \mathcal{A}^{d_i - 1}(e_i)$ линейно независима,

2) существует унитарный полином $f_i(t) \in \mathbf{k}[t]$ степени $\deg f_i = d_i$ такой, что $f_i(\mathcal{A}) = 0$.

Пусть $f(t) = f_1(t) \ldots f_n(t)$. Тогда $f(t) \neq 0$ и $f(t) \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$, так как

$$f(\mathcal{A})(x) = x^1 \frac{f(\mathcal{A})}{f_1(\mathcal{A})} f_1(\mathcal{A})(e_1) + \ldots + x^n \frac{f(\mathcal{A})}{f_n(\mathcal{A})} f_n(\mathcal{A})(e_n) = 0$$

для любого $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n \in L$. Это завершает доказательство. □

Так как $\mathbf{k}[t]$ – кольцо главных идеалов, то существует единственный унитарный полином $m_{\mathcal{A}}(t)$, порождающий $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$, названный *минимальным полиномом оператора* $\mathcal{A}$. Таким образом, имеем изоморфизм $\mathbf{k}$-алгебр $\mathbf{k}[\mathcal{A}] \cong \mathbf{k}[t]/(m_{\mathcal{A}}(t))$.

Полиномы $f(t) \in \mathbf{k}[t]$ действуют на векторах $x \in L$ следующим образом $f(t)x = f(\mathcal{A})(x)$. Множество всех простых идеалов $\mathbf{k}[t]$ совпадает с множеством всех максимальных идеалов $\mathbf{k}[t]$ и биективно множеству всех унитарных неприводимых полиномов $\mathbf{k}[t]$. Эти множества образуют $\operatorname{Spec} \mathbf{k}[t]$.

Определение 12.2.1. Если $p(t) \in \operatorname{Spec} \mathbf{k}[t]$, $x \in L^* = L - \{0\}$ и $p(\mathcal{A})(x) = 0$, то x называется характеристическим вектором $\mathcal{A}$, а $p(t)$, соответствующим x – характеристическим значением оператора $\mathcal{A}$. Множество всех характеристических значений $\mathcal{A}$ образует спектр $\operatorname{Spec}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$.

Предложение 12.2.2. $\operatorname{Spec}(\mathcal{A})$ *есть множество всех унитарных неприводимых делителей* $m_{\mathcal{A}}(t)$. *Другими словами, если*

$$m_{\mathcal{A}}(t) = p_1^{\mu_1}(t) \, \dots \, p_l^{\mu_l}(t)$$

есть (унитарное) неприводимое разложение $m_{\mathcal{A}}(t)$ *над* $\mathbf{k}$, *то*

$$\operatorname{Spec}(\mathcal{A}) = \{p_1(t), \dots, p_l(t)\}.$$

Доказательство. Согласно определению минимального полинома, для любого $x \in L$

$$m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(x) = (p_1(\mathcal{A})^{\mu_1} \dots p_l(\mathcal{A})^{\mu_l})(x) = 0,$$

и для любого $i = 1, \dots, l$ существует $x_i \in L$ такое, что

$$y_i = (p_1(\mathcal{A})^{\mu_1} \dots p_l(\mathcal{A})^{\mu_l} / p_i(\mathcal{A})^{\mu_i})(x_i) \neq 0.$$

Тогда $p_i(\mathcal{A})^{\mu_i}(y_i) = 0$. Следовательно, существуют $s_i \in \{1, \dots, \mu_i\}$, удовлетворяющие условию

$$z_i = p_i(\mathcal{A})^{s_i - 1}(y_i) \neq 0, \quad p_i(\mathcal{A})^{s_i}(z_i) = 0.$$

Поэтому $p_i(t) \in \operatorname{Spec}(\mathcal{A})$.

Обратно, предположим, что унитарный полином $p(t)$, неприводимый над $\mathbf{k}$, принадлежит $\operatorname{Spec}(\mathcal{A})$. Если $p(t) \neq p_i(t)$ для всех $i = 1, \dots, l$, то $p(t)$ взаимно простой к $m_{\mathcal{A}}(t)$. Откуда получаем, что существуют некоторые полиномы $u(t), v(t) \in \mathbf{k}[t]$ такие, что

$$u(t)p(t) + v(t)m_{\mathcal{A}}(t) = 1.$$

В частности,

$$u(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + v(\mathcal{A})m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = id_L.$$

Из $p(t) \in \operatorname{Spec}(\mathcal{A})$ следует, что существует ненулевое $x \in L$, для которого имеет место $p(\mathcal{A})(x) = 0$. Тогда

$$x = id_L(x) = u(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(x) + v(\mathcal{A})m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(x) = u(\mathcal{A})(0) + v(\mathcal{A})(0) = 0.$$

Это противоречие завершает доказательство. □

Определение 12.2.2. Пусть $p(t) \in \operatorname{Spec}\mathbf{k}[\mathrm{t}]$. Линейный оператор $\mathcal{A}$ на L называется $p(t)$-примарным, если имеют место следующие эквивалентные условия:

(i) $m_{\mathcal{A}}(t) = p(t)^{\mu}$ для некоторого натурального числа μ,

(ii) $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{p(t)\}$,

(iii) $p(\mathcal{A})^{\mu}(x) = 0$ для некоторого натурального числа μ и для всех $x \in L$.

Единственным образом определенное натуральное число μ, для которого имеет место $m_{\mathcal{A}}(t) = p(t)^{\mu}$, называется *высотой* $p(t)$-примарного оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 12.2.3 (Теорема о примарном разложении ([119], Глава 6.8))**.** *Пусть* $\mathcal{A} \in \operatorname{End}_{\mathbf{k}} L$ *и*

$$m_{\mathcal{A}}(t) = p_1^{\mu_1}(t) \dots p_l^{\mu_l}(t)$$

– (унитарное) неприводимое разложение $m_{\mathcal{A}}(t)$ *над* $\mathbf{k}$*,* $L_k = \ker p_k(\mathcal{A})^{\mu_k}$ *– ядро* $p_k(\mathcal{A})^{\mu_k}$ *и* $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}|_{L_k}$ *– сужение* $\mathcal{A}$ *на* L_k $(k = 1, \dots, l)$.

Тогда каждый оператор $\mathcal{A}_k$ *является* $p_k(t)$*-примарным оператором и*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_l.$$

Обратно, если в этом прямом разложении каждое слагаемое $\mathcal{A}_k$ *является* $p_k(t)$*-примарным оператором высоты* μ_k $(k = 1, \dots, l)$*, то имеет место представление*

$$m_{\mathcal{A}}(t) = p_1^{\mu_1}(t) \ \dots \ p_l^{\mu_l}(t).$$

Следовательно, примарное разложение оператора $\mathcal{A} \in \operatorname{End}_{\mathbf{k}} L$ *является единственным с точностью до порядка прямых слагаемых.*

Определение 12.2.3. $\mathbf{k}$-линейный оператор $\mathcal{A}$ называется *неразложимым* над полем $\mathbf{k}$, если невозможно представить $\mathcal{A}$ в виде прямой суммы ненулевых $\mathbf{k}$-линейных операторов.

Вообще говоря, слагаемые $\mathcal{A}_k$ в примарном разложении линейного оператора $\mathcal{A}$ не являются неразложимыми. В последующих трех параграфах мы докажем, что каждый примарный оператор $\mathcal{A}_k$ можно разложить в прямую сумму неразложимых операторов.

12.3 Фильтрация подпространств, связанная с примарным оператором

Предположим, что $\mathcal{A} \in \operatorname{End}_{\mathbf{k}} L$ – $p(t)$-примарный оператор высоты μ, где $p(t)$ – (унитарный) неприводимый полином над $\mathbf{k}$, т.е. $m_{\mathcal{A}}(t) = p(t)^{\mu}$. Заметим, что это означает, что

$$p(\mathcal{A})^{\mu}(L) = 0 \quad \text{но} \quad p(\mathcal{A})^{\mu-1}(L) \neq 0.$$

Положим $L_i = \ker p(\mathcal{A})^i$ и рассмотрим цепочку невозрастающих подпространств

$$L = L_{\mu} \supset L_{\mu-1} \supset \ldots \supset L_1 \supset L_0 = \{0\}. \tag{12.3.1}$$

Это приводит к цепочке $\mathbf{k}$-линейных отображений

$$L = L_{\mu} \to L_{\mu-1} \to \ldots \to L_1 \to L_0 = \{0\}, \tag{12.3.2}$$

где $x \in L_i$ отображается в $p(\mathcal{A})(x) \in L_{i-1}$, и к индуцированной цепочке

$$L_{\mu}/L_{\mu-1} \to L_{\mu-1}/L_{\mu-2} \to \ldots \to L_1/L_0 = L_1, \tag{12.3.3}$$

где $x + L_i \in L_{i+1}/L_i$ отображается в $p(\mathcal{A})(x) + L_{i-1} \in L_i/L_{i-1}$. Последнее отображение определено корректно, поскольку

$$x + L_i = y + L_i \;\Rightarrow\; x - y \in L_i \;\Rightarrow\; p(\mathcal{A})(x) - p(\mathcal{A})(y) = p(\mathcal{A})(x - y) \in L_{i-1}$$
$$\Rightarrow p(\mathcal{A})(x) + L_{i-1} = p(\mathcal{A})(y) + L_{i-1}.$$

Далее, можно рассмотреть каждое $\mathbf{k}$-линейное пространство L_i/L_{i-1} как пространство над полем $K = \mathbf{k}[t]/(p(t))$, если произведение $f(t) + (p(t)) \in K$ и $x + L_{i-1} \in L_i/L_{i-1}$ определить формулой

$$(f(t) + (p(t)))(x + L_{i-1}) = f(\mathcal{A})(x) + L_{i-1}.$$

Эта операция также корректно определена, так как если

$$f(t) + (p(t)) = g(t) + (p(t)), \quad x + L_{i-1} = y + L_{i-1}, \tag{12.3.4}$$

то

$$f(\mathcal{A})(x) + L_{i-1} = g(\mathcal{A})(y) + L_{i-1}.$$

Действительно, (12.3.4) означает, что

$$f(t) = g(t) + h(t)p(t), \quad h(t) \in \mathbf{k}[t], \quad x = y + z, \quad z \in L_{i-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(\mathcal{A})(x) + L_{i-1} &= (g(\mathcal{A}) + h(\mathcal{A})p(\mathcal{A}))(y + z) + L_{i-1} \\ &= g(\mathcal{A})(y) + (g(\mathcal{A})(z) + h(\mathcal{A})p(\mathcal{A}))(y + z)) + L_{i-1} \\ &= g(\mathcal{A})(y) + L_{i-1}, \end{aligned}$$

в силу включения $(g(\mathcal{A})(z) + h(\mathcal{A})p(\mathcal{A}))(y + z)) \in L_{i-1}$.

Каждое отображение цепочки (12.3.3) не только $\mathbf{k}$-линейное, но также K-линейное. Действительно,

$$p(\mathcal{A})((f(t) + (p(t)))(x + L_i) = (f(t) + (p(t)))p(\mathcal{A})(x + L_i)$$

для всех $f(t) + (p(t)) \in K$, так как левая сторона равна $p(\mathcal{A})(f(\mathcal{A})(x)) + L_{i-1}$, правая сторона равна $f(\mathcal{A})(p(\mathcal{A})(x)) + L_{i-1}$, и операторы $f(\mathcal{A})$ и $p(\mathcal{A})$ коммутируют.

Лемма 12.3.1. *Все стрелки в цепочке (12.3.3) являются инъективными отображениями.*

Доказательство. Если

$$p(\mathcal{A})(x + \ker p(\mathcal{A})^i) = p(\mathcal{A})(x) + \ker p(\mathcal{A})^{i-1} = 0,$$

то $p(\mathcal{A})(x) \in \ker p(\mathcal{A})^{i-1}$. Следовательно,

$$p(\mathcal{A})^{i-1}(p(\mathcal{A})(x)) = p(\mathcal{A})^i(x) = 0,$$

и поэтому $x \in \ker p(\mathcal{A})^i$, т.е. $x + \ker p(\mathcal{A})^i = 0$. □

Следствие 12.3.2. *Все стрелки в цепочке (12.3.3) отображают любую систему линейно независимых векторов (элементов) в систему линейно независимых векторов.*

Заметим, что утверждения леммы 12.3.1 и следствия 12.3.2 верны для линейных пространств как над полем $\mathbf{k}$, так и над K.

Следствие 12.3.3. *Имеем* $n_{i+1} = \dim_K\, L_{i+1}/L_i \le \dim_K\, L_i/L_{i-1} = n_i$.

12.4 Построение поликвазициклического базиса примарного оператора

Для любого $e \in L$ и $L_0 < L$ положим $\overline{e} = e + L_0 \in L/L_0$ и выберем базис в цепочке фактор-пространств (12.3.3) над K следующим образом:

1) Зафиксируем произвольный базис $\overline{e}_{\mu 1}, \dots, \overline{e}_{\mu n_\mu}$ в $L_\mu/L_{\mu-1}$.

2) В каждом L_i/L_{i-1} $(i = \mu - 1, \dots, 1)$, к K-независимым векторам, являющимся образами базисных векторов L_{i+1}/L_i относительно K-линейного отображения $p(\mathcal{A})$, добавим векторы $\overline{e}_{i1}, \dots, \overline{e}_{i(n_i - n_{i+1})}$ так, чтобы получить систему, которая будет базисом K-линейного пространства L_i/L_{i-1}.

Положим $d = \deg p(t)$, $n_i = \dim L_i/L_{i-1}$ $(\mu \ge i \ge 1)$ и $n_{\mu+1} = 0$ и обозначим через $\mathbf{e}_{ij}$ систему векторов (элементов)

$$e_{ij}, \mathcal{A}(e_{ij}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(e_{ij}); p(\mathcal{A})(e_{ij}), \mathcal{A}p(\mathcal{A})(e_{ij}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}p(\mathcal{A})(e_{ij}); \dots;$$

$$p(\mathcal{A})^{i-1}(e_{ij}), \mathcal{A}p(\mathcal{A})^{i-1}(e_{ij}), \ldots, \mathcal{A}^{d-1}p(\mathcal{A})^{i-1}(e_{ij}),$$

а через $\mathbf{e}$ систему, состоящую из всех векторов систем $\mathbf{e}_{ij}$, где $i = \mu, \ldots, 1$ и $j = 1, \ldots, n_i - n_{i+1}$.

Лемма 12.4.1. *Система* $\mathbf{e}$ *линейно независима над полем* $\mathbf{k}$.

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i,j,r,s} a_{ijrs}\, \mathcal{A}^r\, p(\mathcal{A})^s(e_{ij}) = 0, \quad a_{ijrs} \in \mathbf{k}.$$

Можно переписать это равенство в виде

$$\sum_{i,j,s} f_{ijs}\,(\mathcal{A})\, p(\mathcal{A})^s(e_{ij}) = 0,$$

где

$$f_{ijs}(t) = a_{ij0s} + a_{ij1s}t + \ldots + a_{ij(d_1)s}t^{d-1},$$

или эквивалентно

$$\sum_{i,j,s} f_{ijs}\,(t)\, p(t)^s\, e_{ij} = 0. \tag{12.4.1}$$

Для фактор-пространства $L_\mu / L_{\mu-1}$ над K, из предыдущего равенства следует равенство

$$\sum_{j=1}^{n_\mu} \overline{f}_{\mu j0}\,(t)\, \overline{e}_{\mu j} = 0.$$

Так как $\overline{e}_{\mu 1}, \ldots, \overline{e}_{\mu n_\mu}$ – базис $L_\mu / L_{\mu-1}$, получим

$$\overline{f}_{\mu j0}(t) = f_{\mu j0}(t) + (p(t)) = 0, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n_\mu.$$

Отсюда $f_{\mu j0} = 0$ в силу $\deg f_{\mu j0}(t) < d = \deg p(t)$, и следовательно, $a_{\mu jr0} = 0$ для всех j и r.

Подставляя эти значения $a_{\mu jr0}$ в (12.3.3) для $L_{\mu-1}/L_{\mu-2}$, получим

$$\sum_{j=1}^{n_\mu} f_{\mu j1}(t)\overline{p(t)e_{\mu j}} + \sum_{j=1}^{n_{\mu-1}} f_{(\mu-1)j0}(t)\overline{e}_{(\mu-1)j} = 0.$$

Заметим, что система

$$\overline{p(t)e_{\mu 1}}, \ldots, \overline{p(t)e_{\mu n_\mu}}, \overline{e}_{(\mu-1)1}, \ldots, \overline{e}_{(\mu-1)n_{\mu-1}}$$

образовывает базис фактор-пространства $L_{\mu-1}/L_{\mu-2}$, причем степени полиномов $f_{\mu j1}(t)$ ($j = 1, \ldots, n_\mu$) и $f_{(\mu-1)j0}(t)$ ($j = 1, \ldots, n_{\mu-1}$) меньше, чем d. Отсюда получаем, что все эти полиномы обращаются в нуль. Следовательно, $a_{\mu jr1} = 0$ и $a_{(\mu-1)jr0} = 0$ для всех j и r. Продолжая тем же образом, получим, что все $a_{ijrs} = 0$, откуда следует требуемое утверждение. □

Предложение 12.4.2. *Система* $\mathbf{e}$ *является базисом* $\mathbf{k}$*-линейного пространства* L.

Доказательство. Достаточно заметить, что число

$$\sum_{i=\mu}^{1} d \cdot i \cdot (n_i - n_{i+1}) = \sum_{i=\mu}^{1} d \cdot n_i$$

векторов системы $\mathbf{e}$ совпадает с

$$\dim_{\mathbf{k}} L = \sum_{i=\mu}^{1} \dim_{\mathbf{k}} L_i/L_{i-1} = \sum_{i=\mu}^{1} \dim_K L_i/L_{i-1} \cdot \dim_{\mathbf{k}} K = \sum_{i=\mu}^{1} d \cdot n_i,$$

поскольку $\dim_{\mathbf{k}} K = \deg p(t) = d$ ввиду $K = \mathbf{k}[t]/(p(t))$. □

Определение 12.4.1. Далее будем называть базис $\mathbf{e}_{ij}$ $p(t)$-примарного оператора $\mathcal{A}_{ij}$ $[p(t)]$-квазициклическим, а базис $\mathbf{e}$ – $[p(t)]$-поликвазициклическим базисом $p(t)$-примарного оператора $\mathcal{A}$.

12.5 Разложение примарного линейного оператора в прямую сумму неразложимых операторов

Пусть $p(t) = p_0 + p_1 t + \ldots + p_{d-1} t^{d-1}$ и

$$[p(t)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \ldots & -p_{d-2} & -p_{d-1} \end{pmatrix}$$

– сопровождающая матрица $p(t)$.

Определение 12.5.1. $[p(t)]$-квазициклическая матрица (относительной) степени i – это матрица вида

$$P = P([p(t)], i) = \begin{pmatrix} [p(t)] & F & \dots & 0 & 0 \\ 0 & [p(t)] & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [p(t)] & F \\ 0 & 0 & \dots & 0 & [p(t)] \end{pmatrix},$$

где число блоков $[p(t)]$ на диагонали равно i, а F – блок с 1 в левом нижнем углу и 0 в остальных местах.

Предложение 12.5.1. *Для любого $i = \mu, \dots, 1$ и $j = 1, \dots, n_i - n_{i+1}$ подпространство L_{ij}, натянутое на векторы системы $\mathbf{e_{ij}}$, является $\mathcal{A}$-инвариантным и ограничение $\mathcal{A}_{ij}$ оператора $\mathcal{A}$ на L_{ij} задается в квазициклическом базисе $\mathbf{e}_{ij}$ посредством $[p(t)]$-квазициклической матрицы P_{ij} (относительной) степени i.*

Доказательство. Утверждение следует из вида квазициклического базиса $\mathbf{e}_{ij}$. □

Предложение 12.5.2. *Для любого $p(t)$-примарного линейного оператора $\mathcal{A}$ высоты μ существует базис $\mathbf{e}$ такой, что матрица $\mathcal{A}_{\mathbf{e}}$ оператора $\mathcal{A}$ в $\mathbf{e}$ является $[p(t)]$-поликвазициклической. Более точно, это – прямая сумма $[p(t)]$-квазициклических матриц P_{ij}, где $i = \mu, \dots, 1$ и $j = 1, \dots, n_i - n_{i+1}$ для каждого i.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из вида поликвазициклического базиса $\mathbf{e}$. □

Заметим, что $[p(t)]$-поликвазициклическая форма $p(t)$-примарного оператора $\mathcal{A}$ определяется не единственным образом. Во-первых, переставляя базисные векторы, можно изменить порядок $[p(t)]$-квазициклических блоков на диагонали, при этом $\mathcal{A}$-инвариантные подпространства L_{ij} не меняются. Могут меняться и сами эти подпространства, если взять другие базисные векторы e_{ij}. Тем не менее, справедливо следующее утверждение о единственности.

Предложение 12.5.3. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– произвольный* $[p(t)]$*-примарный линейный оператор на* $L/\mathbf{k}$ *высоты* μ*,* $n_i = \dim\, L_i/L_{i-1}$ *(см. (12.3.3)) и* $P = \oplus_{i,j} P_{ij}$ *– поликвазициклическая матрица* $\mathcal{A}$ *в некотором базисе* $\mathbf{e}$*. Здесь* i *– число блоков* $[p(t)]$ *на диагонали квазициклической матрицы* P_{ij}*, а* j *нумерует такие матрицы.*

При этом $\max\, i = \mu$*, и* $j = 1, \ldots, n_i - n_{i+1}$ *для любого* $i = \mu, \ldots, 1$*.*

Доказательство. Имеем $m_P(t) = m_{\mathcal{A}}(t) = (p(t))^{\mu}$, откуда $\max i = \mu$. Базис $\mathbf{e}$ состоит из векторов системы $\mathbf{e}_{ij}$, где для любого $i = \mu, \ldots, 1$ индекс j изменяется от 1 до m_i. Следовательно, векторы $\overline{e}_{i1}, \ldots, \overline{e}_{im_i}$ принадлежат L_i/L_{i-1}, но не $p(\mathcal{A})(L_{i+1}/L_i)$. Более того, они определяют базис $(L_i/L_{i-1})/(p(\mathcal{A})(L_{i+1}/L_i))$ над K. Поэтому,

$$\begin{aligned} m_i &= \dim_K (L_i/L_{i-1})/(p(\mathcal{A})(L_{i+1}/L_i)) \\ &= \dim_K (L_i/L_{i-1}) - \dim_K (L_{i+1}/L_i) = n_i - n_{i+1}, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение. □

Следствие 12.5.4. *Поликвазициклическая форма* $P = \oplus_{i,j} P_{ij}$ $[p(t)]$*-примарного линейного оператора* $\mathcal{A}$ *единственным образом определяется с точностью до порядка квазициклических блоков на диагонали. Другими словами, высота* μ *и размерности* $n_i = \dim_K L_i/L_{i-1}$ *образуют полную систему инвариантов для* $\mathcal{A}$*.*

Следствие 12.5.5. $[p(t)]$*-примарный линейный оператор* $\mathcal{A}$ *является неразложимым тогда и только тогда, когда его поликвазициклическая форма имеет одно слагаемое.*

Доказательство. Квазициклическая матрица представляет неразложимый оператор $\mathcal{A}$ в силу следствия 12.5.4. Необходимость очевидна. □

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 12.5.6 (Теорема о квазициклическом максимальном разложении для примарных операторов)**.** *Для любого* $[p(t)]$*-примарного линейного оператора* $\mathcal{A}$ *на конечномерном линейном пространстве* $L/\mathbf{k}$*, существует поликвазициклическая форма*

$$P = \oplus_{i,j} P_{ij},$$

которая единственна с точностью до порядка квазициклических матриц P_{ij} на диагонали. Здесь $i = \mu, \ldots, 1$, где μ – высота $[p(t)]$-примарного оператора $\mathcal{A}$, $j = 1, \ldots, n_i - n_{i+1}$, где $n_i = \dim\, L_i/L_{i-1}$ и $L_i = \ker p(\mathcal{A})^i$.

Таким образом, $(p(t), \mu, n_\mu, \ldots, n_1)$ – полная система инвариантов для $\mathcal{A}$.

Заключение

В заключение сделаем несколько замечаний об имеющихся результатах по изложенным в диссертации темам, не попавших в ее основную часть, а также о возможных дальнейших исследованиях по направлениям, затронутым в диссертации.

Во избежание чрезмерного разбухания объема диссертации, из основных частей были изъяты следующие результаты.

1) Категорная теория Галуа очень удачно вкладывается в „прокрустово ложе“ теории 2-категорий и в ней классическая теория Галуа получает наиболее адекватное по сути описание. Эти работы автора пока не опубликованы, но предварительно были включены в диссертацию в качестве четвертой главы первой части.

2) Оказывается, что в категорной теории групп могут быть мономорфизмы, основа которых не является мономорфизмом исходной категории. Мономорфизмы указанного типа, названные ненаследственными, были исследованы в диссертации Г. Асатряна ([56]). Соответствующие результаты вначале были включены как заключительный параграф второго приложения.

3) Несколько особняком стоят результаты совместной с А. Петросяном статьи [14] о слайс классификации категорий коалгебр для комонад, в которой получен ответ на вопрос, поставленный Верой Трнковой. В предварительной версии диссертации этой задаче посвящалось третье приложение второй части.

4) Предварительно ко второй части диссертации были приложены результаты авторской статьи [20] о том, что для любого алгебраически замкнутого поля $\mathbf{k}$ существует девять (моделей) эквивалентных категорий алгебраических кривых и их конечнолистных

накрытий, которые антиэквивалентны категории конечных расширений трансцендентного расширения $\mathbf{k}(t)$ поля $\mathbf{k}$.

5) Не вошли в третью часть диссертации результаты, касающиеся связей жордановой нормальной формы с другими каноническими формами: рациональной (или, иначе говоря, естественной), Жордана-Постникова и др.

6) В диссертацию не вошли также результаты работ автора по теме диссертации [6], [12], [13], [15], [16],[22], [24].

Перспективным представляются дальнейшие работы по следующим темам, связанным с результатами диссертации.

1) Рассмотрение различных конкретных теорий Галуа в свете полученных результатов категорной теории Галуа.

2) Применение результатов первого приложения о единственности несократомого разложения объекта на неприводимые составляющие к конкретным категориям.

3) Развитие категорной теории групп (и более общо, категорной теории алгебраических систем).

4) Приложение метода башен кривых и накрытий для решения различных задач алгебраической геометрии. В первую очередь это касается активно развивающейся в последние годы теории многообразий Прима-Тюрина и других абелевых многообразий.

5) Развитие метода башен для алгебраических многообразий высоких размерностей.

6) Приложения обобщенной теоремы Жордана к различным задачам линейной алгебры (в том числе, прикладной) и, возможно, к описанию неприводимых многочленов (в частности, над конечными полями).

Литература

[1] Adam A., *A theorem of algebraic operators in the most general sense*, Acta sci. math., 18, no. 3-4, 1957, 205 – 206,

[2] Arens R., Hoffman K. *Algebraic extensions of normal algebras*, Proc. AMS, 7, 1956, 203 – 210.

[3] Artin E., *Galois theory*, London, 1944.

[4] Atiyah M., *On the Krull Schmidt theorem with applications to sheaves*, Bull.Soc.Math.France, 84 (1956), 307 – 317.

[5] Baer R., *Linear Algebra and Projective Geometry*, NY, 1952.

Русский перевод: Бэр Р., *Линейная алгебра и проективная геометрия*, М., ИЛ, 1955.

[6] Birkhoff G., *Lattice theory*, Providence, Rhod Island, 1967.

Русский перевод: Биркгоф Г., *Теория решеток*, М., Наука, 1984.

[7] Brown D. T., *Galois theory for Banach algebras*, Pacific J. Math., 30, no. 3, 1969, 577 – 600.

[8] Bucur I., Deleanu A., *Introduction to the theory of categories and functors*,

Русский перевод: Букур И., Деляну А. *Введение в теорию категорий и функторов*, М., Мир, 1972.

[9] Bourbaki N., *Algèbre*, livre II, Paris, (Hermann and Co), 1958.

Русский перевод: Бурбаки Н., *Алгебра, Многочлены и поля. Упорядоченные группы*, М., Мир, 1965.

[10] Chase S.U., Harrison D.K., Rosenberg A., *Galois Theory and Galois Cohomology of Commutative Rings*, Mem. AMS, vol. 52, 1965, 15 – 33.

[11] Chase S. U., Swedler M. E., *Hopf Algebras and Galois Theory*, B-Hdlb-NY, 1969.

[12] Cohn P. M., *Universal Algebra*, NY-Evanston-London, 1965.

Русский перевод: Кон П., *Универсальная алгебра*, М., Мир, 1968.

[13] De Meyer F., Ingraham E., *Separable Algebras over Commutative Rings*, B-Hdlb-NY., 1971.

[14] Faith C., *Algebra: rings, modules and categories, 1*, Springer-Verlag, 1973.

Русский перевод: Фейс К., *Алгебра: кольца, модули и категории*, М., Мир, 1977.

[15] Forster O., *Riemannsche Flächen*, B-Hdlb-NY. 1977.

Русский перевод: Форстер О., *Римановы поверхности*, М., Мир, 1988.

[16] Grätzer G., *General lattice theory*, Akademie Verlag, Berlin, 1978.

Русский перевод: Гретцер Г., *Общая теория решеток*, М, Мир, 1982.

[17] Ihara Y., *On Congruence Monodromy Problem*, Lect. Notes, Univ. of Tokio, vol. I, II, 1968, 1969.

[18] Jacobson N., *Lectures in Abstract Algebra*, vol III, 1964.

[19] Jacobson N., *Structure of Rings*, AMS, 1956.

Русский перевод: Джекобсон Н., *Строение колец*,М., ИЛ, 1961.

[20] Jacobson N., *The Theory of Rings*, Math. Surveys, 1943.

Русский перевод: Джекобсон Н., *Теория колец*,М., ИЛ, 1947.

[21] Джанелидзе Г., *Фундаментальная теорема теории Галуа*, Мат. сборник, т. 136 (178) : 3 (7), 1988, 361 –376.

Английский перевод: Janelidze G., *The fundamental theorem of Galois theory*, Math. USSR Sbornik 64 (2), 1989, 359-384

[22] Janelidze G., *Galois theory in categories: the new example of differential fields*, Proc. Conf. Categorical Topology in Prague 1988, World Scientific 1989, 369-380.

[23] Janelidze G., *Pure Galois theory in categories*, Journal of Algebra 132, 1990, 270-286.

[24] Janelidze G., *Precategories and Galois theory*, Springer Lecture Note in Mathematics 1488, 1991, 157-173.

[25] Janelidze G., Schumacher D. and Street R,H., *Galois theory in variable categories*, Applied Categorical Structures 1, 1993, 103-110.

[26] Janelidze G., Kelly G.M., *Galois theory and a general notion of a central extension*, Journal of Pure and Applied Algebra 97, 1994, 135-161.

[27] Brown R., Janelidze G., *Galois theory of second order covering maps of simplicial sets*, Journal of Pure and Applied Algebra 135, 1999, 23-31

[28] Janelidze G., Tholem W., *Extended Galois theory and dissonant morphisms*, Journal of Pure and Applied Algebra 143, 1999, 231-253.

[29] Janelidze G., Street R.H., *Galois theory in symmetric monoidal categories*, Journal of Algebra 220, 1999, 174-187.

[30] Janelidze G. and Kelly G.M., *Central extensions in MalЎtsev varieties*, Theory and Applications of categories 7, 10, 2000, 219-226.

[31] Janelidze G. and Kelly G.M., *Central extensions in universal algebra: a unification of three notions*, Algebra Universalis 44, 2000, 123-128.

[32] Borceux F., Janelidze G., *Galois Theories*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 72, Cambridge University Press, 2001

[33] Janelidze G., *Categorical Galois theory: revision and some recent developments*, Proc. International Conference on Galois Connections, Potsdam 2001

[34] Carboni A., Janelidze G., *Boolean Galois theories*, Preprint 15/2002, Dept. Math. Instituto Superior Te'chnico, Lisbon 2002

[35] Kaplansky I., *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1957.

Русский перевод: Капланский И., *Введение в дифференциальную алгебру*, М., ИЛ. 1959.

[36] Kolchin E.R., *Extensions of differential fields*, Annl of Math., vol I, no. 43, 1942, 724 – 729.

[37] Kolchin E.R., *Galois theory of differential fields*, Aner. j. of Math., vol 75, 1953, 753 – 824.

[38] Kolchin E.R., *On the Galois theory of differential fields*, Annl of Math., vol 77, 1955, 868 – 894 .

[39] Kolchin E.R., *Differential Algebra and Algebraic groups*, NY-L, 1973.

[40] Krasner M., *Une generalization de la notion de corps*, J. math pure et appl., 17, f. 4, 1938, 367 – 385.

[41] Krull W., *Galoische theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen*, Math Ann., vol. C, 1928.

[42] Lang S., *Abelian varieties*, Interscience Pub, NY, 1959.

[43] Mac Lane S., *Categories for the beginning mathematicians*, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1971.

Русский перевод: Маклейн С., *Категории для начинающих математиков*, М., Мир.,

[44] Magid A.R., *The Separable Galois Theory of Commutative Rings*, NY, 1974.

[45] Milne J.S., *Étale cohomology*, NJ., 1980.

Русский перевод: Милн Дж., *Этальные когомологии*, М., Мир, 1983.

[46] Murre J., *Lectures on an Introduction to Grothendieck's Theory of the Fundamental Group*, L. N. Bombay, 1967.

[47] Ringel C., *Diagonalisierungspaare, I und II*, Math. Z., 117, N. 1 - 4 (1970), (249 - 266), 122, N. 1 (1971), (10 32).

[48] Ritt J.F., *Differential Equations from the Algebraic Standpoint*, AMS Coll. Pub., vol. 14, 1932.

[49] Ritt J. F., *Differential Algebre*, AMS Coll. Pub., vol. 33, 1950.

[50] Rosenberg A., Zelinsky D., *Extension of derivation in continuous transformation rings*, Trans. Amer. Math Soc., vol. 79, 1955, 453 – 458.

[51] Rosenberg A., Zelinsky D., *Galois theory of continuous transformation rings*, Trans. Amer. Math Soc., vol. 79, 1955, 429 – 452.

[52] Serre J.-P., *Groupes algébriques et corps de classes*, Paris VI, 1959.

Русский перевод: Серр Ж., *Алгебраические группы и поля классов*, М., Мир, 1968.

[53] Shimura G., *Introduction to the Arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton Univ Press, 1971.

Русский перевод: Шимура Г., *Введение в арифметическую теорию автоморфных функций*, М., Мир, 1973.

[54] Zelinsky D., *Noncommutative Galois Theory*, Transl. by Nobuo Nobusawa, Sugaku, vol. 8, 1956-57.

[55] Zindberg J. A., *Algebraic extensions of commutative Banach algebras*, Pacific J. Math., 14, 1964, 559 – 584.

[56] Асатрян Г. Р., *О ненаследственных мономорфизмах*, Изв. АН Арм. ССР, Математика, том XXXV, no 5. , 2000, 16 – 24.

[57] Batikyan B. T., *Branch points in the spectrum of algebtaic extension of a Banach algebra*, Inter. Workshop on General Topological Algebras, Tartu, 1999, p.11.

[58] Batikyan B. T., *Point derivations on algebraic extension of Banach algebra*, Lobachevskii J. Math., 2000, v. 6, p. 33 – 37.

[59] Батикян Б. Т., *О точках ветвления спектра алгебраического расширения равномерной алгебры*, Функц. анал. и прил., 2002, т. 36, no. 2, 77 – 80.

[60] Батикян Б. Т., Григорян С. А.,*Об алгебраическом расширении* $A(E)$, Мат. заметки, 2002, т. 72, no. 5, 649 – 653.

[61] Батикян Б. Т., *Об индексе ветвления точки спектра алгебраического расширения*, Изв. НАН Армении, Математика, 2007, т. 42, № 2, стр. 29 – 43.

[62] Галуа Э., *Сочинения.* М.-Л., 1936.

[63] Григорян С., *Полиномиальные расширения коммутативных банаховых алгебр*, Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 20, no. 2, 1985, 112 –130.

[64] Зюзин Ю. В., Лин В. Я., *Неразветвленные алгебраические расширения коммутативных банаховых алгебр*, Матем. сб., том 91 (133), no. 3 (7), 1973, 402 – 420.

[65] Курош А. Г., *Общая алгебра*, М., 1962.

[66] Математическая энциклопедия. т. 1, М., 1977, т. 2, М., 1979.

[67] Плоткин Б. И., *Группы автоморфизмов алгебраических систем*, М., Наука, 1966.

[68] Постников М.М., *Теория Галуа*, М., Наука, 1963.

[69] Пятецкий-Шапиро И. И., Шафаревич И. Р., *Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация*, Изв. АН СССР, сер. Матем., том 30, 1966, 671 – 704.

[70] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е.Г., *Основы теории категорий*, М., Наука, 1974.

[71] Чеботарев Н. Г., *Теория алгебраических функций*, М.-Л., 1948.

[72] Шафаревич И. Р., *Основы алгебраической геометрии*, т. 1 и 2, М., Наука, 1988.

[73] Яковлев А.В., *Теория Галуа для пучков множеств*, Труды МИАН СССР, Л., Наука, том 148, 1978, 253 – 268.

[74] Andreotti A., Mayer A., *On period relations for abelian integrals on algebraic curves*, Ann. Scuola. Norm. Sup. di Pisa, 1976, vol. 21, 189 – 238.

[75] Arbarello E., Cornalba M., Griffiths P., Harris J., *Geometry of algebraic Curves*, vol 1, Springer Verlag, NY, 1985.

[76] Beauville A., *Prym varieties and the Schottky problem*, Invent. Math., 1977, vol. 41, 149 –196.

[77] Beauville A., *Varietes de Prym et jacobiennes intermediaires*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4 serie, 10, 1977, 309 – 391.

[78] Carocca, A., Lange, H., Rodriguez, R. E., Rojas, A., *Products of Jacobians as Prym-Tyurin varieties*, Geom. Dedicata, vol. 139, Numb. 1, 2009, 219 – 231.

[79] Carocca, A., Lange, H., Rodriguez, R. E., Rojas, A., *Prym-Tyurin varieties via Hecke algebras*, J. Reine Angew. Math. 634 (2009), 1 – 11.

[80] Casalaina-Martin S., *Singularities of the Prym theta divisor*, Annals of Math., **170** (2009), 163 – 204.

[81] Clemens H., Griffits P., *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math., 95 (1972), 281 – 356.

Русский перевод: Клеменс К. Г., Гриффитс Ф. А., *Промежуточный якобиан трехмерной кубической поверхности*, Математика, 17 : 1, 1973, 3 – 41; 16 : 6. 1972, 3 – 32.

[82] Desale U. V., Ramanan S., *Classification of vector bundles of rank 2 on hyperelliptic curves*, Invent. Math., vol. 38, numb. 2, 1976, 161 – 185.

[83] Donagi R., *The tetragonal construction*, Bull. Amer. Math. Soc., 1981, vol. 4, no. 2, 181 – 185.

[84] Dragovič V., Gajič B., *L-A pair for the Hess-ApelŸrot system and new integrable case in so(4) x so(4)*, Proceedings of Royal society of Edinburgh A, 131 (2001), no. 4, 845-855; math-ph/9911047

[85] Dragovič V., Gajič B., *The Lagrange bitop on so(4) x so(4) and geometry of the Prym varieties*, Amer. J. of Math., vol. 126, num. 5, 2004, 951 – 1004.

[86] Dragovič V., Gajič B., *Matrix Lax polynomials, geometry of Prym varieties and systems of Hess-AppelŸrot type*, Letters in Math. Phys, vol/ 76, n. 2 –3, 2006, 163 – 186.

[87] Dragovič V., Gajič B., *Systems of Hess-AppelŸrot type*, Commun. Math. Phys., vo;. 265, n. 2, 2006, 397 – 435.

[88] Farkas H. M., *Special divisors and analitic subloci of Teichmüller space*, Amer. J. Math., 88 (1966), 881 - 901.

[89] Fernandes R. L., Vanhaecke P., *Hyperelliptic Prym Varieties and Integrable Systems*, Comm. Math. Phys., **221**, 169, 2001.

[90] Friedman R., Smith R., *The generic Torelli theorem for the Prym map*, Invent. math., 67, 1982, 473 – 490.

[91] Griffiths P., Harris J., *Principles of algebraic geometry*, 1978.

Русский перевод: Гриффитс Ф., Харрис Дж., *Принципы алгебраической геометрии*, М., Мир, 1982.

[92] Hartshorne R., *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977.

Русский перевод: Хартсхорн Р., *Алгебраическая геометрия*, М., Мир, 1981.

[93] Inoue R., Yamaxaki T., *Cohomological Study on Variants of the Mumford System, and Integrability of the Noumi-Yamada System*, Comm. Math. Phys., vol. 265, num. 3, 2006, 699 – 719.

[94] Канев В. И., *Глобальная теорема Торелли для многообразий Прима в общей точке*, Изв. АН СССР. 46, 1982, 244 – 268.

Английский перевод: Kanev V. I., *The global Torelli theorem for Prym varieties at a generic point*, Math USSR Izv, 1983, 20 (2), 235 – 257.

[95] Kanev V. I., *Recovering of curves with involution by extended Prym date*, Math. Annalen, vol. 299, num. 1, 1994, 391 – 414.

[96] Kanev V. I., Lange H., *Polarization types of isogenous Prym-Tyurin varieties*, Contemporary Mathematics, vol 465, 2008, 147 – 174.

[97] Masiewicki L., *Universal properties of Prym varieties with an application to algebraic curves of genus five*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 222, 1976.

[98] Mumford D., *Algebraic geometry. I. Complex projective varieties*, Spriger-Verlag, 1976.

Русский перевод: Мамфорд Д, *Алгебраическая геометрия. 1. Комплексные проективные многообразия*, М., Мир, 1979.

[99] Mumford D., *Abelian varieties*, Bombay, 1968.

Русский перевод: Мамфорд Д., *Абелевы многообразия*, М., Мир, 1971.

[100] Mumford D., *Lectures on curves on an algebraic surface*, Princeton University Press, 1966.

Русский перевод: Мамфорд Д., *Лекции о кривых на алгебраической поверхности*, М., Мир, 1968.

[101] Mumford D., *Prym Varieties I*, Contributions to Analysis, Academic Press, New York, 1974, 325 – 350.

[102] Recillas S., *Jacobians of curves with a* g^1_4 *are Prym varieties of trigonal curves*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1974, vol. 19, 9 – 13.

[103] Sasaki R., *Prym varieties and their application*, Sci Repts Tokyo Kyoigu Diakagu, A 13, no. 347 - 365, 1975, 111 – 128.

[104] Verra A., *Aspetti geometrici della teoria delle varieta di Prym*, Conferenzia tenuta il giorno 7 Giugno, 1999.

[105] Walker R.J., *Algebraic curves*, Princeton, New Jersey, 1950.

Русский перевод: Уокер Р., *Алгебраические кривые*, М., ИЛ, 1952.

[106] Куликов В. С., Курчанов П. В., *Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов, структуры Ходжа*, М., ВИНИТИ, 1989.

[107] Манин Ю, И., *Лекции по алгебраической геометрии*, М., МГУ, 1970.

[108] Parshin A.N., Shafarevich I.R., *Algebraic Geometry III : Complex Algebraic Varieties. Algebraic Curves and Their Jacobians*, Algebraic Geometry III, 1997.

[109] Тайманов И.А., *Многообразия Прима разветвленных накрытий и нелинейные уравнения*, Матем. сб., т. 70, 1991.

Английский перевод: Taimanov I.A., *Prym Varieties of branched coverings and nonlinear equations*, Math USSR Sb, 1991, 70 (2), 367 – 384.

[110] Тюрин А. Н., *Пять лекций о трехмерных многообразиях*, УМН 27:5 (167) (1972), 3 – 50.

Английский перевод: Tyurin A. N., *Five lectures on threefolds*, Russian Math. Surveys, 27:5 (1972), 1 – 53.

[111] Тюрин А. Н., *Геометрия дивизора Пуанкаре многообразия Прима*, Изв. АН СССР, сер. матем., 39 (1975), 1003 – 1043.

Английский перевод: Tjurin A. N., *The geometry of the Poincaré theta-divisor of a Prim variety*, Math. USSR Izv., 1975, 9 (5), 951 – 986.

[112] Тюрин А. Н., *О пересечении квадрик*, УМН 30:6, 1975, 51 – 99.

Английский перевод: Tyurin A. N., *On intersections of quadrics*, Russian Math. Surveys, 30:6 (1975), 51 – 105.

[113] Шафаревич И. Р., *Основы алгебраической геометрии*, М., Наука, т. 1 и 2, 1988.

[114] Шафаревич И.Р. и др., *Алгебраические поверхности*, Труды матем инст. им. В.А.Стеклова,

[115] Шокуров В.В., *Многообразия Прима: теория и приложения*, Изв. АН СССР. т. 23, 1984.

Английский перевод: Shokurov V.V., *Prym Varieties: Theory and Applications*, Math. USSR Izv. 23, 1984, 83-147.

[116] Artin M., *Algebra*, Prentice Hall , New Jersey, 1991.

[117] Bourbaki N., *Algèbre*, livre II, Paris, (Hermann and Co), 1958.

Русский перевод: Бурбаки Н., *Алгебра. Модули, кольца, формы*, М., Мир, 1966.

[118] Al Fakir S., *Algèbre et théorie des nombres*, Paris, 2003.

[119] Hoffman K. and Kunze R., *Linear Algebra*, New Jersey, (Prentice-Hall), 1971.

[120] Jordan C., *Traité des substitutions et des équations algébrique, Paris (Gauthier-Villars)*, 1870, 114–126.

[121] Lang S., *Algebra.* Addison-Wesley Publ. Comp., 1965.

Русский перевод: Ленг С., *Алгебра*, М., Мир, 1968.

[122] Marcus M., Minc H., *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities* (Dover, 1992).

Русский перевод: Маркус М., Минц Х., *Обзор по теории матриц и матричных неравенств*, М., Наука, 1972.

[123] van der Waerden B. L., *Algebra*, Springer-Verlag, 1967.

Русский перевод: ван дер Варден Б.Л., *Алгебра*, М., Наука, 1976.

[124] Weierstrass K., *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, *Berliner Monalsbericht* (1868), 310; Werke 2 (1895), 19-44.

[125] Гельфанд И.М., *Лекции по линейной алгебре*, М., 1964.

[126] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*, М., Наука, 1970.

[127] Кострикин А.И., *Введение в алгебру*, М., Наука, 1977.

[128] Кострикин А.И., Манин Ю.И., *Линейная алгебра и геометрия*, М., Наука, 1986.

[129] Курош А.Г., *Курс высшей алгебры.* М.,Физматлит, 1962.

[130] Мальцев А.И., *Основы линейной алгебры*, М., Наука, 1975.

[131] Постников М.М., *Линейная алгебра и дифференциальная геометрия*, М., Наука, 1979.

[132] Шафаревич И.Р., *Основные понятия алгебры*, М., 1999.

Работы автора по теме диссертации

[1] С. Г. Далалян, *Многообразие Прима неразветвленного двулистного накрытия гипер-эллиптической кривой*, Успехи матем. наук, XXIX, 1974, вып.6 (180), 165 – 166 .

English translation: S. H. Dalalyan, *The Prym variety of an unramified double covering of a hyperelliptic curve*, Uspekhi Matem. Nauk, 1974, Vol.29, Issue 6 (180), 165–166.

[2] С. Г. Далалян, *Многообразие Прима двулистного накрытия гиперэллиптической кривой с двумя точками ветвления*, Матем. сборник, том 27, (1975), вып. 2, 255 – 267.

English translation: S. H. Dalalyan, *The Prym variety of double covering of a hyperelliptic curve with two branch points*, Mathematics of the USSR – Sbornik, Vol. 27 (1975), Number 2, 227–238.

[3] С. Г. Далалян, *Башни кривых и многообразия Прима*, Изв. АН Арм. ССР, сер. мат. **XIV** (1979), no. 1, 49 – 69.

[4] С. Г. Далалян, *О тетрагональных кривых*, Математика, Межвузов. сборник научн. трудов, вып.3, Ереван, 1983, 64 – 81.

English translation: S. H. Dalalyan, *On Tetragonal Curves*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), Vol. 145, 1989, 1 – 13.

[5] С. Г. Далалян, *О многообразии Прима разветвленного двулистного накрытия тригональной кривой*, Учен. записки ЕГУ, естест. науки, **1 (155)**, 1984, 8 – 13.

[6] С. Г. Далалян, *Абелевы расширения периодической группы с помощью делимой группы*, Тезисы сообщений XVIII Всесоюзной алгебр. конфер., Кишинев, 1985.

[7] С. Г. Далалян, *О единственности несократимого разложения объекта в объединение конечного числа неприводимых подобъектов*, Изв. АН Армении, сер. мат. **26** (1991), no. 5, 398 – 412.

English translation: S. H. Dalalyan, *On the uniqueness of the minimal decomposition of an object into the union of a finite number of irreducible subobjects*, J. Contemp. Math. Anal. 26 (1991), no. 5, 1–14.

[8] С. Г. Далалян, *Основная теорема в категорной теории Галуа*, Изв. АН Арм. ССР, сер. мат. **27** (1992), no. 4, 1 – 36.

English translation: S. H. Dalalyan, *Main theorem in categorical Galois theory*, Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), **27** (1992), no. 4, 1–26.

[9] С. Г. Далалян, *Основная теорема в категорной теории Галуа в регулярном случае*, Изв. АН Арм. ССР, сер. мат. **27** (1992), no. 6, 28 – 58.

English translation: S. H. Dalalyan, *Main theorem in categorical Galois theory in regular case*, Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), **27** (1992), no. 6, 23–47.

[10] С. Г. Далалян, *Нормализация мономорфизма в общих категориях*, Докл. НАН РА, **94** (1993), no. 5, 259 – 263.

[11] С. Г. Далалян, *Категории бинаров и ассоциированные с ними представления*, Изв. АН Арм. ССР, сер. мат. **30** (1995), n. 3, 18 – 31.

English translation: S. H. Dalalyan, *Categories of binars and associeted with them representations*, Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), **30** (1995), no. 3, 18 – 31.

[12] S. H. Dalalyan, *Galois Adjunctions*, Abstracts 28th Annual Iranian Math. Conf., Tabriz, 1997.

[13] S. H. Dalalyan, *N-categories*, Proc. Conf. Comp. Sci. and Inf. Technol., Yerevan, 1997.

[14] S. H. Dalalyan, A. Petrossian, *The Slice Classification of Categories of Coalgebras for Comonads*, Algebra Universalis, 41 (1999), p. 177 - 185.

[15] S. H. Dalalyan, *On existence of ω-cocompletions*, Ninth Int. Colloq. On Num. Analysis.and Comp. Sci. with Appl, 12-17 Aug. 2000, Plovdiv.

[16] S. H. Dalalyan, *Free completions of Categories*, Second Int. Conf. on Appl. Math., Oct 25-27, 2000, Tehran.

[17] С. Г. Далалян, *Линейные преобразования*, Научно-метод. пособие, Изд. Ерев. унив., 2005 (на арм языке).

[18] С. Г. Далалян, *Обобщенный жорданов нормальный вид матрицы с сепарабельными неприводимыми делителями характеристического многочлена*, Вестник рос.-арм. (слав.) гос. унив., физ.-мат. и естест науки, no. 1, 2005, 7 – 14.

[19] С. Г. Далалян, *О категоризации основ алгебраической геометрии*, Тезисы научной конф. посвященной А. Шагиняну, Ер., 20-21 декабря 2006 г.

[20] С. Г. Далалян, *О категоризации основ алгебраической геометрии и почти категориях*, Сб. научн трудов РАУ, Ер., 2006, 28 – 32.

[21] С. Г. Далалян, *Обобщенная жорданова матрица линейного оператора*, Математ. заметки. т. 82, 2007, вып. 1, 27 – 35.

English translation: S. H. Dalalyan, *Generalized Jordan Matrix of a Linear Operator*, Mat. Zametki, 2007, Volume 82, Issue 1, Pages 27 – 35.

[22] С. Г. Далалян, *Нормальная форма Жордана-Постникова вещественного линейного оператора*, The First International Algebra and Geometry Confer., 16-20 May, 2007, Yerevan, Armenia.

[23] С. Г. Далалян, *Прямое доказательство теоремы об обобщенной жордановой форме линейных операторов*, Изв. НАН Армении, сер. мат. **43** (2008), no. 5, 274–284.

English translation: S. H. Dalalyan, *A Direct Proof of the Theorem on the Generalized Jordan Form of Linear Operators*, Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian National Academy of Sciences), **43** (2008), no. 5, 274–284.

[24] S. H. Dalalyan, *Jordan-Postnikov Normal Form for a Real Linear Operator*, Armenian J. of Math., Vol 1,n. 2, 2008, 37-43.

[25] С. Г. Далалян, *Об обобщенной жордановой нормальной форме второго рода матрицы линейного преобразования над произвольным полем*, Мальцевские чтения, Новосибирск, 24-28 августа, 2009 г.

[26] S. H. Dalalyan, *An algorithm for constructing a canonical basis and the Jordan normal form of arbitrary linear operators over any field*, SIAM Conf. on Applied Linear Algebra, Monterey, California, Oct. 26-29, 2009.