ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

правах рукописи

Арцрун Аршалуйсович Саргсян

Нелинейные аппроксимации по системе Фабера-Шаудера и жадный алгоритм

(01.01.01-математический анализ)

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

На соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель

Доктор физико-математических наук,

Профессор Григорян М.Г.

Ереван - 2008

Оглавление

Введение

Работа посвящена важной и бурно развивающейся области математического анализа - теории нелинейной аппроксимации (подробно об этом см. обзорную статью В. Н. Темлякова [5]). Жадные алгоритмы (гриди алгоритмы, от англ. greedy-жадный) для банаховых пространств изучены Р. ДеВором [1], В. Н. Темляковым [1]-[6],С. В. Конягиным [4], П. Войтащчиком [8], А. Камонт [9], М. Г. Григоряном [10]-[13], [44]-[45] и другими авторами (см. [6], [7], [14]-[19]).

Работа состоит из трех параграфов. В первом параграфе рассматриваются вопросы о поведении жадного алгоритма по системе Фабера-Шаудера в $C_{[0,1]}$. Во втором параграфе изучается сходимость жадного алгоритма в подпространствах $C_{[0,1]}$ порожденные подсистемами системы Фабера-Шаудера. В третьем параграфе изучается поведение жадного алгоритма по системе Фабера-Шаудера после исправления функции на множестве малой меры.

Пусть $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ нормированный базис в банаховом пространстве X. Тогда для каждого элемента $f \in X$ существует единственный ряд по системе $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходящейся к f по норме пространства X:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\psi_n \quad .$$

Определение 1. *Базис $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется безусловным базисом в X, если для любого элемента $f \in X$ и для любой перестановки неотрицательных целых чисел $\rho = \{\rho(n)\}_{n=1}^{\infty}$, ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{\rho(n)}(f)\psi_{\rho(n)}$$

сходится к f по норме пространства X.

Определение 2. *Система $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется демократичной системой в*

X, если для любых двух конечных множеств индексов P и Q, с одинаковыми числами элементов, выполняется

$$\left\|\sum_{k\in P}\psi_k\right\|_X \le C\left\|\sum_{k\in Q}\psi_k\right\|_X ,$$

где постоянная $C = C(X,\Psi)$ не зависит от P и от Q.

Перестановку неотрицательных целых чисел (необязательно всех) $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ назовем убывающей, если

$$|A_{\sigma(n)}(f)| \ge |A_{\sigma(n+1)}(f)|, \;\; n = 1, 2, ...$$

Множество таких перестановок обозначим через $D(f,\Psi)$. В случае строгих неравенств $D(f,\Psi)$ содержит только одну убывающую перестановку. Определим m-тый жадный аппроксимант элемента f по базису Ψ, отвечающий перестановке $\sigma \in D(f,\Psi)$ следующим образом

$$G_m(f) = G_m(f,\Psi,\sigma) := \sum_{n=1}^{m} A_{\sigma(n)}(f)\psi_{\sigma(n)} .$$

Этот нелинейный метод аппроксимации известен как жадный алгоритм (см. например [4]).

Определение 3. *Говорят, что жадный алгоритм элемента $f \in X$ по системе Ψ сходится, если существует $\sigma \in D(f,\Psi)$, для которой*

$$\lim_{m\to\infty}\|G_m(f,\Psi,\sigma) - f\|_X = 0 . \tag{1}$$

Если система Ψ является безусловным базисом, то ясно, что для нее имеет место (1) независимо от выбора $\sigma \in D(f,\Psi)$.

Положим

$$\varrho_m(f,\Psi) := \inf_{\alpha_1\ldots\alpha_m;k_1\ldots k_m} ||f - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\psi_{k_i}||_X .$$

$\varrho_m(f,\Psi)$ называется m - членным наилучшим приближением элемента f по системе Ψ. Наилучшее, что можно ожидать от $G_m(f,\Psi,\sigma)$, это

$$\|G_m(f,\Psi,\sigma) - f\|_X = \varrho_m(f,\Psi) .$$

Определение 4. *Базис $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется гриди базисом в X, если для любого элемента $f \in X$, существует перестановка $\sigma \in D(f, \Psi)$, для которой*

$$||f - G_m(f, \psi, \sigma)||_X \leq K \varrho_m(f, \Psi) \,, \tag{2}$$

где постоянная $K = K(X, \Psi)$ не зависит от f и от m.

В работе [4] доказано, что если базис Ψ является гриди базисом в X, то (2) имеет место для любой перестановки $\sigma \in D(f, \Psi)$.

Определение 5. *Базис $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется квази-гриди базисом в X, если для любого элемента $f \in X$ и перестановки $\sigma \in D(f, \Psi)$ выполняется (1).*

Очевидно, что гриди базис является также квази-гриди базисом. В работе [4] доказана следующая теорема:

Теорема (С. Конягин, В. Темляков). *Базис является гриди базисом тогда и только тогда, когда она является безусловным и демократичным базисом.*

В работе [8] доказана

Теорема (П. Войтащик). *Для того, чтобы базис Ψ был квази-гриди базисом в X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $f \in X$, для любой перестановки $\sigma \in D(f, \Psi)$ и натурального числа m выполнялось неравенство*

$$\|G_m(f, \Psi, \sigma)\|_X \leq B_0 \cdot \|f\|_X \,,$$

где постоянная $B_0 = B_0(X, \Psi)$ не зависит от f и от m.

Для формулировки результат первого параграфа сделаем некоторые обозначения. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$ - система Фабера-Шаудера (см. определение в §1). В работе [7] доказано, что в пространстве $C_{[0,1]}$ не существует квази-гриди базиса. Следовательно, в случае системы Фабера-Шаудера (система Фабера-Шаудера базис в пространстве $C_{[0,1]}$, (см. [20])) для любого положительного числа B, существуют функция $f_0 \in C_{[0,1]}$, перестановка $\sigma_0 \in D(f_0, \Phi)$ и натуральное число m_0, для которых

$$\|G_{m_0}(f_0, \Phi, \sigma_0)\|_C > B \cdot \|f_0\|_C \,,$$

где $||\cdot||_C$ - норма пространства $C_{[0,1]}$. Отметим, что доказательство этого результата не имеет конструктивного характера. В первом параграфе приводится конструктивное доказательство этого результата со следующими усилениями:

Теорема 1.1 . *Для точки $x_0 \in [0,1]$, существует функция $f_0(x) \in C_{[0,1]}$, такая что*

$$\lim_{m\to\infty} G_m(f_0,\Phi,\sigma,x_0) = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} A_{\sigma(n)}(f_0)\varphi_{\sigma(n)}(x_0) = +\infty \ ,$$

какого бы ни было $\sigma \in D(f_0,\Phi)$, тогда и только тогда, когда

$$x_0 \in [0,1] \setminus \hat{E}_1 \ ,$$

где

$$\hat{E}_1 = \left\{ \frac{i}{2^k} \ , \ k = 0,1,... \ ; \ i = 0,1,...,2^k \right\} \ .$$

Далее, построим множество $\hat{E}_2$, следующим образом: обозначим $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_0^{(1)} = = (0,1)$. Затем разделим $\hat{\Delta}_1$ на четыре равные части и обозначим $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1^{(1)} = (\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ и $\hat{\Delta}_3 = \hat{\Delta}_1^{(2)} = (\frac{1}{2},\frac{3}{4})$. Далее, каждый из интервалов $\hat{\Delta}_1^{(1)}$ и $\hat{\Delta}_1^{(2)}$ опять разделим на четыре равные части и обозначим через $\hat{\Delta}_4 = \hat{\Delta}_2^{(1)}$ и $\hat{\Delta}_5 = \hat{\Delta}_2^{(2)}$ соответственно вторую и третью четверть интервала $\hat{\Delta}_1^{(1)}$, а через $\hat{\Delta}_6 = \hat{\Delta}_2^{(3)}$ и $\hat{\Delta}_7 = \hat{\Delta}_2^{(4)}$ соответственно вторую и третью четверть интервала $\hat{\Delta}_1^{(2)}$ и т.д.. И так мы получаем систему интервалов

$$\{\hat{\Delta}_m\}_{m=1}^{\infty} = \{\hat{\Delta}_{2^l+j-1}\} = \{\hat{\Delta}_l^{(j)}\} \ ; \ l = 0,1,... \ , \ j = 1,2,...,2^l \ , \qquad (3)$$

в которой $\hat{\Delta}_{l+1}^{(2j-1)}$ и $\hat{\Delta}_{l+1}^{(2j)}$ являются соответственно второй и третей четвертью интервала $\hat{\Delta}_l^{(j)}$, $l = 0,1,... \ ; \ j = 1,2,...,2^l$. Положим

$$\hat{E}_2 = \bigcap_{l=0}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^l} \hat{\Delta}_l^{(j)} \ .$$

Учитывая определение системы интервалов (3), находим, что в $\hat{E}_2$ входят все те точки отрезка $[0,1]$, разложения которых в четвертичной системе не содержат числа 0 и 3. Очевидно множество $\hat{E}_2$ имеет мощность континуума.

Теорема 1.2 . *Существует функция* $f_0(x) \in C_{[0,1]}$ *такая, что*

$$\lim_{m\to\infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, x) = +\infty \ , \ \textit{при} \ \ x \in \hat{E}_2 \ ,$$

кокого бы не было $\sigma \in D(f_0, \Phi)$.

Далее, имеет место

Теорема 1.3 . *Существуют функция* $f_0(x) \in C_{[0,1]}$*, для которой множество* $D(f_0, \Phi)$ *содержит одну убывающую перестановку, и подпоследовательности* $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ *натуральных чисел такие, что*

1) $$\lim_{k\to\infty} G_{M_k}(f_0, \Phi, x) = +\infty \ , \ \textit{п.в. на отрезке} \ [0,1] \ ,$$

2) $$\lim_{k\to\infty} ||G_{N_k}(f_0, \Phi, x) - f_0(x)||_C = 0 \ .$$

Из этой теоремы вытекает следующее

Следствие. *Существует функция* $f_0(x) \in C_{[0,1]}$*, жадный алгоритм которой расходится по мере на* $[0,1]$.

Отметим также, что этой теоремой дается положительный ответ одного вопроса С. Конягина, поставленного после доклада автора на международной конференции "Harmonic Analysis and Approximations III, 20-27 September 2005, Tsahkadzor, Armenia": существует ли непрерывная на $[0,1]$ функция, жадный алгоритм которой по системе Фабера-Шаудера расходится на множестве положительной меры?

Далее, нетрудно видеть, что если коэффициенты разложения непрерывной на $[0,1]$ функции $f(x)$ по системе Фабера-Шаудера удовлетворяют условию

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2^{1+\varepsilon} n}\right) \ \text{при} \ n \to \infty \ (\varepsilon > 0) \ ,$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x)$ абсолютно (а значит, и безусловно) сходится по норме пространства $C_{[0,1]}$.

Верна следующая теорема:

Теорема 1.4 . *Существует функция $f_0(x) \in C_{[0,1]}$, коэффициенты разложения которой по системе Фабера-Шаудера удовлетворяют условию*

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right) \text{ при } n \to \infty \ ,$$

и жадный алгоритм которой расходится по норме пространства $C_{[0,1]}$.

Во втором параграфе изучается сходимость жадного алгоритма в подпространствах $C_{[0,1]}$ порожденные подсистемами системы Фабера-Шаудера и демократичность подсистем системы Фабера-Шаудера.

Пусть $S = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, а $\Lambda(n)$ - число элементов S меньше n. Положим

$$\rho(S) = \lim_{m\to\infty} \sup \lim_{n\to\infty} \sup \frac{\Lambda(n+m) - \Lambda(n)}{m}.$$

$\rho(S)$ называется плотностью множества S.

Пусть $\Phi_{S'} = \{\varphi_{n'_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такая подсистема системы Фабера-Шаудера, что носители функций $\varphi_{n'_k}(x),\ k = 1, 2, ...$, попарно не пересекаются (например $\Phi_{S'} = = \{\varphi_{2^k+2}(x)\}_{k=1}^{\infty}$). Очевидно, что $\Phi_{S'}$ является безусловным, следовательно, и квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки и $\rho(S') = 0$.

Справедлива следующая

Теорема 2.1 . *Существует подсистема системы Фабера-Шаудера с плотностью нуль, которая не является квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки.*

Далее, для каждого $x \in [0, 1]$ через E_x обозначим множество, элементы которого являются числа, выражающие количества поочередных повторений 0 и 1 в двоичном разложении числа x (будем считать, что повторениям в одинаковое число раз в E_x соответствует один элемент, и ∞ будем считать одним числом). Например для

$$x^{(2)} = 0,00001110011110(1) \ ,$$

будет $E_x = \{4, 3, 2, 1, \infty\}$.

Определим классы подсистем $\Phi_{(1)}$, $\Phi_{(2)}$ и $\Phi_{(3)}$ системы Фабера-Шаудера следующим образом: через $\Phi_{(1)}$ обозначим множество тех подсистем $\Phi_R = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которых

$$mes\bar{\Delta}_k = \frac{1}{2^{k-1}} \ , \ \bar{\Delta}_{k+1} \subset \bar{\Delta}_k \ , \ k \in \mathbb{N} \ ,$$

через $\Phi_{(2)}$ обозначим множество тех подсистем $\Phi_{R'} = \{\varphi_{n_{k_i}}(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, для которых $\bar{\Delta}_{k_{i+1}} \subset \bar{\Delta}_{k_i}$, $i = 1, 2, ...$, и наконец через $\Phi_{(3)}$ обозначим множество тех подсистем $\Phi_{R'} = \{\varphi_{n_{k_i}}(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(2)}$, для которых $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} \in Q_{[0,1]}$, где $Q_{[0,1]}$ есть совокупность рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, а $\bar{\Delta}'_{k_i}$ - замыкание $\bar{\Delta}_{k_i}$. Ясно, что $\Phi_{(1)} \subset \Phi_{(2)}$ и что системы класса $\Phi_{(2)}$ являются подсистемами систем класса $\Phi_{(1)}$, или совпадают с ними.

Теорема 2.1 следует из боле обшей теоремы:

Теорема 2.2 . *Для того, чтобы подсистема $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(1)} \cup \Phi_{(3)}$ являлась квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки, необходимо и достаточно, чтобы*

$$x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} \in \hat{E}_1 \ \ (\textit{см. теорему 1.1}) \ .$$

Верны также следующие теоремы:

Теорема 2.3 . *Для того, чтобы подсистема $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi_{(1)}$ являлась демократичной системой в $C_{[0,1]}$, необходимо и достаточно, чтобы число элементов множества E_{x_0} ($x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_k$) было конечно.*

Теорема 2.4 . *Для того, чтобы подсистема $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(2)}$ являлась демократичной системой в $C_{[0,1]}$, достаточно, чтобы число элементов множества E_{x_0} ($x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i}$) было конечно.*

Итак, жадный алгоритм в $C_{[0,1]}$ по системе Фабера-Шаудера сходится не для всех функций из $C_{[0,1]}$. В третьем параграфе рассматривается поведение жадного алгоритма в $C_{[0,1]}$ по системе Фабера-Шаудера, после исправления функции на множестве малой меры.

Идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н.Н. Лузину. Им в 1912 г. был получен следующий знаменитый результат (см. [21]).

Теорема (C-свойство Лузина). *Для любой измеримой, почти всюду конечной на [0,1] функции $f(x)$ и для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество E с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ и непрерывная на [0,1] функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на E.*

В 1939г. Д.Е. Меньшов [22] доказал следующую фундаментальную теорему

Теорема (Усиленное C- свойство Меньшова). *Пусть $f(x)$ измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 2\pi]$. Каково бы не было $\epsilon > 0$, можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E, $|E| > 2\pi - \epsilon$ и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.*

Далее в этом направлении интересные результаты получены А.А. Талаляном [23], Ф.Г. Арутюняном [24], О.Д. Церетели [25], У. Прайсом [26], К.И. Осколковым [27], Б.С. Кашином [28], Ш.В. Хеладзе [29], М.Г. Григоряном [30]-[34], К.С. Казаряном [33] и другими авторами (см. [28], [33], [35]-[36]).

В третьем параграфе дается положительный ответ на естественный вопрос: можно ли изменить значении любой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$ на множестве малой меры так, чтобы жадный алгоритм вновь полученной функции $\tilde{f}(x) \in C_{[0,1]}$ сходился в $C_{[0,1]}$. Верна следующая теорема

Теорема 3.1 . *Для любого $\epsilon > 0$ и для каждой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$, можно найти функцию $\tilde{f}(x) \in C_{[0,1]}$, $mes\{\tilde{f}(x) \neq f(x)\ ,\ x \in [0,1]\} < \epsilon$ и такую, что ее жадный алгоритм равномерно сходится к ней.*

Эта теорема следует из боле обшей теоремы:

Теорема 3.2 . *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$ можно найти функцию $\tilde{f}(x) \in C_{[0,1]}$, совпадающую с $f(x)$ на E, и такую, что все коэффициенты разложения этой функции по системе Фабера-Шаудера отличны от нуля, множе-*

ство $D(\tilde{f},\Phi)$ *содержит один элемент, жадный алгоритм этой функции по системе Фабера-Шаудера равномерно сходится к ней, и имеет место следующее неравенство:*

$$\|G_m(\tilde{f},\Phi,x)\|_C \ \leq \ 5\cdot||\tilde{f}(x)||_C \leq 10\cdot||f(x)||_C \ , \ \forall m\in\mathbb{N} \ .$$

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 статьях (см. [39]-[46]).

Глава 1

Жадный алгоритм и система Фабера-Шаудера.

В этом параграфе мы изучим жадный алгоритм по системе Фабера-Шаудера. Напомним определение системы Фабера-Шаудера. Это система функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, в которой $\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x$ и при $n = 2^k + i;\ \ k = 0, 1, \ldots\ ;\ \ i = 1, 2, \ldots, 2^k$

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \notin (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}) \\ \\ 1, \text{ если } x = x_n = x_k^{(i)} = \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \\ \text{линейна и непрерывна на } [\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}], [\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}]. \end{cases} \tag{1.1}$$

k называется рангом функции $\varphi_k^{(i)}(x)$. Носитель функции $\varphi_n(x)$ $(n \geq 2)$ системы (1.1) обозначим через $\Delta_n = \Delta_k^{(i)},\ n = 2^k + i$. Система Фабера-Шаудера - базис в пространстве $C_{[0,1]}$, при этом в разложении непрерывной функции $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x)$ коэффициенты $A_n(f)$ определяются следующим образом:

$$A_0(f) = f(0)\ ,\ A_1(f) = f(1) - f(0)\ ,$$

$$A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right] \tag{1.2}$$

(см. [20]). Учитывая определение системы Фабера-Шаудера, легко видеть, что для любой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$ и для каждого целого неотрицательного числа m, сумма $\sum_{n=0}^{m} A_n(f)\varphi_n(x)$

на $[0,1]$ представляет собой ломаную, вершины которой лежат на графике функции $f(x)$, так что

$$\left\|\sum_{n=0}^{m} A_n(f)\varphi_n(x)\right\|_C \le ||f(x)||_C \ , \ m=0,1,\dots \ . \tag{1.3}$$

Есть много интересных результатов о свойствах системы Фабера-Шаудера (см. например обзорную статью П. Л. Ульянова [37]).

В этом параграфе доказываются следующие теоремы:

Теорема 1.1 . *Для точки $x_0 \in [0,1]$, существует функция $f_0(x) \in C_{[0,1]}$, такая что*

$$\lim_{m\to\infty} G_m(f_0,\Phi,\sigma,x_0) = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} A_{\sigma(n)}(f_0)\varphi_{\sigma(n)}(x_0) = +\infty \ ,$$

какого бы ни было $\sigma \in D(f_0,\Phi)$, тогда и только тогда, когда $x_0 \in [0,1]\setminus \hat{E}_1$, где

$$\hat{E}_1 = \left\{\frac{i}{2^k} \ , \ k=0,1,\dots \ ; \ i=0,1,\dots,2^k\right\} \ .$$

Далее, построим множество $\hat{E}_2$, следующим образом: обозначим $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_0^{(1)} = = (0,1)$. Затем разделим $\hat{\Delta}_1$ на четыре равные части и обозначим $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1^{(1)} = (\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ и $\hat{\Delta}_3 = \hat{\Delta}_1^{(2)} = (\frac{1}{2},\frac{3}{4})$. Далее, каждый из интервалов $\hat{\Delta}_1^{(1)}$ и $\hat{\Delta}_1^{(2)}$ опять разделим на четыре равные части и обозначим через $\hat{\Delta}_4 = \hat{\Delta}_2^{(1)}$ и $\hat{\Delta}_5 = \hat{\Delta}_2^{(2)}$ соответственно вторую и третью четверть интервала $\hat{\Delta}_1^{(1)}$, а через $\hat{\Delta}_6 = \hat{\Delta}_2^{(3)}$ и $\hat{\Delta}_7 = \hat{\Delta}_2^{(4)}$ соответственно вторую и третью четверть интервала $\hat{\Delta}_1^{(2)}$ и т.д.. И так мы получаем систему интервалов

$$\{\hat{\Delta}_m\}_{m=1}^{\infty} = \{\hat{\Delta}_{2^l+j-1}\} = \{\hat{\Delta}_l^{(j)}\} \ ; \ l=0,1,\dots \ , \ j=1,2,\dots,2^l \ , \tag{1.5}$$

в которой $\hat{\Delta}_{l+1}^{(2j-1)}$ и $\hat{\Delta}_{l+1}^{(2j)}$ являются соответственно второй и третей четвертью интервала $\hat{\Delta}_l^{(j)}$, $l=0,1,\dots \ ; \ j=1,2,\dots,2^l$. Положим

$$\hat{E}_2 = \bigcap_{l=0}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^l} \hat{\Delta'}_l^{(j)} \ , \tag{1.6}$$

где $\hat{\Delta'}_l^{(j)}$ есть замыкание $\hat{\Delta}_l^{(j)}$. Учитывая определение системы интервалов (1.5), находим, что в $\hat{E}_2$ входят все те точки отрезка $[0,1]$, разложения которых в четвертичной системе не содержат числа 0 и 3. Очевидно множество $\hat{E}_2$ имеет мощность континуума.

Теорема 1.2 . *Существует функция $f_0(x) \in C_{[0,1]}$ такая, что*

$$\lim_{m\to\infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, x) = +\infty \ , \ \textit{при} \ \ x \in \hat{E}_2 \ ,$$

какого бы ни было $\sigma \in D(f_0, \Phi)$.

Далее, имеет место

Теорема 1.3 . *Существуют функция $f_0(x) \in C_{[0,1]}$, для которой множество $D(f_0, \Phi)$ содержит одну убывающую перестановку, и подпоследовательности $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел такие, что*

1) $$\lim_{k\to\infty} G_{M_k}(f_0, \Phi, x) = +\infty \ , \ \textit{п.в. на отрезке} \ [0,1] \ ,$$

2) $$\lim_{k\to\infty} ||G_{N_k}(f_0, \Phi, x) - f_0(x)||_C = 0 \ .$$

Из этой теоремы вытекает следующее

Следствие. *Существует функция $f_0(x) \in C_{[0,1]}$, жадный алгоритм которой расходится по мере на $[0,1]$.*

Далее, нетрудно видеть, что если коэффициенты разложения непрерывной на $[0,1]$ функции $f(x)$ по системе Фабера-Шаудера удовлетворяют условию

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2^{1+\varepsilon} n}\right) \ \text{при} \ n \to \infty \ (\varepsilon > 0) \ ,$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x)$ абсолютно (а значит, и безусловно) сходится по норме пространства $C_{[0,1]}$.

Верна следующая теорема:

Теорема 1.4 . *Существует функция $f_0(x) \in C_{[0,1]}$, коэффициенты разложения которой по системе Фабера-Шаудера удовлетворяют условию*

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right) \ \textit{при} \ n \to \infty \ ,$$

и жадный алгоритм которой расходится по норме пространства $C_{[0,1]}$.

1.1 Доказательства теорем

Теорему 1.1 докажем параллельно теоремы 2.2.

Доказательство теоремы 1.2 . Носитель функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{S}_f$. Рассмотрим систему непрерывных на $[0,1]$ функций $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, в которой

$$f_m(x) = f_l^{(j)}(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \notin \hat{\Delta}_m = \hat{\Delta}_l^{(j)} \ ; \ m = 2^l + j - 1 = 1, 2, \dots , \\ 1, \text{ при } x \in \hat{\Delta}'^{(2j-1)}_{l+1} \bigcup \hat{\Delta}'^{(2j)}_{l+1} , \\ \text{линейна на первой и четвертой четвертях } \hat{\Delta}_l^{(j)}, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\hat{\Delta}'^{(j)}_l$ есть замыкание $\hat{\Delta}_l^{(j)}$ (т.е. $\mathcal{S}_{f_m} = \hat{\Delta}_m = \hat{\Delta}_{2^l+j-1}$ и $||f_m(x)||_C = 1$, $m \in \mathbb{N}$). Будем считать, что функция $f_l^{(j)}(x)$ является функцией ранга l. Пусть $\varphi_{n_m}(x) = = \varphi_{k_{(m)}}^{(i_{(m)})}(x)$ ($n_m = 2^{k_{(m)}} + i_{(m)}$, $i_{(m)} \in [1, 2^{k_{(m)}}]$) та функция системы Фабера-Шаудера, для которой $\Delta_{n_m} = \hat{\Delta}_m$. Из (1.2) следует, что

$$f_m(x) = f_l^{(j)}(x) = \varphi_{k_{(m)}}^{(i_{(m)})}(x) + \frac{1}{2}\{\varphi_{k_{(m)}+1}^{(2i_{(m)}-1)}(x) + \varphi_{k_{(m)}+1}^{(2i_{(m)})}(x)\} \ . \tag{1.8}$$

Положим $\{\hat{\varphi}_m(x)\}_{m=1}^{\infty} = \{\varphi_{n_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}$ (т.е. $\hat{\Delta}_m$ является носителем функции $\hat{\varphi}_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$), а через $\{\check{\varphi}_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ обозначим ту подсистему системы Фабера-Шаудера, в которой $\{\check{\varphi}_{2m-1}(x)\}_{m=1}^{\infty} = \{\varphi_{k_{(m)}+1}^{(2i_{(m)}-1)}(x)\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\check{\varphi}_{2m}(x)\}_{m=1}^{\infty} = \{\varphi_{k_{(m)}+1}^{(2i_{(m)})}(x)\}_{m=1}^{\infty}$. После этого (1.8) принимает вид

$$f_m(x) = f_l^{(j)}(x) = \hat{\varphi}_m(x) + \frac{1}{2}\{\check{\varphi}_{2m-1}(x) + \check{\varphi}_{2m}(x)\} =$$

$$= \hat{\varphi}_{2^l+j-1}(x) + \frac{\check{\varphi}_{2^{l+1}+2j-3}(x) + \check{\varphi}_{2^{l+1}+2j-2}(x)}{2} \ , \ m = 2^l + j - 1 = 1, 2, \dots . \tag{1.9}$$

Учитывая определения множества $\hat{E}_2$ (см. (1.6)), системы (1.7) и подсистемы $\{\check{\varphi}_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, находим, что для любого натурального числа l и для каждой точки $x_0 \in \hat{E}_2$ есть только одна функция $f_l^{(j_{x_0})}(x)$, $j_{x_0} \in [1, 2^l]$, что

$$f_l^{(j_{x_0})}(x_0) \neq 0 \ , \tag{1.10}$$

при этом только одна из чисел $\check{\varphi}_{2^{l+1}+2j_{x_0}-3}(x_0)$ и $\check{\varphi}_{2^{l+1}+2j_{x_0}-2}(x_0)$ равна 0.

Носитель функции $\check{\varphi}_m(x)$ обозначим через $\check{\Delta}_m,\ m=1,2,....$ Справедлива следующая

Лемма 1.1 . *Функция $\hat{\varphi}_m(x)$ $(m=1,2,...)$ подсистемы $\{\hat{\varphi}_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ в точках множества $\hat{E}_2\cap\hat{\Delta}_m$ принемает значения из $[\frac{2}{3},\frac{5}{6}]$, а функция $\check{\varphi}_m(x)$ подсистемы $\{\check{\varphi}_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ в точках множества $\hat{E}_2\cap\check{\Delta}_m$ - из $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, m=1,2,... .*

Доказательство. Рассмотрим функции $\hat{\varphi}_1(x)$, $\check{\varphi}_1(x)$ и $\check{\varphi}_2(x)$ ($\hat{\Delta}_1=(0,1)$, $\check{\Delta}_1=(0,\frac{1}{2})$, $\check{\Delta}_2=(\frac{1}{2},1)$). Учитывая определение множества $\hat{E}_2$ (см. (1.6)), находим, что точка отрезка $[0,1]$, разложение которой в четвертичной системе имеет вид $0,(2)$ является наибольшим элементом множества $\hat{E}_2$ ($\hat{E}_2\cap\hat{\Delta}_1$), а точка, разложение которой в четвертичной системе имеет вид $0,(1)$ - наименьшим элементом множества $\hat{E}_2$ ($\hat{E}_2\cap\hat{\Delta}_1$). Легко подсчитать, что первой из них является точка $\frac{2}{3}$, а второй - $\frac{1}{3}$. Отсюда, учитывая определение системы Фабера-Шаудера, находим, что в точках множества $\hat{E}_2\cap\hat{\Delta}_1$ функция $\hat{\varphi}_1(x)$ принемает значения не меньшие $\frac{2}{3}$ ($\hat{\varphi}_1(\frac{2}{3})=\hat{\varphi}_1(\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$), а функции $\check{\varphi}_1(x)$ и $\check{\varphi}_2(x)$ соответственно в точках множеств $\hat{E}_2\cap\check{\Delta}_1$ и $\hat{E}_2\cap\check{\Delta}_2$ принимают значения не большие $\frac{2}{3}$ ($\check{\varphi}_1(\frac{1}{3})=\check{\varphi}_2(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$).

Далее, рассмотрим носители $\hat{\Delta}_2=(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ и $\hat{\Delta}_3=(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ функций $\hat{\varphi}_2(x)$ и $\hat{\varphi}_3(x)$. Из определения множества $\hat{E}_2$ (см. (1.6)), находим, что точка отрезка $[0,1]$, разложение которой в четвертичной системе имеет вид $0,1(2)$ является наибольшим элементом множества $\hat{E}_2\bigcap\hat{\Delta}_2$, а точка, разложение которой в четвертичной системе имеет вид $0,2(1)$ - наименьшим элементом множества $\hat{E}_2\bigcap\hat{\Delta}_3$. Легко подсчитать, что первой из них является точка $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$, а второй $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$. Таким образом, так как $\frac{1}{2}\notin\hat{E}_2$ (см. (1.6)), то интервал $(\frac{5}{12},\frac{7}{12})$ не содержит точек множества $\hat{E}_2$. Следовательно, так как $\hat{\varphi}_1(\frac{5}{12})=\hat{\varphi}_1(\frac{7}{12})=\frac{5}{6}$, а $\check{\varphi}_1(\frac{5}{12})=\check{\varphi}_2(\frac{7}{12})=\frac{1}{3}$ (см. определение системы (1.1)), то функция $\hat{\varphi}_1(x)$ в точках множества $\hat{E}_2$ ($\hat{E}_2\cap\hat{\Delta}_1$) принимает значения не большие $\frac{5}{6}$, а функции $\check{\varphi}_1(x)$ и $\check{\varphi}_2(x)$ соответственно в точках множеств $\hat{E}_2\cap\check{\Delta}_1$ и $\hat{E}_2\cap\check{\Delta}_2$ - не меньшие $\frac{1}{3}$. Таким образом, функция $\hat{\varphi}_1(x)$ в точках множества $\hat{E}_2$ ($\hat{E}_2\cap\hat{\Delta}_1$) принимает значения из $[\frac{2}{3},\frac{5}{6}]$, а функции $\check{\varphi}_1(x)$ и $\check{\varphi}_2(x)$ в точках соответствующих множеств $\hat{E}_2\cap\check{\Delta}_1$ и $\hat{E}_2\cap\check{\Delta}_2$ - из $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$.

С помощью аналогичных рассуждений, учитывая определение системы Фабера-Шаудера (свойство локальности) и определение множества $\hat{E}_2$, находим, что для любого натурального числа m функция $\hat{\varphi}_m(x)$ на множестве $\hat{E}_2 \cap \hat{\Delta}_m$ принимает значения из $[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]$, а функции $\check{\varphi}_{2m-1}(x)$ и $\check{\varphi}_{2m}(x)$ на соответствующих множествах $\hat{E}_2 \cap \check{\Delta}_{2m-1}$ и $\hat{E}_2 \cap \check{\Delta}_{2m}$ - из $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

Лемма 1.1 доказана.

Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} ... + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k} + ... = +\infty \ . \tag{1.11}$$

Переставим члены ряда (1.11) по схеме Римана (см. [38; гл. 11, §4, п. 388, Теорема Римана]) так, чтобы он сходился к конечному числу A. Члены переставленного ряда обозначим через a_l, т.е.

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l = A \ . \tag{1.12}$$

Далее, из (1.9) следует, что функция $\sum\limits_{j=1}^{2^l} f_l^{(j)}(x)$ представляет собой некий полином вида

$$Q_l(x) = \sum_{n=2^{2l}+1}^{2^{2l+2}} A_n^{(l)} \varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{2^l} f_l^{(j)}(x) \tag{1.13}$$

по системе Фабера-Шаудера.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, учитывая (1.12), можно найти натуральное число L_ε так, что для любого натурального числа $L \geq L_\varepsilon$, имеет место

$$|a_L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{и} \qquad \left| \sum_{l=L_\varepsilon}^{L} a_l \right| < \frac{\varepsilon}{2} \ . \tag{1.14}$$

По методу математической индукции докажем, что для любого натурального числа $L \geq L_\varepsilon$, имеем

$$\left\| \sum_{l=L_\varepsilon}^{L} a_l Q_l(x) \right\|_C < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Так как, для любого натурального числа l носители двух различных функций системы (1.7) одного и того же ранга l попарно не пересекаются и, следовательно,

$$||Q_l(x)||_C = 1, \ l \in \mathbb{N} \qquad \text{(см. (1.7) и (1.13))}, \tag{1.15}$$

то учитывая (1.14), имеем

$$\|a_{L_\varepsilon} Q_{L_\varepsilon}(x)\|_C < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Допустим для натурального числа $L-1 \geq L_\varepsilon$ имеет место

$$\left\| \sum_{l=L_\varepsilon}^{L-1} a_l Q_l(x) \right\|_C < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Так как носитель функции $Q_L(x)$ принадлежит множеству, на которой $\sum\limits_{l=L_\varepsilon}^{L-1} a_l Q_l(x)$ принимает значение $\sum\limits_{l=L_\varepsilon}^{L-1} a_l$ (см. (1.7) и (1.13)), то либо

$$\left\| \sum_{l=L_\varepsilon}^{L} a_l Q_l(x) \right\|_C = \left\| \sum_{l=L_\varepsilon}^{L-1} a_l Q_l(x) \right\|_C < \frac{\varepsilon}{2} \,,$$

либо

$$\left\| \sum_{l=L_\varepsilon}^{L} a_l Q_l(x) \right\|_C = \left| \sum_{l=L_\varepsilon}^{L} a_l \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(см. (1.14)). Отсюда следует, что для любых натуральных чисел $l_2 > l_1 \geq L_\varepsilon$ имеет место

$$\left\| \sum_{l=l_1}^{l_2} a_l Q_l(x) \right\|_C < \varepsilon \,,$$

откуда следует равномерная сходимость ряда

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l Q_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=2^{2l}+1}^{2^{2l+2}} a_l A_n^{(l)} \varphi_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot \left(\sum_{j=1}^{2^l} f_l^{(j)}(x) \right) \tag{1.16}$$

на отрезке $[0,1]$.

Далее, из (1.3), (1.13) и из (1.15) следует, что

$$\max_{2^{2l}+1 \leq m \leq 2^{2l+2}} \left\| \sum_{n=2^{2l}+1}^{m} A_n^{(l)} \varphi_n(x) \right\|_C = ||Q_l(x)||_C = 1 \,,$$

откуда находим, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n \varphi_n(x)$, где $A_n = a_l A_n^{(l)}$, $n \in [2^{2l}+1, 2^{2l+2}]$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, также равномерно сходится на отрезке $[0,1]$ и имеет ту же сумму, что и ряд (1.16). Положим

$$f_0(x) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=2^{2l}+1}^{2^{2l+2}} a_l A_n^{(l)} \varphi_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot \left(\sum_{j=1}^{2^l} f_l^{(j)}(x) \right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot \left(\sum_{j=1}^{2^l} \left\{ \hat{\varphi}_{2^l+j-1}(x) + \frac{\check{\varphi}_{2^{l+1}+2j-3}(x) + \check{\varphi}_{2^{l+1}+2j-2}(x)}{2} \right\} \right) \qquad (1.17)$$

(см. (1.7) и (1.9)). Очевидно функция $f_0(x)$ непрерывна на $[0,1]$.

Пусть $\{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ - такая перестановка ненулевых коэффициентов $A_n, \ n \in [2, \infty)$, что

$$|A_{\sigma(n)}| \geq |A_{\sigma(n+1)}| \,, \qquad n = 1, 2, \dots \,,$$

(очевидно $\{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ - не единственная такая перестановка), и пусть $\{\sigma_1(n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\sigma_2(n)\}_{n=1}^{\infty}$ – номера функций $\{\hat{\varphi}_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\check{\varphi}_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ в перестановленном ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \ .$$

Учитывая лемму 1.1, (1.9), (1.10) и (1.17), находим, что для каждой точки $x \in E_0$ однозначно определяются последовательности $\{\sigma_1(n_k^x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\sigma_2(n_k^x)\}_{k=1}^{\infty}$ так, что имеем

$$\lim_{m\to\infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{4k-3} \cdot \hat{\varphi}_{\sigma_1(n^x_{6k-5})}(x) +$$

$$+ \frac{1}{4k-2} \cdot \{ \check{\varphi}_{\sigma_2(n^x_{3k-2})}(x) + \beta^1_{6k-4} \cdot \hat{\varphi}_{\sigma_1(n^x_{6k-4})}(x) - \beta^1_{6k-3} \cdot \hat{\varphi}_{\sigma_1(n^x_{6k-3})}(x) \} +$$

$$+ \frac{1}{4k-1} \cdot \hat{\varphi}_{\sigma_1(n^x_{6k-2})}(x) +$$

$$+ \frac{1}{4k} \cdot \{ \beta^2_{3k-1} \cdot \check{\varphi}_{\sigma_2(n^x_{3k-1})}(x) - \beta^2_{3k} \cdot \check{\varphi}_{\sigma_2(n^x_{3k})}(x) + \beta^1_{6k-1} \cdot \hat{\varphi}_{\sigma_1(n^x_{6k-1})}(x) - \beta^1_{6k} \cdot \hat{\varphi}_{\sigma_1(n^x_{6k})}(x) \} \Big] >$$

$$> \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4k-2} \cdot \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \right\} + \frac{1}{4k-1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4k} \cdot \left\{ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \right\} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4k-2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4k} \right) = +\infty \,,$$

где $\{\beta^1_l \ , \ l \in \mathbb{N} \ , \ l \neq 3k-2 \ , \ k \in \mathbb{N}\}$ и $\{\beta^2_l \ , \ l \in \mathbb{N} \ , \ l \neq 3k-2 \ , \ k \in \mathbb{N}\}$ равняются 1 или -1 в зависимости от $\{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.3 .

Лемма 1.2 . *Пусть даны числа* $\epsilon \in (0,1),\ \delta > 0,\ N_0 > 1\ (N_0 \in \mathbb{N}),\ \gamma > 0$ *и* $B > 0$. *Тогда существуют измеримое множество* $E_\epsilon \subset [0,1]$, *полином по системе Фабера-Шаудера вида*

$$P(x) = \sum_{n=N_0}^{N} A_n \varphi_n(x) \ ,$$

перестановка $\{\sigma(n)\}_{n=N_0}^{N}$ *натуральных чисел* $N_0, ..., N$ *и натуральное число* $M \in [N_0, N]$ *такие, что*

1) $$\sum_{n=N_0}^{M} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) > B \ , \text{ для всех } x \in E_\epsilon \ ,$$

2) $$|E_\epsilon| > 1 - \epsilon \ ,$$

3) $$||P(x)||_C < \gamma \ ,$$

4) $$\delta > |A_{\sigma(n)}| > |A_{\sigma(n+1)}| > 0,\ n = N_0, ..., N-1 \ ,$$

Доказательство. Пусть $N_0 = 2^{k_0} + i_0$ $(i_0 \in [1, 2^{k_0}])$,

$$k > \log_2 \frac{4}{\epsilon} + k_0 \ , k \in \mathbb{N} \quad ; \quad q_j = \sum_{m=k}^{k+j-1} m \ ,\ j \in \mathbb{N}. \tag{1.18}$$

Для каждого натурального числа j определим множества индексов I_j^1 и I_j^2 следующим образом

$$I_j^1 = \bigcup_{n_1=1}^{2^k-2} \bigcup_{n_2=1}^{2^{k+1}-2} ... \bigcup_{n_{j-1}=1}^{2^{k+j-2}-2} \bigcup_{n=2}^{2^{k+j-1}-1} \left\{ \sum_{l=0}^{j-1} n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + n \right\},$$

$$I_j^2 = \bigcup_{n_1=1}^{2^k-2} ... \bigcup_{n_{j-1}=1}^{2^{k+j-2}-2} \left\{ \sum_{l=0}^{j-1} n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + 1 \ ; \ \sum_{l=0}^{j-1} n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + 2^{k+j-1} \right\}, \tag{1.19}$$

где $n_0 = 0$, $q_0 = 1$.

Положим

$$E_\epsilon = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i\in I_j^1} \Delta_{q_j}^{(i)} \,. \tag{1.20}$$

Учитывая (1.18) и определения множеств индексов (1.19), нетрудно видеть что

$$|E_\epsilon| = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i\in I_j^2} |\Delta_{q_j}^{(i)}| = \tag{1.21}$$

$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{2^k} - 2\cdot\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(2^k-2)(2^{k+1}-2)...(2^{k+j-2}-2)}{2^k 2^{k+1}...2^{k+j-1}} > 1-\epsilon.$$

Далее, рассмотрим систему непрерывных на $[0,1]$ функций

$$\{\psi_{n_1,...,n_j}^{(j)}(x)\ ;\ n_m\in[1,2^{k+m-1}-2],\ m=1,2,...,j\}_{j=1}^{\infty}\ ,$$

в которой

$$\psi_{n_1,...,n_j}^{(j)}(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x\notin\Delta_{q_j}^{(i)}\ ,\ i=\sum_{l=0}^{j} n_l\cdot 2^{q_j-q_l}+1\ , \\ \\ 1, \text{ при } x\in\bigcup_{i=n_1\cdot 2^{q_{j+1}-k}+...+n_j\cdot 2^{k+j}+2}^{n_1\cdot 2^{q_{j+1}-k}+...+(n_j+1)\cdot 2^{k+j}-1}\ \bar{\Delta}_{q_{j+1}}^{(i)}\ , \\ \\ \text{линейна на каждом }\ \Delta_{q_{j+1}}^{(i)}\ , \\ i=\sum_{l=0}^{j} n_l\cdot 2^{q_{j+1}-q_l}+1\ ,\ \sum_{l=0}^{j} n_l\cdot 2^{q_{j+1}-q_l}+2^{k+j}\ , \end{cases} \tag{1.22}$$

где $\bar{\Delta}_{q_{j+1}}^{(i)} = \left[\frac{i-1}{2^{q_{j+1}}},\frac{i}{2^{q_{j+1}}}\right]$ (т.е. $\mathcal{S}_{\psi_{n_1,...,n_j}^{(j)}} = \Delta_{q_j}^{(i)},\ i=\sum_{l=0}^{j} n_l\cdot 2^{q_j-q_l}+1$ и $||\psi_{n_1,...,n_j}^{(j)}(x)||_C =$ $= 1$). Имея ввиду определения множества E_ϵ (см. (1.20)) и функций (1.22) и учитывая (1.2), нетрудно видеть, что для любых натуральных чисел j и $n_m\in[1,2^{k+m-1}-2]$, $m=1,2,...,j$ имеем

$$\psi_{n_1,...,n_j}^{(j)}(x)=1\ ,\ \forall x\in\mathcal{S}_{\psi_{n_1,...,n_j}^{(j)}}\cap E_\epsilon \tag{1.23}$$

и

$$\psi_{n_1,...,n_j}^{(j)}(x) = \varphi_{q_j}^{(i)}(x) + \frac{1}{2}\left\{\sum_{p=1}^{k+j-1}\varphi_{q_j+p}^{(2t_p-1)}(x) + \sum_{p=1}^{k+j-1}\varphi_{q_j+p}^{(2h_p)}(x)\right\}\ , \tag{1.24}$$

где $t_1 = h_1 = i = \sum_{l=0}^{j} n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + 1$; $t_{p+1} = 2t_p - 1$, $h_{p+1} = 2h_p$.

Положим $\hat{\varphi}_j^i(x) = \varphi_{q_j}^{(i)}(x)$, $i = \sum_{l=0}^{j} n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + 1$, $n_m \in [1, 2^{k+m-1} - 2], m = 1, 2, ..., j;$ $q_j = \sum_{m=k}^{k+j-1} m$, $j = 1, 2, \ldots$.

Из (1.20), (1.22) и из (1.24) следует, что для любого натурального числа j и для каждой точки $x_0 \in E_\epsilon$ есть только одна функция $\hat{\varphi}_j^{i_{x_0}}(x)$, $i_{x_0} \in I_j^1$, что

$$\hat{\varphi}_j^{i_{x_0}}(x_0) \neq 0 . \tag{1.25}$$

Возьмем натуральные числа K и L так, чтобы

$$\frac{1}{K} < \bar{\delta} = \frac{1}{2}\min\{\gamma, \delta\} \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{K}\left(\sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2l-1} - \sum_{l=L}^{2L-1} \frac{1}{2l}\right) > B + \bar{\delta} \tag{1.26}$$

и рассмотрим ряд

$$\frac{1}{K} + \frac{1}{2K} - \frac{1}{2K} + ... + \frac{1}{(2m-1)K} + \frac{1}{(2m)K} - \frac{1}{(2m)K} + ... = +\infty . \tag{1.27}$$

Переставим члены ряда (1.27) по схеме Римана (см. [38; гл. 11, §4, п. 388, Теорема Римана]) так, чтобы он сходился к 0. Члены переставленного ряда обозначим через C_j, $j = 1, 2, ...,$ т.е.

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j = 0 . \tag{1.28}$$

Пусть J - то натуральное число, для которой

$$C_J = \frac{1}{(4L-2)K} . \tag{1.29}$$

Из схемы Римана следует, что множество $\{C_j\}_{j=1}^{J}$ содержит все числа $\{\frac{1}{mK}\}_{m=1}^{4L-2}$ и $\{-\frac{1}{2mK}\}_{m=1}^{2L-1}$.

Рассмотрим функцию

$$Q_J(x) = \sum_{j=1}^{J} C_j \cdot \left(\sum_{n_1=1}^{2^k-2} \sum_{n_2=1}^{2^{k+1}-2} ... \sum_{n_j=1}^{2^{k+j-1}-2} \psi_{n_1,...,n_j}^{(j)}(x)\right) . \tag{1.30}$$

Учитывая (1.18), (1.24), (1.26) и (1.27), находим, что $Q_J(x)$ представляет собой некий полином $S_N(x)$ по системе Фабера-Шаудера вида

$$Q_J(x) = S_N(x) = \sum_{n=N_0}^{N} \bar{A}_n \varphi_n(x) \text{ , где } 0 \leq |\bar{A}_n| < \frac{\delta}{2} \text{ , } n = N_0, ..., N . \tag{1.31}$$

Из определения функций (1.22), нетрудно видеть, что для любого натурального числа $j \in [2, J]$ носитель функции $\sum_{n_1=1}^{2^k-2} \sum_{n_2=1}^{2^{k+1}-2} \dots \sum_{n_j=1}^{2^{k+j-1}-2} \psi^{(j)}_{n_1,\dots,n_j}(x)$ принадлежит множеству, на которой функция $Q_{j-1}(x)$ принимает значение $\sum_{l=1}^{j-1} C_l$ и

$$\left\| \sum_{n_1=1}^{2^k-2} \sum_{n_2=1}^{2^{k+1}-2} \dots \sum_{n_j=1}^{2^{k+j-1}-2} \psi^{(j)}_{n_1,\dots,n_j}(x) \right\|_C = 1 .$$

Отсюда, учитывая (1.26), (1.30) и схему построения ряда (1.28), находим

$$||Q_J(x)||_C = ||S_N(x)||_C = C_1 = \frac{1}{K} < \frac{\gamma}{2} . \tag{1.32}$$

Пусть $\{\sigma(n)\}_{n=N_0}^{N}$ - такая перестановка натуральных чисел $N_0, ..., N$, что $|\bar{A}_{\sigma(n)}| \geq \geq |\bar{A}_{\sigma(n+1)}|$, $n = N_0, ..., N-1$, и M есть то натуральное число для которой

$$|\bar{A}_{\sigma(M)}| = \frac{1}{(4L-2)K} , \qquad |\bar{A}_{\sigma(M+1)}| < \frac{1}{(4L-2)K} . \tag{1.33}$$

Докажем неравенство

$$\sum_{n=N_0}^{M} \bar{A}_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) > B + \bar{\delta} , \ \forall x \in E_\epsilon .$$

Для этого через $\{\tilde{\sigma}(j)\}_{j=1}^{J}$ обозначим такую перестановку натуральных чисел $1, ..., J$, что $|C_{\tilde{\sigma}(j)}| \geq |C_{\tilde{\sigma}(j+1)}|$, $j = 1, ..., J-1$ (очевидно $\{\tilde{\sigma}(j)\}_{j=1}^{J}$ - не единственная такая перестановка). Учитывая (1.24), (1.25), (1.27)-(1.31) и (1.33) нетрудно заметить, что для каждой точки $x \in E_\epsilon$

$$\sum_{n=N_0}^{M} \bar{A}_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) =$$

$$= \frac{1}{K} \sum_{l=1}^{L-1} \left\{ \frac{\psi^{(\tilde{\sigma}(3l-2))}_{n_1(x),\dots,n_{\tilde{\sigma}(3l-2)}(x)}(x)}{2l-1} + \lambda^{2l}_{\tilde{\sigma}} \cdot \frac{\psi^{(\tilde{\sigma}(3l-1))}_{n_1(x),\dots,n_{\tilde{\sigma}(3l-1)}(x)}(x)}{2l} - \lambda^{2l}_{\tilde{\sigma}} \cdot \frac{\psi^{(\tilde{\sigma}(3l))}_{n_1(x),\dots,n_{\tilde{\sigma}(3l)}(x)}(x)}{2l} \right\} +$$

$$+ \frac{\psi^{(\tilde{\sigma}(3L-2))}_{n_1(x),\dots,n_{\tilde{\sigma}(3L-2)}(x)}(x)}{(2L-1)K} +$$

$$+ \frac{1}{K} \sum_{l=L}^{2L-2} \left(\lambda^{2l}_{\tilde{\sigma}} \cdot \frac{\hat{\varphi}^{i_x}_{\tilde{\sigma}(3l-1)}(x)}{2l} - \lambda^{2l}_{\tilde{\sigma}} \cdot \frac{\hat{\varphi}^{i_x}_{\tilde{\sigma}(3l)}(x)}{2l} + \frac{\hat{\varphi}^{i_x}_{\tilde{\sigma}(3l+1)}(x)}{2l+1} \right) +$$

$$+ \frac{1}{K} \left(\lambda^{4L-2}_{\tilde{\sigma}} \cdot \frac{\hat{\varphi}^{i_x}_{\tilde{\sigma}(6L-4)}(x)}{4L-2} - \lambda^{4L-2}_{\tilde{\sigma}} \cdot \frac{\hat{\varphi}^{i_x}_{\tilde{\sigma}(6L-3)}(x)}{4L-2} \right) ,$$

где $\lambda_{\tilde{\sigma}}^{2l}$ $(l=1,...,2L-1)$ равняется 1 или -1 в зависимости от $\{\tilde{\sigma}(j)\}_{j=1}^{J}$, и для любого натурального числа $j\in[\tilde{\sigma}(1),\tilde{\sigma}(3L-2)]$ числа $n_m(x)\in[1,2^{k+m-1}-2]$, $m=1,2,...,j$ однозначно определяются по $x\in E_\epsilon$ (сумма $\sum\limits_{n=N_0}^{M}\bar{A}_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)$ содержит все слагаемые $3L-2$ функций системы (1.22) (см. (1.24))). Отсюда, имея в виду (1.23), (1.26) и определение системы Фабера-Шаудера, находим

$$\sum_{n=N_0}^{M}\bar{A}_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)>\frac{1}{K}\left(\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{2l-1}-\sum_{l=L}^{2L-1}\frac{1}{2l}\right)>B+\bar{\delta}\ ,\ \forall x\in E_\epsilon\ . \tag{1.34}$$

Положим

$$A_{\sigma(n)}=\bar{A}_{\sigma(n)}+\frac{\bar{\delta}}{2^n}\ ,\ \text{при}\ \bar{A}_{\sigma(n)}\geq 0\ ,\ n\in[N_0,N]\ ,$$

$$A_{\sigma(n)}=\bar{A}_{\sigma(n)}-\frac{\bar{\delta}}{2^n}\ ,\ \text{при}\ \bar{A}_{\sigma(n)}<0\ ,\ n\in[N_0,N]\ ,$$

$$P(x)=\sum_{n=N_0}^{N}A_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)=\sum_{n=N_0}^{N}A_n\varphi_n(x)\ .$$

Отсюда, учитывая (1.21), (1.26), (1.31), (1.32) и (1.34) получим

$$||P(x)||_C<\gamma\ ,$$

$$\sum_{n=N_0}^{M}A_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)>B\ ,\ \text{для всех}\ x\in E_\epsilon\ \ (|E_\epsilon|>1-\epsilon)\ ,$$

$$\delta>|A_{\sigma(n)}|>|A_{\sigma(n+1)}|>0,\ n=N_0,...,N-1\ .$$

Лемма 1.2 доказана.

Применим лемму 1.2, полагая в ее формулировке $\epsilon=\frac{1}{4}$, $\delta=1$, $N_0=N_1+1=2$, $\gamma=\frac{1}{2}$, $B=1$. Тогда определяются измеримое множество $E_1\subset[0,1]$, полином вида

$$P_1(x)=\sum_{n=2}^{N_2}A_n^{(1)}\varphi_n(x)\ ,$$

перестановка $\{\sigma_1(n)\}_{n=2}^{N_2}$ натуральных чисел 2 , ..., N_2 и натуральное число $M_1\in[2,N_2]$, удовлетворяющие условиям:

$$|E_1|>1-\frac{1}{4}\ ,$$

$$||P_1(x)||_C<\frac{1}{2}\ ,$$

$$1 > |A^{(1)}_{\sigma_1(n)}| > |A^{(1)}_{\sigma_1(n+1)}| > 0,\ n = 2, ..., N_2 - 1\ ,$$

$$\sum_{n=2}^{M_1} A^{(1)}_{\sigma_1(n)} \varphi_{\sigma_1(n)}(x) > 1\ ,\ \forall x \in E_1\ .$$

Из (1.3) следует, что

$$\max_{2 \le m \le N_2} \left\| \sum_{n=2}^{m} A^{(1)}_n \varphi_n(x) \right\|_C = ||P_1(x)||_C\ .$$

Снова применим лемму 1.2, полагая в ее формулировке $\epsilon = \frac{1}{8}$, $\delta = |A^{(1)}_{\sigma_1(N_2)}|$, $N_0 = N_2 + 1$, $\gamma = \frac{1}{4}$, $B = 2$. Тогда определяются измеримое множество $E_2 \subset [0, 1]$, полином вида

$$P_2(x) = \sum_{n=N_2+1}^{N_3} A^{(2)}_n \varphi_n(x)\ ,$$

перестановка $\{\sigma_2(n)\}_{n=N_2+1}^{N_3}$ натуральных чисел $N_2 + 1, ..., N_3$ и натуральное число $M_2 \in [N_2 + 1, N_3]$, удовлетворяющие условиям:

$$|E_2| > 1 - \frac{1}{8}\ ,$$

$$||P_2(x)||_C < \frac{1}{4}\ ,$$

$$|A^{(1)}_{\sigma_1(N_2)}| > |A^{(2)}_{\sigma_2(n)}| > |A^{(2)}_{\sigma_2(n+1)}| > 0,\ n = N_2 + 1, ..., N_3 - 1\ ,$$

$$\sum_{n=N_2+1}^{M_2} A^{(2)}_{\sigma_2(n)} \varphi_{\sigma_2(n)}(x) > 2\ ,\ \forall x \in E_2\ .$$

Из (1.3) следует, что

$$\max_{N_2+1 \le m \le N_3} \left\| \sum_{n=N_2+1}^{m} A^{(2)}_n \varphi_n(x) \right\|_C = ||P_2(x)||_C\ .$$

Продолжая эти рассуждения, мы можем, по индукции, определить измеримые множества $E_k \subset [0, 1],\ k \in \mathbb{N}$, полиномы $\{P_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ вида

$$P_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} A^{(k)}_n \varphi_n(x)\ ,\ k \in \mathbb{N}\ , \tag{1.35}$$

перестановки $\{\sigma_k(n)\}_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}$ натуральных чисел $N_k + 1, ..., N_{k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) и натуральные числа $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющие условиям:

$$|E_k| > 1 - 2^{-k-1}\ , \tag{1.36}$$

$$||P_k(x)||_C < 2^{-k} , \tag{1.37}$$

$$|A^{(k-1)}_{\sigma_{k-1}(N_k)}| > |A^{(k)}_{\sigma_k(n)}| > |A^{(k)}_{\sigma_k(n+1)}| > 0,\ n = N_k + 1, ..., N_{k+1} - 1 , \tag{1.38}$$

$$\sum_{n=N_k+1}^{M_k} A^{(k)}_{\sigma_k(n)} \varphi_{\sigma_k(n)}(x) > k\ ,\ \forall x \in E_k\ , \tag{1.39}$$

где $A^{(0)}_{\sigma_0(N_1)} = 1$.

Учитывая (1.3) и (1.35), находим, что

$$\max_{N_k+1 \le m \le N_{k+1}} \left\| \sum_{n=N_k+1}^{m} A^{(k)}_n \varphi_n(x) \right\|_C = ||P_k(x)||_C\ . \tag{1.40}$$

Из (1.37) и (1.40) следует, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} A_n \varphi_n(x)$, где $A_n = A^{(k)}_n\ ,\ n \in (N_k, N_{k+1}]$, сходится равномерно.

Положим

$$f_0(x) := \sum_{n=2}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} A^{(k)}_n \varphi_n(x) = \tag{1.41}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} A^{(k)}_{\sigma_k(n)} \varphi_{\sigma_k(n)}(x)\ ,$$

$$\sigma(n) = \sigma_k(n)\ ,\ n \in (N_k, N_{k+1}]\ , \tag{1.42}$$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k\ . \tag{1.43}$$

Учитывая (1.36) и (1.43), нетрудно видеть, что

$$|E| = 1$$

и что для каждой точки $x \in E$ можно найти натуральное число k_x такое, что для любого натурального числа $k \ge k_x$ имеем $x \in E_k$. Следовательно, имея ввиду (1.39) и (1.42), для любого натурального $k \ge k_x$ имеем

$$\sum_{n=N_k+1}^{M_k} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) > k\ .$$

Отсюда, из (1.37), (1.38), (1.41) и из (1.42) находим, что для каждого $k \ge k_x$

$$G_{M_{k+1}}(x, f_0, \Phi, \sigma) = \sum_{n=2}^{M_{k+1}} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) = \sum_{n=N_{k+1}+1}^{M_{k+1}} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) +$$

$$+\sum_{l=1}^{k}\sum_{n=N_l+1}^{N_{l+1}} A_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x) \geq \sum_{n=N_{k+1}+1}^{M_{k+1}} A_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x) - \left\|\sum_{l=1}^{k} P_l(x)\right\|_C > k\ .$$

С другой стороны, имея ввиду (1.41) и (1.42), находим, что

$$G_{N_{k+1}}(x, f_0, \Phi, \sigma) = \sum_{n=2}^{N_{k+1}} A_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x) = \sum_{l=1}^{k} P_l(x)$$

равномерно на отрезке $[0,1]$ сходится к $f_0(x)$.

Теорема 1.3 доказана.

Доказательство теоремы 1.4 . Рассмотрим подсистему

$$\{\varphi_{n_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}, \tag{1.44}$$

в которой $\varphi_{n_1}(x) = \varphi_2(x) = \varphi_{2^0+1}(x)$ (носителем Δ_{n_1} является интервал $(0,1)$, $x_{n_1} = \frac{1}{2}$) , $\varphi_{n_2}(x) = \varphi_3(x) = \varphi_{2^1+1}(x)$ (носителем Δ_{n_2} является левая половина интервала Δ_{n_1} , $x_{n_2} = \frac{1}{4}$) , $\varphi_{n_3}(x) = \varphi_6(x) = \varphi_{2^2+2}(x)$ (носителем Δ_{n_3} является правая половина интервала Δ_{n_2} , $x_{n_3} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}$), и т.д.. Носителем функции $\varphi_{n_{2m+1}}(x)$ является правая половина интервала $\Delta_{n_{2m}}$ $\left(x_{n_{2m+1}} = \frac{x_{n_{2m-1}}+x_{n_{2m}}}{2}\right)$, а носителем функции $\varphi_{n_{2m+2}}(x)$ является левая половина интервала $\Delta_{n_{2m+1}}$ $\left(x_{n_{2m+2}} = \frac{x_{n_{2m}}+x_{n_{2m+1}}}{2}\right)$, $m = 1, 2, \dots$.

Очевидно, что

$$\Delta_{n_{m+1}} \subset \Delta_{n_m}\ ,\ m \in \mathbb{N} \qquad \text{и} \qquad \lim_{m\to\infty} |\Delta_{n_m}| = 0\ . \tag{1.45}$$

Поскольку $x_{n_{2m}}$ и $x_{n_{2m+1}}$ являются соответственно левым и правым концом интервала $\Delta_{n_{2m+2}}$, то из (1.45) следует, что

$$\exists \lim_{m\to\infty} x_{n_m} \equiv x_0\ ,$$

$$\lim_{m\to\infty} x_{n_{2m}} = x_0 - 0\ ,\ \lim_{m\to\infty} x_{n_{2m+1}} = x_0 + 0\ , \tag{1.46}$$

$$x_0 \in \Delta_{n_m}\ ,\ m = 1, 2, \dots\ .$$

Утверждение. *Все функции подсистемы (1.44) имеют одно и то же значение $\frac{2}{3}$ в точке x_0 (см. (1.46)), т.е.*

$$\varphi_{n_m}(x_0) = \frac{2}{3}\ ,\ m = 1, 2, \dots\ .$$

Доказательство. Из построения подсистемы (1.44) следует, что носители функций $\{\varphi_{n_{2k}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ точками $\{x_{n_m}\}_{m=2k}^{\infty}$ претерпевают одни и те же дробления, а так же носители функций $\{\varphi_{n_{2k-1}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - точками $\{x_{n_m}\}_{m=2k-1}^{\infty}$. Следовательно, точка $x_0 = \lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m}$ делит носитель функции $\varphi_{n_{2k-1}}(x)$ (k=1,2,...) на части, отношение которых одинаково для всех значений k. Ситуация та же и для функций $\{\varphi_{n_{2k}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Не трудно расчетать, что это отношение для функций $\{\varphi_{n_{2k-1}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ будет $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$, а для функций $\{\varphi_{n_{2k}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$

Отсюда и из определения системы Фабера - Шаудера следует, что

$$x_0 = \frac{1}{3}\ ;\ \ \varphi_{n_m}(x_0) = \frac{2}{3}\ ,\ m = 1, 2, \dots\ .$$

Утверждение доказано.

Предложение. *Можно прямым расчетом проверить, что в точке $\frac{1}{3}$ функции $\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), \varphi_{n_3}(x)$ принимают одно и то же значение $\frac{2}{3}$, а потом, учитывая свойство локальности системы Фабера-Шаудера, заключить, что все функции подсистемы (1.44) в точке $\frac{1}{3}$ принимают значение $\frac{2}{3}$.*

Далее, ряд $\sum_{k=2}^{\infty} |\varphi_{n_m}(x) - \varphi_{n_{m-1}}(x)|$ сходится в каждой точке $x \in [0,1]$, так как в точке $\frac{1}{3}$ ее сумма равно 0, а в точках $x \in [0,1]$ он представляет собой конечные суммы. Положим

$$L_j(x) = \sum_{m=j+1}^{\infty} |\varphi_{n_m}(x) - \varphi_{n_{m-1}}(x)|\ ,\ j = 1, 2, \dots\ .$$

Докажем, что

$$L_1(x) < 3\ ,\ \forall x \in [0,1]\ .$$

Учитывая определение системы Фабера - Шаудера и подсистемы (1.44), заметим, что для любого натурального числа $j \geq 1$

$$L_j(x)-L_{j+1}(x)=|\varphi_{n_{j+1}}(x)-\varphi_{n_j}(x)|=\begin{cases}0,\ \text{при } x\in([0,1]\setminus\Delta_{n_j})\cup\{\frac{1}{3}\},\\ 1,\ \text{при } \ x=x_{n_j},\\ \frac{1}{2},\ \text{при } x=x_{n_{j+1}},\\ \quad \text{линейна и непрерывна между}\\ \quad \text{всеми соседними точками из}\\ \quad \{x_{n_k}\}_{k=j-2}^{j+1}\cup\{\frac{1}{3}\}.\end{cases} \tag{1.47}$$

Итак, $L_j(x)-L_{j+1}(x)$ равна нулю на $[0,1]\setminus\Delta_{n_j}$, а на Δ_{n_j} представляет собой ломаную, абсциссы вершин которой являются x_{n_j} , $x_{n_{j+1}}$, $\frac{1}{3}$ (под $x_{n_{(-1)}}$ и x_{n_0} подразумеваем концы интервала Δ_{n_1}, т.е. $x_{n_{(-1)}}=0$, $x_{n_0}=1$).

Учитывая (1.47) и определение подсистемы (1.44), с помощью расчетов нетрудно получить, что $L_1(x)-L_3(x)=\sum_{j=1}^{2}L_j(x)-L_{j+1}(x)$ равна нулю, при $x=\frac{1}{3}$; 1, при $x=x_{n_1}$; $\frac{1}{2}+1$, при $x=x_{n_2}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, при $x=x_{n_3}$; линейна и непрерывна между всеми соседними точками из $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{3}\cup\{\frac{1}{3}\}$ (т.е. представляет собой ломаную с абсциссами вершин $x_{n_1},x_{n_2},x_{n_3},\frac{1}{3}$) и вообще, для любого $i\geq 1$ натурального числа, $L_1(x)-L_{1+i}(x)=\sum_{j=1}^{i}L_j(x)-L_{j+1}(x)$ равна нулю, при $x=\frac{1}{3}$; 1, при $x=x_{n_1}$; $\frac{1}{2}+1$, при $x=x_{n_2}$; ... ; $\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{2^{k-1}}$, при $x=x_{n_i}$; $\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{2^k}$, при $x=x_{n_{1+i}}$; линейна и непрерывна между всеми соседними точками из $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{1+i}\cup\{\frac{1}{3}\}$, т.е. представляет собой ломаную с абсциссами вершин $x_{n_1},x_{n_2},\ \dots\ ,x_{n_{1+i}},\frac{1}{3}$ (число вершин этой ломаной на единицу больше числа вершин ломаной, которую представляет собой $L_1(x)-L_i(x)$).

Из вышесказанного следует, что $L_1(x)=\sum_{j=1}^{\infty}L_j(x)-L_{j+1}(x)$ равна нулю, при $x=\frac{1}{3}$; 1, при $x=x_{n_1}$; $\frac{1}{2}+1$, при $x=x_{n_2}$; ... ; $\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{2^{k-1}}$, при $x=x_{n_i}$; ... ; линейна и непрерывна между всеми соседними точками из $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\cup\{\frac{1}{3}\}$, т.е. представляет собой «ломаную» с абсциссами вершин $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\cup\{\frac{1}{3}\}$. Следовательно, так как $L_1(\frac{1}{3})=0$ и $L_1(x_{n_i})<3$, $\forall i=$

$1, 2, ...$, то

$$L_1(x) < 3 \ , \ \forall x \in [0,1] \ . \tag{1.48}$$

Далее, пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + ... = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1} \right) > 0 \tag{1.49}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + ... = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{4m+1} \right) < 0 \ . \tag{1.50}$$

Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k} \varphi_{n_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) \ , \tag{1.51}$$

где $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть подсистема (1.44), $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ - члены ряда (1.50), и

$$A_n = \begin{cases} A_{n_k}, \ \text{при } n = n_k \ , \\ 0, \ \text{при } n \neq n_k \ , \ k \in \mathbb{N} \ . \end{cases}$$

Ясно, что ряд (1.51) сходится в каждой точке $x \in [0,1]$, поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k} \varphi_{n_k}(1/3) = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k} < 0$$

(см.(1.50)), а в точках $x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{3}\}$ он представляет собой конечные суммы (см. определение подсистемы (1.44)).

Положим

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k} \varphi_{n_k}(x) \ .$$

Докажем, что ряд (1.51) сходится к $f_0(x)$ равномерно.

Для этого положим

$$r_j = \sum_{k=j}^{\infty} A_{n_k} \quad , \quad R_j(x) = \sum_{k=j}^{\infty} A_{n_k} \varphi_{n_k}(x) \ .$$

Поскольку ряд (1.50) сходится, то для любого $\varepsilon > 0$, можно найти такое $j_0 \in \mathbb{N}$, чтобы при $j \geq j_0$ было

$$|r_j| < \frac{\varepsilon}{4} \ . \tag{1.52}$$

Так, как $A_{n_k} = r_k - r_{k+1}$, то

$$R_j(x) = \sum_{k=j}^{\infty} (r_k - r_{k+1}) \varphi_{n_k}(x) \ ,$$

откуда

$$R_j(x) = r_j \varphi_{n_j}(x) + \sum_{k=j+1}^{\infty} r_k \{\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)\} \ .$$

Из этого и из того, что $\|\varphi_n(x)\|_{C_{[0,1]}} = 1$, $n = 0, 1, \dots$, имеем

$$|R_j(x)| \leq |r_j| + \sum_{k=j+1}^{\infty} |r_k| \cdot |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)| \ ,$$

откуда, в силу (1.48) и (1.52), получим

$$|R_j(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \{1 + L_j(x)\} < \varepsilon \ .$$

Итак, ряд (1.51) является разложением функции $f_0(x) \in C_{[0,1]}$ по системе Фабера-Шаудера. Нетрудно видеть, что коэффициенты $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условию

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right) \text{ при } n \to \infty \ .$$

Из (1.49), (1.50) и (1.51) следует, что для любой $\sigma \in D(f_0, \Phi)$

$$\lim_{m \to \infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, 1/3) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k > 0 \ .$$

Теорема 1.4 доказана.

Глава 2

Жадный алгоритм и подсистемы системы Фабера-Шаудера.

В этом параграфе изучается сходимость жадного алгоритма в подпространствах $C_{[0,1]}$ порожденные подсистемами системы Фабера-Шаудера и демократичность подсистем системы Фабера-Шаудера.

Пусть $S = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, а $\Lambda(n)$ - число элементов S меньше n. Положим

$$\rho(S) = \lim_{m\to\infty} \sup \lim_{n\to\infty} \sup \frac{\Lambda(n+m) - \Lambda(n)}{m}.$$

$\rho(S)$ называется плотностью множества S.

Пусть $\Phi_{S'} = \{\varphi_{n'_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такая подсистема системы Фабера-Шаудера, что носители функций $\varphi_{n'_k}(x),\ k = 1, 2, ...$, попарно не пересекаются (например $\Phi_{S'} == \{\varphi_{2^k+2}(x)\}_{k=1}^{\infty}$). Очевидно, что $\Phi_{S'}$ является безусловным, следовательно, и квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки и $\rho(S') = 0$.

Справедлива следующая

Теорема 2.1 . *Существует подсистема системы Фабера-Шаудера с плотностью нуль, которая не является квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки.*

Далее, для каждого $x \in [0, 1]$ через E_x обозначим множество, элементы которого являются числа, выражающие количества поочередных повторений 0 и 1 в двоичном разложении числа x (будем считать, что повторениям в одинаковое число раз в E_x соответствует один элемент, ∞ будем считать одним числом). Например, для

$$x^{(2)} = 0,00001110011110(1)\ ,$$

будет $E_x = \{4,3,2,1,\infty\}$.

Определим классы подсистем $\Phi_{(1)}$, $\Phi_{(2)}$ и $\Phi_{(3)}$ системы Фабера-Шаудера следующим образом: через $\Phi_{(1)}$ обозначим множество тех подсистем $\Phi_R = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} == \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которых

$$mes\bar{\Delta}_k = \frac{1}{2^{k-1}}\ ,\ \bar{\Delta}_{k+1} \subset \bar{\Delta}_k\ ,$$

через $\Phi_{(2)}$ обозначим множество тех подсистем $\Phi_{R'} = \{\varphi_{n_{k_i}}(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, для которых $\bar{\Delta}_{k_{i+1}} \subset \bar{\Delta}_{k_i}$, $i = 1,2,...$, и наконец через $\Phi_{(3)}$ обозначим множество тех подсистем $\Phi_{R'} = \{\varphi_{n_{k_i}}(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(2)}$, для которых $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} \in Q_{[0,1]}$, где $Q_{[0,1]}$ есть совокупность рациональных чисел отрезка $[0,1]$, а $\bar{\Delta}'_{k_i}$ - замыкание $\bar{\Delta}_{k_i}$. Ясно, что $\Phi_{(1)} \subset \Phi_{(2)}$ и что системы класса $\Phi_{(2)}$ являются подсистемами систем класса $\Phi_{(1)}$, или совпадают с ними.

Теорема 2.1 следует из боле обшей теоремы:

Теорема 2.2 . *Для того, чтобы подсистема $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(1)} \cup \Phi_{(3)}$ являлась квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки, необходимо и достаточно, чтобы*

$$x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} \in \hat{E}_1\ \ (\text{см. теорему 1.2})\ .$$

Верны также следующие теоремы:

Теорема 2.3 . *Для того, чтобы подсистема $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi_{(1)}$ являлась демократичной системой в $C_{[0,1]}$, необходимо и достаточно, чтобы число элементов множества E_{x_0} ($x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_k$) было конечно.*

Теорема 2.4 . *Для того, чтобы подсистема $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(2)}$ являлась демократичной системой в $C_{[0,1]}$, достаточно, чтобы число элементов множества E_{x_0} ($x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i}$) было конечно.*

2.1 Доказательства теорем

Начнем с теоремы 2.3 .

Доказательство теоремы 2.3 .

Необходимость. Пусть $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi_{(1)}$, $x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_k = \lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k$, число элементов E_{x_0} - счетное (число x_0 иррационально), и в двоичной системе x_0 имеет вид

$$x_0^{(2)} = 0, \alpha_1\, \alpha_2\, ... \, . \tag{2.3}$$

Из множества E_{x_0} выделим такую возрастающую последовательность $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$, что для любого натурального числа i в (2.3) поочередное повторение 0 или 1 в γ_{i+1} раз лежало правее повторения в γ_i раз (возможность такого выделения очевидно), т.е. (2.3) представима в виде

$$x_0^{(2)} = 0, \alpha_1 ... \alpha_{k_1} \alpha_{k_1+1} ... \alpha_{k_1+\gamma_1} \alpha_{k_1+\gamma_1+1} ... \alpha_{k_2} \alpha_{k_2+1} ... \alpha_{k_2+\gamma_2} ... \, ;$$

$$k_1 \geq 0 \, ; \; k_{i+1} \geq k_i + \gamma_i \, ; \; \gamma_{i+1} > \gamma_i \, ;$$

$$\alpha_{k_i} \neq \alpha_{k_i+1} = \alpha_{k_i+2} = ... = \alpha_{k_i+\gamma_i} \neq \alpha_{k_i+\gamma_i+1} \, ; \; i = 1, 2, ... \, . \tag{2.4}$$

Рассмотрим следующие две подсистемы системы Φ_R:

$$\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i+1}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(2)} \;\; (\bar{x}_{k_i+1}^{(2)} = 0, \alpha_1 ... \alpha_{k_i}\, 1\, (0)\, ; i = 1, 2, ...) \, ,$$

и

$$\Phi_{R''} = \{\bar{\varphi}_{k_i+\gamma_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi_{(2)} \;\; (\bar{x}_{k_i+\gamma_i}^{(2)} = 0, \alpha_1 ... \alpha_{k_i+\gamma_i-1}\, 1\, (0)\, ; i = 1, 2, ...) \, .$$

Учитывая определения системы Фабера-Шаудера и класса $\Phi_{(1)}$, находим, что $\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\varphi}_{k_i+1}(x)$ равна нулю при $x \in [0,1] \setminus \bar{\Delta}_{k_1+1}$ и представляет собой «ломаную» с абсциссами вершин $\{\bar{x}_{k_i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ при $x \in \bar{\Delta}_{k_1+1}$, при этом функция $\bar{\varphi}_{k_i+1}(x)$, $i = 1, 2, ...$ на $\bar{\Delta}_{k_j+1}$, $j = i+1, i+2, ...$ принимает значения, меньшие чем $\frac{1}{2^{\gamma_i - 1}}$, так что для любого натурального числа l, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\varphi}_{k_i+1}(\bar{x}_{k_l+1}) \leq \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{2^{\gamma_i - 1}} \, ,$$

где $\gamma_0 = 1$ (знак равенства имеет место только при $l = 1$). Отсюда и из (2.4) следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\varphi}_{k_i+1}(x) < 3 \ , \ \forall x \in [0,1] \ .$$

Следовательно (учитывая $||\varphi_n(x)||_c = 1 \ , \ n = 0, 1, ...$), для любого m-элементного множества индексов P $(m = 1, 2, ...)$ имеем

$$1 < || \sum_{i \in P} \bar{\varphi}_{k_i+1}(x)||_c < 3 \ , \tag{2.5}$$

что равносильно демократичности подсистемы $\Phi_{R'} \in \Phi_2$.

Далее, учитывая определение системы Шаудера и класса $\Phi_{(1)}$, находим

$$\bar{\varphi}_{k_i+\gamma_i}(x_0) > \frac{1}{2} \ , \ \forall i = 1, 2, ... \ .$$

Из этого и из $||\varphi_n(x)||_c = 1 \ , \ n = 0, 1, ...$ следует, что для любого m-элементного множества индексов Q $(m = 1, 2, ...)$ имеет место

$$\frac{m}{2} < || \sum_{i \in Q} \bar{\varphi}_{k_i+\gamma_i}(x)||_c < m \ , \tag{2.6}$$

что эквивалентно демократичности подсистемы $\Phi_{R''} \in \Phi_2$. Из (2.5) и (2.6) следует, что подсистема $\Phi_{R'} \cup \Phi_{R''}$, следовательно, и $\Phi_R \supset (\Phi_{R'} \cup \Phi_{R''})$, не является демократичной системой в $C_{[0,1]}$. Необходимость теоремы 2.3 доказана.

Из доказанного, в частности, следует недемократичность системы Фабера-Шаудера.

Достаточность. Пусть $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi_{(1)} \ , \ x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_k = \lim_{k \to \infty} \bar{x}_k$ и число элементов E_{x_0} конечно. Сначала рассмотрим случай, когда в E_{x_0} входит число ∞, т.е. $x_0 \in \hat{E}_1$. Пусть в двоичной системе x_0 имеет вид

$$x_0^{(2)} = 0, \alpha_1 \alpha_2 ... = 0, \alpha_1 ... \alpha_{K-1} \, 0 \, (1) \ , \tag{2.7}$$

или то же самое, что

$$x_0^{(2)} = 0, \beta_1 \beta_2 ... = 0, \alpha_1 ... \alpha_{K-1} \, 1 \, (0)$$

(только числа 0 и 1 имеют единственное двоичное разложение: $0^{(2)} = 0, \ (0) \ ; \ 1^{(2)} = = 0, \ (1)$), где K некоторое натуральное число. Для носителей функций $\{\bar{\varphi}_k\}_{k=K+1}^{\infty}$, для которых $\bar{x}_k^{(2)} = 0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{k-1} \, 1 \, (0) \ ; \ k = K+1, K+2, ... \ ,$ x_0 является правым концом, а для носителей функций $\{\bar{\varphi}_l\}_{l=K+1}^{\infty}$, для которых $\bar{x}_l^{(2)} = 0, \beta_1\beta_2 ... \beta_{l-1}\, 1\, (0)$;

$l = K+1, K+2, ...$, x_0 является левым концом. Из симметричности следует, что эти подсистемы с точки зрения наших рассуждений эквивалентны. Рассмотрим подсистему $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой имеет место, например (2.7). Учитывая определения системы Фабера-Шаудера и класса $\Phi_{(1)}$, находим, что $\sum_{k=K+1}^{\infty} \bar{\varphi}_k(x)$ равна нулю при $x \in [0,1] \setminus \bar{\Delta}_{K+1}$ и представляет собой «ломаную» с абсциссами вершин $\{\bar{x}_k\}_{k=K+1}^{\infty}$ при $x \in \bar{\Delta}_{K+1}$, при этом для любого натурального числа $l \geq K+1$, имеем

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \bar{\varphi}_k(x_l) = \sum_{i=1}^{l-K} \frac{1}{2^{i-1}} \, ,$$

следовательно

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \bar{\varphi}_k(x) < 3 \, , \; \forall x \in [0,1] \, .$$

Отсюда, учитывая $||\varphi_n(x)||_c = 1$, $n = 0, 1, ...$, находим, что для любого m-элементного множества индексов P $(m = 1, 2, ...)$ имеет место

$$1 < || \sum_{k \in P} \bar{\varphi}_k(x) ||_c < K + 3 \, ,$$

что равносильно демократичности подсистемы $\Phi_R \in \Phi_{(1)}$.

Теперь рассмотрим случай, когда в E_{x_0} не входит число ∞, т.е. $x_0 \notin \hat{E}_1$.Через T_0 обозначим наибольший элемент E_{x_0}. Учитывая определения множества E_x, системы Шаудера и класса $\Phi_{(1)}$, находим

$$\bar{\varphi}_k(x_0) > \frac{1}{2^{T_0}} \, , \; k = 1, 2, ... \, .$$

Из этого следует, что для любого m-элементного множества индексов P $(m = 1, 2, ...)$ имеет место

$$\frac{m}{2^{T_0}} < || \sum_{k \in P} \bar{\varphi}_k(x) ||_c < m \, ,$$

от чего и следует демократичность системы $\Phi_R \in \Phi_{(1)}$.

Теорема 2.3 доказана.

Доказательство теоремы 2.4 проводится аналогично доказательству достаточности теоремы 2.3 с учетом того, что всякая система $\Phi_{R'} \in \Phi_{(2)}$ является подсистемой некоторой системы $\Phi_R \in \Phi_{(1)}$, или $\Phi_{R'} = \Phi_R \in \Phi_{(1)}$. То, что условие теоремы 2.4 не является необходимым, следует из доказательства необходимости теоремы 2.3.

Доказательство теоремы 2.2 .

Необходимость. Рассмотрим подсистемы классов $\Phi_{(1)}$ и $\Phi_{(3)}$ по отдельности.

Пусть $x_0 \in Q_{[0,1]}$, тогда в двоичном разложении этого числа некая конечная комбинация из 0 и 1 будет в периоде (при $x_0 \in \hat{E}_1$ в периоде будет только 0 или только 1).

Справедлива следующая

Лемма 2.1 . *Из всякой подсистемы $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, для которой $x_0 = = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} \in Q_{[0,1]} \setminus \hat{E}_1$, можно выделить подсистему $\Phi_{R''} = \{\bar{\varphi}_{k_{i_j}}(x)\}_{j=1}^{\infty} = \{\tilde{\varphi}_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ так, что*

$$\tilde{\varphi}_j(x_0) = \tilde{\varphi}_{j+1}(x_0) > 0 \ , \ j = 1, 2, \dots \ .$$

Доказательство. Не ограничивая общности, допустим, что двоичное разложение числа $x_0 \in Q_{[0,1]}$ имеет вид

$$x_0^{(2)} = 0, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M) \ ; \ \alpha_m = 0 \ , \ 1 \ ; \ m = 1, 2, \dots, M \ ,$$

где $M > 1$ - натуральное число ($M = 1$ будет, только если $x_0 \in \hat{E}_1$, и тогда $\tilde{\varphi}_j(x_0) = 0$, $j = 1, 2, \dots$). Тогда, учитывая определение системы Шаудера, не трудно видеть, что носители функций $\bar{\varphi}_{m+p\cdot M}(x)$, $p = 1, 2, \dots$ $\left(\bar{x}^{(2)}_{m+p\cdot M} = 0, \alpha_1 \dots \alpha_{(m-1+pM)} 1(0)\right)$ точками $\bar{x}_{k+p\cdot M}$, $k = m, m+1, \dots$ претерпевают те же дробления, что и носитель функции $\bar{\varphi}_m(x) \left(\bar{x}^{(2)}_m = 0, \alpha_1 \dots \alpha_{(m-1)} 1(0)\right)$ - точками $\bar{x}_k$, $k = m, m+1, \dots$, при этом, так как $M \neq 1$, то для $\bar{\Delta}_{m+p\cdot M}$, $p = 0, 1, \dots$, x_0 будет внутренней точкой. Из этого и из того, что

$$\lim_{k \to \infty} \bar{x}_k = x_0 \ ,$$

следует, что для любого натурального $m \in [1, M]$

$$\bar{\varphi}_{m+p\cdot M}(x_0) = \bar{\varphi}_{m+(p+1)\cdot M}(x_0) > 0 \ ; \ p = 0, 1, \dots \ .$$

Так как M конечно, то во всякой подсистеме $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, для которой $\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{\Delta}'_{k_i} = x_0$, число функций одной из подсистем $\{\bar{\varphi}_{m+p\cdot M}(x)\}_{p=0}^{\infty}$, $m = 1, 2, ..., M$ будет счетной. Лемма 2.1 доказана.

Пусть $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ такая подсистема системы Шаудера, что $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{\Delta}'_{k_i} \in Q_{[0,1]} \setminus \hat{E}_1$, а $\Phi_{R''} = \{\bar{\varphi}_{k_{i_j}}(x)\}_{j=1}^{\infty} = \{\tilde{\varphi}_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ ее подсистема, указанная в лемме 2.1. Положим

$$\tilde{\varphi}_j(x_0) = y_0 > 0 \ , \ j = 1, 2, \dots \ ,$$

и рассмотрим последовательности $\{b_m\}_{m=1}^{\infty} = \{\frac{1}{m}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{c_m\}_{m=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{a_l\}_{l=1}^{\infty} = \{1, \ \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2}, \ \dots , \frac{1}{2l-1}, \ \frac{1}{2l}, \ -\frac{1}{2l}, \dots\}$. Ясно, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = +\infty \ , \ \sum_{m=1}^{\infty} c_m = -\infty \ ,$$
$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l = +\infty \ .$$

Учитывая это и $\lim\limits_{n\to\infty}|\Delta_n| = 0$, построим ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_l \tilde{\varphi}_{j_l}(x) \tag{2.8}$$

следующим образом: сначала возьмем первую функцию $\Phi_{R''}$ с коэффициентом b_1 и положим

$$\tilde{S}_1(x) = A_1\tilde{\varphi}_{j_1}(x) = b_1\tilde{\varphi}_1(x)$$

и

$$\tilde{\delta}_1 = \sup\{\delta \ ; \ \tilde{S}_1(x) > 0, |x - x_0| < \delta\} \ .$$

Затем положим

$$\tilde{S}_2(x) = A_1\tilde{\varphi}_{j_1}(x) + A_2\tilde{\varphi}_{j_2}(x) \ ,$$

где $A_2 = c_1$, $\tilde{\Delta}_{j_2} \subset (x_0 - \tilde{\delta}_1, x_0 + \tilde{\delta}_1)$.

Так как

$$\tilde{S}_2(x_0) = \frac{1}{2}y_0 > 0$$

и $\tilde{S}_2(x)$ непрерывна на $[0,1]$, то существует $0<\tilde{\delta}_2<\tilde{\delta}_1$, что при $|x-x_0|<\tilde{\delta}_2$, выполняется $\tilde{S}_2(x)>0$. Положим

$$\tilde{S}_3(x)=\tilde{S}_2(x)+A_3\tilde{\varphi}_{j_3}(x)\ ,$$

где $A_3=c_2$, $\tilde{\Delta}_{j_3}\subset(x_0-\tilde{\delta}_2,x_0+\tilde{\delta}_2)$.

По этому принципу выпишем столько функции $\tilde{\varphi}_{j_4}(x),...,\tilde{\varphi}_{j_{m_1+1}}(x)$ с коэффициентами $c_3,...,c_{m_1}$, что

$$\tilde{S}_{m_1}(x_0)=y_0\cdot\sum_{l=1}^{m_1}A_l\geq 0\ ,$$

$$\tilde{S}_{m_1+1}(x_0)=y_0\cdot\sum_{l=1}^{m_1+1}A_l<0$$

(в случае $\tilde{S}_{m_1}(x_0)=0$ (этого может и не случиться), в качестве $\tilde{\varphi}_{j_{m_1+1}}(x)$ можно взять $\tilde{\varphi}_{j_{m_1}+1}(x)$ и считать $\tilde{\delta}_{m_1}=\tilde{\delta}_{m_1-1}$). Так как $\tilde{S}_{m_1+1}(x)$ непрерывна на $[0,1]$, то существует $0<\tilde{\delta}_{m_1+1}<\tilde{\delta}_{m_1}$, что при $|x-x_0|<\tilde{\delta}_{m_1+1}$ выполняется $\tilde{S}_{m_1+1}(x)<0$. Положим

$$\tilde{S}_{m_1+2}(x)=\tilde{S}_{m_1+1}(x)+A_{m_1+2}\tilde{\varphi}_{j_{m_1+2}}(x)\ ,$$

где $A_{m_1+2}=b_2$, $\tilde{\Delta}_{j_{m_1+2}}\subset(x_0-\tilde{\delta}_{m_1+1},x_0+\tilde{\delta}_{m_1+1})$.

По этому принципу выпишем $\tilde{\varphi}_{j_{m_1+2}}(x),...,\tilde{\varphi}_{j_{m_1+l_1}}(x)$ с коэффициентами $b_2,...,b_{l_1}$ так, что

$$\tilde{S}_{m_1+l_1-1}(x_0)=y_0\cdot\sum_{l=1}^{m_1+l_1-1}A_l\leq 0\ ,$$

$$\tilde{S}_{m_1+l_1}(x_0)=y_0\cdot\sum_{l=1}^{m_1+l_1}A_l>0$$

(в случае $\tilde{S}_{m_1+l_1-1}(x_0)=0$, в качестве $\tilde{\varphi}_{j_{m_1+l_1}}(x)$ можно взять $\tilde{\varphi}_{j_{(m_1+l_1-1)}+1}(x)$ и считать $\tilde{\delta}_{m_1+l_1-1}=\tilde{\delta}_{m_1+l_1-2}$). Потом снова выпишем столько функций $\tilde{\varphi}_{j_{m_1+l_1+1}}(x),...$ $...,\tilde{\varphi}_{j_{m_2+l_1}}(x)$ с коэффициентами $c_{m_1+1},...,c_{m_2}$ $(m_2>m_1)$, чтобы

$$\tilde{S}_{m_2+l_1-1}(x_0)=y_0\cdot\sum_{l=1}^{m_2+l_1-1}A_l\geq 0\ ,$$

$$\tilde{S}_{m_2+l_1}(x_0) = y_0 \cdot \sum_{l=1}^{m_2+l_1} A_l < 0$$

и т.д. . Из схемы ясно, что $0 < \tilde{\delta}_{l+1} \leq \tilde{\delta}_l$, $l = 1, 2, ...$ и $\tilde{\delta}_{m_i+l_i} < |\tilde{\Delta}_{m_i+l_i}|$, $i = 1, 2, ...$, так что

$$\lim_{l\to\infty} \tilde{\delta}_l = 0 \ . \tag{2.9}$$

Не трудно заметить, что построенный таким образом ряд (2.8) сходится в каждой точке $x \in [0, 1]$, притом

$$\lim_{l\to\infty} \tilde{S}_l(x_0) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \tilde{\varphi}_{j_l}(x_0) = y_0 \cdot \sum_{l=1}^{\infty} A_l = 0 \ , \tag{2.10}$$

а в точках $[0, 1] \setminus \{x_0\}$ он представляет собой конечные суммы. Положим

$$f_1(x) = \lim_{l\to\infty} \tilde{S}_l(x) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \tilde{\varphi}_{j_l}(x) \ .$$

Имеет место

Лемма 2.2 . *Функция $f_1(x)$ непрерывна на [0,1].*

Доказательство. Из (2.10) следует, что для любого положительного числа ε существует натуральное число N_ε, что при $l \geq N_\varepsilon$, выполняются

$$|A_l| < \varepsilon \ , \ |\tilde{S}_l(x_0)| = y_0 \cdot |\sum_{i=1}^{l} A_i| < \varepsilon \ . \tag{2.11}$$

Пусть $\tilde{S}_l(x_0) \neq 0$, $l = N_\varepsilon, N_\varepsilon+1, ...$ и $\varepsilon > 0$ произвольно фиксировано. Для определенности допустим $0 < \tilde{S}_{N_\varepsilon}(x_0) < \varepsilon$ (в случае $-\varepsilon < \tilde{S}_{N_\varepsilon}(x_0) < 0$ рассуждения те же). Тогда для непрерывной функции $\tilde{S}_{N_\varepsilon}(x)$ существует $0 < \tilde{\delta}'_{N_\varepsilon} \leq \tilde{\delta}_{N_\varepsilon}$ такое, что при $|x - x_0| < \tilde{\delta}'_{N_\varepsilon}$, выполняется

$$0 < \tilde{S}_{N_\varepsilon}(x) < \varepsilon \ .$$

Из (2.9) следует, что лишь для конечного числа $\tilde{\delta}_{N_\varepsilon+i}$ $(i = 1, ..., I)$ может выполняться $\tilde{\delta}_{N_\varepsilon+i} \geq \tilde{\delta}'_{N_\varepsilon}$, а из (2.11) следует, что в этих случаях ситуация не изменяется, т.е. при $|x -$

$x_0| < \tilde{\delta}'_{N_\varepsilon}$, будет выполняться $0 < \tilde{S}_{N_\varepsilon+i}(x) < \varepsilon$ или $-\varepsilon < \tilde{S}_{N_\varepsilon+i}(x) < 0$. Итак, пусть $\tilde{\delta}_{N_\varepsilon+I+1} < \tilde{\delta}'_{N_\varepsilon}$. Из (2.11) следует, что если $\tilde{S}_{N_\varepsilon+I+1}(x_0) > 0$, то при $|x - x_0| < \tilde{\delta}_{N_\varepsilon+I+1}$ будет

$$0 < \tilde{S}_{N_\varepsilon+I+1}(x) < \varepsilon ,$$

если же $\tilde{S}_{N_\varepsilon+I+1}(x_0) < 0$, то при $|x - x_0| < \tilde{\delta}_{N_\varepsilon+I+1}$ будет

$$-\varepsilon < \tilde{S}_{N_\varepsilon+I+1}(x) < 0 ,$$

так что при $|x - x_0| < \tilde{\delta}'_{N_\varepsilon}$ будет выполняться $|\tilde{S}_{N_\varepsilon+I+1}(x)| < \varepsilon$. Так как

$$\tilde{\Delta}_{j_l} \subset (x_0 - \tilde{\delta}_{l-1}, x_0 + \tilde{\delta}_{l-1}) ,$$

то, учитывая (2.11), с помощью тех же рассуждений можем заключить, что при $|x - x_0| < \tilde{\delta}'_{N_\varepsilon}$,

$$|\tilde{S}_l(x)| < \varepsilon$$

выполняется для всех $l \geq N_\varepsilon$. И так, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти натуральное число N_ε и $\tilde{\delta}'_{N_\varepsilon} > 0$ такие, что при $|x - x_0| < \tilde{\delta}'_{N_\varepsilon}$,

$$|\tilde{S}_l(x)| < \varepsilon \ , \ \forall l \geq N_\varepsilon . \tag{2.12}$$

Замечание 2.1 . *В случае, когда среди $\{\tilde{S}_l(x_0)\}_{l=N_\varepsilon}^{\infty}$ есть нули (этого может и не случиться), нетрудно показать, что при $|x - x_0| < \tilde{\delta}'_{N_\varepsilon}$,*

$$|\tilde{S}_l(x)| < 2\varepsilon \ , \ \forall l \geq N_\varepsilon .$$

В (2.12) устремляя l к бесконечности находим, что при $|x-x_0| < \tilde{\delta}'_{N_\varepsilon}$, имеем $|f_1(x)| \leq \varepsilon$, т.е. непрерывность функции $f_1(x)$ в точке x_0 (согласно (2.10) $f_1(x_0) = = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \tilde{\varphi}_{j_l}(x_0) = 0$). Так, как ряд (2.8) в каждой точке $x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$ представляет собой конечную сумму, то непрерывность $f_1(x)$ в точках $[0,1] \setminus \{x_0\}$ очевидна. Лемма 2.2 доказана.

Замечание 2.2 . *Учитывая схему построения функции $f_1(x)$ нетрудно показать, что $||f_1(x)||_{C_{[0,1]}} = b_1$*

Из леммы 2.2 и из базисности системы Шаудера следует, что ряд (2.8) сходится к $f_1(x)$ равномерно, следовательно

$$f_1(x) \in \overline{span}(\{\tilde{\varphi}_{j_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}) \subset \overline{span}(\Phi_{R''}) \subset \overline{span}(\Phi_{R'}) \ .$$

Из построения ряда (2.8) следует, что при некотором $\sigma \in D(f_1, \Phi_{R'})$

$$G_m(f_1, \Phi_{R'}, \sigma, x_0) = \sum_{l=1}^{m} A_{\sigma(l)} \tilde{\varphi}_{j_{\sigma(l)}}(x_0) = y_0 \cdot \sum_{l=1}^{m} a_l \ .$$

Нетрудно видеть, что для любой $\sigma \in D(f_1, \Phi_{R'})$,

$$\lim_{m\to\infty} G_m(f_1, \Phi_{R'}, \sigma, x_0) = +\infty \ .$$

Итак, подсистемы класса $\Phi_{(3)}$, для которых $x_0 \notin \hat{E}_1$, не являются квази-гриди базисами в замыкании своей линейной оболочки.

Из сказанного следует, что подсистемы класса $\Phi_{(1)}$, для которых $x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_k \in \in Q_{[0,1]} \setminus \hat{E}_1$, не являются квази-гриди базисами в замыкании своей линейной оболочки. Поэтому для доказательства необходимости теоремы 2.2 остается рассмотреть те подсистемы класса $\Phi_{(1)}$, для которых $x_0 \in [0,1]$ иррациональна, но мы рассмотрим случаи, когда $x_0 \in [0,1] \setminus (\hat{E}_1 \cup \hat{E}_3)$, где

$$\hat{E}_3 = \left\{ \frac{3i-2}{3\cdot 2^k}, \ \frac{3i-1}{3\cdot 2^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k \right\}$$

($\hat{E}_3$ есть множество точек отрезка $[0,1]$, разложения которых в двоичной системе содержат комбинацию (10) в периоде).

Пусть $x_0 \in [0,1] \setminus (\hat{E}_1 \cup \hat{E}_3)$ произвольно фиксированное число. Очевидно, что в этом случае двоичное разложение числа x_0 не будет содержать 0 , 1 или 01 в периоде. Следовательно, в двоичном разложении этого числа бесконечное число раз встретится одна из комбинаций 001 или 110, или может быть встретятся оба.

Пусть $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такая подсистема класса $\Phi_{(1)}$, что $x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_k \in$

$\in [0,1] \setminus (\hat{E}_1 \cup \hat{E}_3)$. Пуст x_0 в двоичной системе имеет вид

$$x_0^{(2)} = 0, \alpha_1 \alpha_2 ... \ ; \ \ \alpha_i = 0 \text{ или } 1 \ \ ; \ \ i = 1, 2, ...$$

и $\alpha_k \alpha_{k+1} \alpha_{k+2} = 001$ для некоторого $k \in N$. Учитывая определения системы Шаудера и класса $\Phi_{(1)}$, нетрудно видеть, что значение функции $\bar{\varphi}_k(x)$ $(\bar{x}_k = 0, \alpha_1 ... \alpha_{k-1}\, 1\,(0))$ в точке x_0 лежит в $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, а значение функции $\bar{\varphi}_{k+1}(x)$ $(\bar{x}_{k+1} = 0, \alpha_1 ... \alpha_k\, 1\,(0))$ в точке x_0 лежит в $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. В случае $\alpha_k \alpha_{k+1} \alpha_{k+2} = 110$ - картина та же.

Так как, в двоичном представлении числа x_0 по крайней мере одна из комбинаций 001 или 110 встречается бесконечное число раз, то в подсистеме Φ_R есть бесконечное число функций, которые в точке x_0 принимают значения из $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (следовательно такие функции образуют некую подсистему $\Phi_R' \in \Phi_R$), и есть бесконечное число функций, которые в точке x_0 принимают значения из $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (следовательно такие функции тоже образуют некую подсистему $\Phi_R'' \in \Phi_R$).

Через $B(\beta)$ обозначим совокупность всевозможных последовательностей вида

$$\{B_m(\beta)\}_{m=1}^{\infty} = \{\beta_m b_m\}_{m=1}^{\infty} = \left\{\frac{\beta_m}{m}\right\}_{m=1}^{\infty} \ , \ \beta_m \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \ ,$$

через $C(\gamma)$ - совокупность всевозможных последовательностей вида

$$\{C_m(\gamma)\}_{m=1}^{\infty} = \{\gamma_m c_m\}_{m=1}^{\infty} = \left\{-\frac{\gamma_m}{2m}\right\}_{m=1}^{\infty} \ , \ \gamma_m \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \ ,$$

а через $H_m(\beta, \gamma)$, $m = 1, 2, ...$ - совокупность m-ых частичных сумм всевозможных рядов вида

$$\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{1}{3}\beta_3 + \frac{1}{4}\beta_4 - \frac{1}{4}\gamma_2 + ... \ ; \ \ \beta_i \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \ , \ \gamma_i \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \ , \ i = 1, 2, ... \ .$$

Ясно, что для любых $\{B_m(\beta)\}_{m=1}^{\infty} \in B(\beta)$, $\{C_m(\gamma)\}_{m=1}^{\infty} \in C(\gamma)$ и $h_m \in H_m(\beta, \gamma)$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_m(\beta) = +\infty \ , \ \ \sum_{m=1}^{\infty} C_m(\gamma) = -\infty$$

и

$$\lim_{m \to \infty} h_m = +\infty \ .$$

Учитывая это, построим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j \bar{\varphi}_{k_j}(x) \tag{2.13}$$

следующим образом: сначала возьмем первую функцию подсистемы Φ'_R(обозначим ее через $\bar{\varphi}_{k_1}(x)$, а $\bar{\varphi}_{k_1}(x_0) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$- через β_1) с коэффициентом b_1 и положим

$$\bar{S}_1(x) = A_1 \bar{\varphi}_{k_1}(x)$$

и

$$\bar{\delta}_1 = \sup\{\delta\ ;\ \bar{S}_1(x) > 0, |x - x_0| < \delta\}\ .$$

Вслед за ним выпишем одну из функций класса Φ''_R с коэффициентом $A_2 = c_1$ (обозначим ее через $\bar{\varphi}_{k_2}(x)$, а $\bar{\varphi}_{k_2}(x_0) \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ -через γ_1) так, что $\bar{\Delta}_{k_2} \subset \bar{\Delta}_{k_1}$ и положим

$$\bar{S}_2(x) = A_1 \bar{\varphi}_{k_1}(x) + A_2 \bar{\varphi}_{k_2}(x)\ .$$

Так, как

$$\bar{S}_2(x_0) = \beta_1 - \frac{1}{2}\gamma_1 > 0$$

и $\bar{S}_2(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то существует $0 < \bar{\delta}_2 < \bar{\delta}_1$, что при $|x - x_0| < \bar{\delta}_2$, выполняется $\bar{S}_2(x) > 0$. Положим

$$\bar{S}_3(x) = \bar{S}_2(x) + A_3 \bar{\varphi}_{k_3}(x)\ ,$$

где $A_3 = c_2$, $\bar{\varphi}_{k_3}(x) \in \Phi''_R$, $\bar{\Delta}_{k_3} \subset (x_0 - \bar{\delta}_2, x_0 + \bar{\delta}_2)$.

По этому принципу выпишем столько функций $\bar{\varphi}_{k_4}(x), ..., \bar{\varphi}_{k_{m_1+1}}(x) \in \Phi''_R$ с коэффициентами $c_3, ..., c_{m_1}$, чтобы

$$\bar{S}_{m_1}(x_0) \geq 0 \quad \text{и} \quad \bar{S}_{m_1+1}(x_0) < 0$$

(при $\bar{S}_{m_1}(x_0) = 0$, в качестве $\bar{\varphi}_{k_{m_1+1}}(x) \in \Phi''_R$ можно взять любую функцию подсистемы Φ''_R с номером $k_{m_1+1} > k_{m_1}$ и считать $\bar{\delta}_{m_1} = \bar{\delta}_{m_1-1}$). Так как $\bar{S}_{m_1+1}(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то существует $0 < \bar{\delta}_{m_1+1} < \bar{\delta}_{m_1}$, что при $|x - x_0| < \bar{\delta}_{m_1+1}$, выполняется $\bar{S}_{m_1+1}(x) < 0$. Положим

$$\bar{S}_{m_1+2}(x) = \bar{S}_{m_1+1}(x) + A_{m_1+2} \bar{\varphi}_{k_{m_1+2}}(x)\ ,$$

где $A_{m_1+2} = b_2$, $\bar{\varphi}_{k_{m_1+2}}(x) \in \Phi'_R$, $\bar{\Delta}_{k_{m_1+2}} \subset (x_0 - \bar{\delta}_{m_1+1}, x_0 + \bar{\delta}_{m_1+1})$.

Следуя этому принципу, выпишем $\bar{\varphi}_{k_{m_1+2}}(x), ..., \bar{\varphi}_{k_{m_1+l_1}}(x) \in \Phi'_R$ с коэффициентами $b_2, ..., b_{l_1}$ так, чтобы

$$\bar{S}_{m_1+l_1-1}(x_0) \leq 0 \quad \text{и} \quad \bar{S}_{m_1+l_1}(x_0) > 0$$

(в случае $\bar{S}_{m_1+l_1-1}(x_0) = 0$, в качестве $\bar{\varphi}_{k_{m_1+l_1}}(x)$ можно взять любую функцию подсистемы Φ'_R с номером $k_{m_1+l_1} > k_{m_1+l_1-1}$ и считать $\bar{\delta}_{m_1+l_1-1} = \bar{\delta}_{m_1+l_1-2}$).

Потом снова выпишем столько функций $\bar{\varphi}_{k_{m_1+l_1+1}}(x), ..., \bar{\varphi}_{k_{m_2+l_1}}(x) \in \Phi''_R$ с коэффициентами $c_{m_1+1}, ..., c_{m_2}$ $(m_2 > m_1)$ так, чтобы

$$\bar{S}_{m_2+l_1-1}(x_0) \geq 0 \quad \text{и} \quad \bar{S}_{m_2+l_1}(x_0) < 0$$

и т.д. . Ясно, что

$$0 < \bar{\delta}_{j+1} \leq \bar{\delta}_j \ , \ j = 1, 2, ...$$

$$\lim_{j\to\infty} \bar{\delta}_j = 0 \ , \ \lim_{j\to\infty} A_j = 0 \tag{2.14}$$

Нетрудно заметить, что построенный таким образом ряд (2.13) сходится в каждой точке

$x \in [0, 1]$, притом

$$\lim_{j\to\infty} \bar{S}_j(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \bar{\varphi}_{k_j}(x_0) = 0 \ , \tag{2.15}$$

а в точках $[0, 1] \setminus \{x_0\}$ он представляет собой конечные суммы. Положим

$$f_2(x) = \lim_{j\to\infty} \bar{S}_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \bar{\varphi}_{k_j}(x) \ .$$

Основываясь на (2.14) и (2.15), повторяя рассуждения доказательства леммы 2.2, находим

$$f_2(x) \in C_{[0,1]} \ .$$

Отсюда и из базисности системы Шаудера следует, что ряд (2.13) сходится к $f_2(x)$ равномерно, следовательно

$$f_2(x) \in \overline{span}(\{\bar{\varphi}_{k_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}) \subset \overline{span}(\Phi_R) \ .$$

Учитывая процесс построения ряда (2.13) находим, что при некоторой $\sigma \in D(f_2, \Phi_R)$

$$G_m(f_2, \Phi_R, \sigma, x_0) = \sum_{j=1}^{m} A_{\sigma(j)} \bar{\varphi}_{k_{\sigma(j)}}(x_0) \in H_m(\beta, \gamma) \ .$$

Нетрудно видеть, что для любой $\sigma \in D(f_2, \Phi_R)$

$$\lim_{m\to\infty} G_m(f_2, \Phi_R, \sigma, x_0) = +\infty \ .$$

Необходимость теоремы 2.2 доказана.

Достаточность. Пусть $\Phi_{R'} = \{\varphi_{n_{k_i}}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \in (\Phi_{(1)} \cup \Phi_{(3)}) \subset \Phi_{(2)}$, $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} \in \hat{E}_1$ (например $\Phi_R = \{\varphi_{2^k+1}(x)\}_{k=0}^{\infty}$).

Учитывая процесс доказательства достаточности теоремы 2.3, с помощью которого доказывается теорема 2.4, не трудно показать, что для любой указанной подсистемы $\Phi_{R'}$ существует число $T > 0$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\varphi}_{k_i}(x) < T, \ \forall x \in [0,1] \ . \tag{2.16}$$

Пусть $f(x) \in \overline{span}(\Phi_{R'})$ - произвольная функция, тогда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\varphi}_{k_i}(x) \in C_{[0,1]} \ ,$$

где необходимо $A_i \to 0$, при $i \to \infty$, т.е. для любого положительного числа ε существует натуральное число I_ε такое, что

$$|A_i| < \frac{\varepsilon}{T} \quad \text{при} \quad i \geq I_\varepsilon \ .$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_i \bar{\varphi}_{k_i}(x)| \ . \tag{2.17}$$

Учитывая (2.16) находим, что при $i \geq I_\varepsilon$

$$\sum_{i=I_\varepsilon}^{\infty} |A_i \bar{\varphi}_{k_i}(x)| < \varepsilon \ , \ \forall x \in [0,1] \ ,$$

т.е. ряд (2.17) сходится равномерно, от чего следует, что подсистема $\Phi_{R'}$ является безусловным базисом в $\overline{span}(\Phi_{R'})$, следовательно и квази-гриди базисом в $\overline{span}(\Phi_{R'})$ (отметим, что из этого , из теоремы 2.4 и из теоремы Конягина-Темлякова следует, что система $\Phi_{R'}$ является также гриди базисом в $\overline{span}(\Phi_{R'})$).

Теорема 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.1 следует из доказательства теоремы 2.2.

Замечание 2.3 . *Из теоремы 2.2 следует, что среди подсистем* $\Phi_{R'} \in \Phi_{(1)} \cup \Phi_{(3)}$ *квази-гриди базисами в замиканиях своих линейных оболочек являются те, для которых* $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_i} \in \hat{E}_1$*, но вместе с этим существуют подсистемы системы Шаудера, для которых* $x_0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bar{\Delta}'_{k_j} \notin \hat{E}_1$ *и они являются гриди (следовательно и квази-гриди) базисами в замыканиях своих линейных оболочек.*

Приведем пример одной из таких подсистем.

Итак, пусть в двоичной системе x_0 имеет вид

$$x_0^{(2)} = 0, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 ... = 0, 01\, 001\, 0001... ,$$

а $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ та подсистема системы Шаудера, для которой $\bar{x}_k^{(2)} = 0, \alpha_1 ... \alpha_{k-1}\, 1\, (0)$. Рассмотрим подсистему

$$\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_{k_j}(x)\}_{j=1}^{\infty} \ ; \ \ k_j = \sum_{i=1}^{j} i \ .$$

Учитывая определения системы Шаудера и подсистемы $\Phi_{R'}$, нетрудно видеть, что функция $\bar{\varphi}_{k_j}(x)$ $(x_{k_j}^{(2)} = 0, \alpha_1 ... \alpha_{k_j-1}\, 1\, (0))$ на $\bar{\Delta}_{k_{j+1}}$ принимает значения из $\left(\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^{j-1}}\right)$, $j = 1, 2, ...$, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\varphi}_{k_j}(\bar{x}_{k_1}) = 1 \ ; \ \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\varphi}_{k_j}(\bar{x}_{k_i}) < 1 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2^{j-1}} < 3 \ ; \ i = 2, 3, ... \ .$$

Учитывая это, $\bar{\Delta}_{k_{j+1}} \subset \bar{\Delta}_{k_j}$ $(j = 1, 2, ...)$ и рассуждения доказательства достаточности теоремы 2.2, нетрудно доказать, что подсистема $\Phi_{R'}$ является безусловным и демократичным, следовательно гриди базисом в $\overline{span}(\Phi_{R'})$.

Глава 3

Нелинейная аппроксимация по системе Фабера-Шаудера и исправления функций.

Как мы видели в предыдущих параграфах, жадный алгоритм в $C_{[0,1]}$ по системе Фабера-Шаудера сходится не для всех функций из $C_{[0,1]}$. Естественен вопрос: можно ли изменить значении любой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$ на множестве малой меры так, чтобы жадный алгоритм вновь полученной функции $\tilde{f}(x) \in C_{[0,1]}$ сходился в $C_{[0,1]}$. В этом параграфе дается положительный ответ этому вопросу.

Верна следующая

Теорема 3.1 . *Для любого $\epsilon > 0$ и для каждой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$, можно найти функцию $\tilde{f}(x) \in C_{[0,1]}$, $mes\{\tilde{f}(x) \neq f(x)\ ,\ x \in [0,1]\} < \epsilon$ и такую, что ее жадный алгоритм равномерно сходится к ней.*

Эта теорема следует из боле обшей теоремы:

Теорема 3.2 . *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$ можно найти функцию $\tilde{f}(x) \in C_{[0,1]}$, совпадающую с $f(x)$ на E, и такую, что все коэффициенты разложения этой функции по системе Фабера-Шаудера отличны от нуля, множество $D(\tilde{f}, \Phi)$ содержит один элемент, жадный алгоритм этой функции по системе Фабера-Шаудера равномерно сходится к ней, и имеет место следующее неравен-*

ство:

$$\|G_m(\tilde{f},\Phi,x)\|_C \ \le\ 5||\tilde{f}(x)||_C \le 10||f(x)||_C \ , \ \forall m \in \mathbb{N} \ .$$

Замечание. Необходимо отметить, что как в теоремах Лузина [21] и Меньшова [22], так и в теореме 3.1 "исключительное"множество, на котором происходит изменение функции $f(x)$, зависит от функции, а в теореме 3.2 это множество универсально, не зависит от функции.

3.1 Доказательства основных лемм.

Интервалы $\Delta_n = \Delta_k^{(i)} = (\frac{i-1}{2^k},\frac{i}{2^k})$, $n = 2^k + i$; $k = 0,1,...$; $i = 1,2,...,2^k$, назовем двоичными интервалами.

Лемма 3.1 . *Пусть даны двоичный интервал* $\Delta = \Delta_p^{(i)} = (\frac{i-1}{2^p},\frac{i}{2^p})$ $(i \in [1,2^p])$ *и числа* $\gamma \neq 0$, $N > 1$ $(N \in \mathbb{N})$, $0 < \epsilon < |\Delta|$. *Тогда существуют измеримое множество* $E \subset \Delta$ *с мерой* $|E| > |\Delta| - \epsilon$ *и полином*

$$Q(x) = \sum_{n=N}^{\bar{N}} A_n \varphi_n(x)$$

по системе (1.1) такие, что

1) $$Q(x) = \begin{cases} \gamma, \ \textit{при } x \in E, \\ 0, \ \textit{при } x \in [0,1]\setminus\Delta \end{cases} \quad ; \quad ||Q(x)||_C = |\gamma| \ ,$$

2) $$A_n \cdot \gamma \ge 0 \quad \textit{и} \quad |A_n| \le |\gamma| \ , \ \forall n \in [N,\bar{N}].$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случае когда $N \le 2^p + i$. Возьмем натуральное число $q > log_2 \frac{1}{\epsilon} + 1$ $(0 < \epsilon < |\Delta|)$ и положим

$$E = \Delta \setminus \left\{ \left(\frac{i-1}{2^p} \, , \frac{i-1}{2^p} + \frac{1}{2^q} \right) \bigcup \left(\frac{i}{2^p} - \frac{1}{2^q} \, , \frac{i}{2^p} \right) \right\} \ ,$$

$$g(x)=\begin{cases}\gamma,\ \text{при } x\in E\ ,\\ \\ 0,\ \text{при } x\in[0,1]\setminus\Delta\ ,\\ \\ \text{линейна и непрерывна на } [\frac{i-1}{2^p},\frac{i-1}{2^p}+\frac{1}{2^q}] \text{ и } [\frac{i}{2^p}-\frac{1}{2^q},\frac{i}{2^p}]\ .\end{cases}$$

Ясно, что $|E|>|\Delta|-\epsilon$. Учитывая (1.2), нетрудно видеть, что

$$g(x)=\gamma\cdot\varphi_p^{(i)}(x)+\frac{\gamma}{2}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{q-p-1}\varphi_{p+k}^{(2t_k-1)}(x)+\sum_{k=1}^{q-p-1}\varphi_{p+k}^{(2h_k)}(x)\right\}\ ,$$

где $t_1=h_1=i$; $t_{k+1}=2t_k-1$, $h_{k+1}=2h_k$, так что функция $g(x)$ представляет собой полином по системе Фабера-Шаудера, удовлетворяющий условиям леммы.

Теперь рассмотрим случае когда $N>2^p+i$. В этом случае среди точек $x_n,\ n<N$ (см. (1.1)), некоторые входят в Δ. Обозначим их через $x_{n_l},\ l=1,2,...L\ \ (x_{n_1}=x_p^{(i)}==\frac{2i-1}{2^{p+1}})$.

Возьмем натуральное число $q>log_2\frac{L+1}{\epsilon}+1$ $(0<\epsilon<|\Delta|)$ и положим

$$E=\Delta\setminus\left\{\bigcup_{l=1}^{L}\left(x_{n_l}-\frac{1}{2^q},x_{n_l}+\frac{1}{2^q}\right)\bigcup\left(\frac{i-1}{2^p},\frac{i-1}{2^p}+\frac{1}{2^q}\right)\bigcup\left(\frac{i}{2^p}-\frac{1}{2^q},\frac{i}{2^p}\right)\right\},$$

$$g(x)=\begin{cases}\gamma,\ \text{при } x\in E\ ,\\ \\ 0,\ \text{при } x\in([0,1]\setminus\Delta)\ \bigcup\{x_{n_l}\}_{l=1}^{L}\ ,\\ \\ \text{линейна и непрерывна на каждом } [x_{n_l}-\frac{1}{2^q},x_{n_l}] \text{ и}\\ [x_{n_l},x_{n_l}+\frac{1}{2^q}]\ (l\in[1,L]) \text{ и на } [\frac{i-1}{2^p},\frac{i-1}{2^p}+\frac{1}{2^q}]\ ,[\frac{i}{2^p}-\frac{1}{2^q},\frac{i}{2^p}]\ .\end{cases}\tag{3.1}$$

Ясно, что $N<2^q$, $||g(x)||_C=|\gamma|$ и $|E|>|\Delta|-\epsilon$. Учитывая (1.2) находим, что в разложении функции $g(x)\in C_{[0,1]}$ по системе (1.1), коэффициенты функций $\varphi_n(x)$ с номерами $n<N$ и $n>2^q$, а также коэффициенты функций $\varphi_n(x)$ с номерами $N\le n\le 2^q$, носители которых не входят в Δ или входят, но $\Delta_n \subset E$, равны нулю. Из (1.2) и (3.1) следует также, что коэффициенты остальных функций $\varphi_n(x)$, $N \leq n \leq 2^q$ $(\Delta_n \subset \Delta)$, равны γ или $\frac{\gamma}{2}$ в зависимости от того, функция $g(x)$ принимает значение нуль на обоих концах Δ_n, или только на одном конце. Итак, мы находим, что функция $g(x)$ представляет собой полином по системе (1.1) вида

$$g(x) = Q(x) = \sum_{n=N}^{\bar{N}} A_n \varphi_n(x) \quad ; \quad ||Q(x)||_C = |\gamma| ,$$

где коэффициенты $A_n,\ n \in [N, \bar{N}]$, удовлетворяют 2)-ому условию леммы.

Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2 . *Пусть даны двоичный интервал* $\Delta = \Delta_p^{(i)} = (\frac{i-1}{2^p}, \frac{i}{2^p})$ $(i \in [1, 2^p])$ *и числа* $\gamma \neq 0$, $N > 1$ $(N \in \mathbb{N})$, $0 < \epsilon < |\Delta|$. *Тогда существуют измеримое множество* $E \subset \Delta$, *непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $g(x)$, *полином* $Q(x)$ *по системе Фабера-Шаудера вида*

$$Q(x) = \sum_{n=N}^{\bar{N}} A_n \varphi_n(x) , \qquad \textit{где} \quad A_n \cdot \gamma > 0 \quad \textit{для всех} \quad N \leq n \leq \bar{N} ,$$

и перестановка $\{\sigma(k)\}_{k=N}^{\bar{N}}$ *натуральных чисел* $N, \ldots, \bar{N}$ *, удовлетворяющие условиям:*

1) $$|E| > |\Delta| - \epsilon ,$$

2) $$g(x) = \begin{cases} \gamma, \ \textit{при } x \in E, \\ 0, \ \textit{при } x \in [0,1] \setminus \Delta \end{cases} \quad ; \quad ||g(x)||_C = |\gamma| ,$$

3) $$||g(x) - Q(x)||_C < \epsilon ,$$

4) $$\max_{N \leq m \leq \bar{N}} \left\| \sum_{n=N}^{m} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right\|_C < 2|\gamma| ,$$

5) $$\epsilon > |A_{\sigma(n)}| > |A_{\sigma(n+1)}| > 0 , \ \forall n \in [N, \bar{N}).$$

Доказательство. Пусть $\nu_0 > \frac{2|\gamma|}{\epsilon}$ некоторое натуральное число. Последовательным применением леммы 3.1 для каждого натурального $\nu \in [1, \nu_0]$ найдем измеримое множество $E_\nu \subset \Delta$ и полином

$$Q_\nu(x) = \sum_{n=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} A_n^{(\nu)} \varphi_n(x) \; ; \; N_0 = N \; , \; N_\nu > N_{\nu-1} \; ,$$

такие, что

1′) $$|E_\nu| > |\Delta| - \frac{\epsilon}{\nu_0} \; ,$$

2′) $$Q_\nu(x) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\nu_0}, \text{ при } x \in E_\nu, \\ 0, \text{ при } x \in [0,1] \setminus \Delta \end{cases} \quad ; \quad ||Q_\nu(x)||_C = \frac{|\gamma|}{\nu_0} \; ,$$

3′) $$A_n^{(\nu)} \cdot \gamma \geq 0 \quad \text{и} \quad |A_n^{(\nu)}| \leq \frac{|\gamma|}{\nu_0} \; , \; \forall n \in [N_{\nu-1}, N_\nu).$$

Положим

$$E = \bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu$$

и

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x) = \sum_{n=N}^{\bar{N}} \bar{A}_n \varphi_n(x) \; , \tag{3.2}$$

где $\bar{A}_n = A_n^{(\nu)}$, при $n \in [N_{\nu-1}, N_\nu)$ $(\nu = 1, 2, ..., \nu_0)$, и $\bar{N} = N_{\nu_0} - 1$.

Отсюда и из 1′) , 2′), 3′) следует, что определенные таким образом множество E и функция $g(x)$ удовлетворяют 1) и 2) условиям леммы, а также

$$\bar{A}_n \cdot \gamma \geq 0 \quad \text{и} \quad |\bar{A}_n| \leq \frac{|\gamma|}{\nu_0} \; , \; \forall n \in [N, \bar{N}]. \tag{3.3}$$

Пусть $\{\sigma(n)\}_{n=N}^{\bar{N}}$ - такая перестановка натуральных чисел $[N, \bar{N}]$, что

$$|\bar{A}_{\sigma(n)}| \geq |\bar{A}_{\sigma(n+1)}| \geq 0 \; , \; \forall n \in [N, \bar{N}) \; .$$

Пологая $\bar{\epsilon} = \min\{|\gamma|, \epsilon\}$,

$$A_{\sigma(n)} = \bar{A}_{\sigma(n)} + \frac{\bar{\epsilon}}{2^n} \cdot \frac{|\gamma|}{\gamma} \ , \ n = N, ..., \bar{N} \ ,$$

$$Q(x) = \sum_{n=N}^{\bar{N}} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) = \sum_{n=N}^{\bar{N}} A_n \varphi_n(x)$$

и учитывая (3.2) и (3.3) получим

$$||g(x) - Q(x)||_C \leq \sum_{n=N}^{\bar{N}} \frac{\bar{\epsilon}}{2^n} < \bar{\epsilon} \leq \epsilon \ ,$$

$$\max_{N \leq m \leq \bar{N}} \left| \sum_{n=N}^{m} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right| = \left| \sum_{n=N}^{\bar{N}} A_n \varphi_n(x) \right| \leq |g(x)| + |Q(x) - g(x)| < 2|\gamma| \ , \forall x \in [0,1] \ ,$$

$$\epsilon > |A_{\sigma(n)}| > |A_{\sigma(n+1)}| > 0 \ , \ \forall n \in [N, \bar{N}) \ ; \qquad A_{\sigma(n)} \cdot \gamma > 0 \ , \ \forall n \in [N, \bar{N}] \ ,$$

откуда следует доказательство леммы 3.2 .

Лемма 3.3. *Пусть даны двоичные интервалы* $\{\Delta_p^{(\nu)}\}_{\nu=1}^{2^p}$ $(p \geq 1)$, *числа* $\gamma_\nu \neq 0$, $\nu = 1, 2, ..., 2^p$; $0 < \epsilon < 1$; $N_0 > 1$ $(N_0 \in \mathbb{N})$ *и ступенчатая функция вида* $f(x) = \sum_{\nu=1}^{2^p} \gamma_\nu \chi_{\tilde{\Delta}_p^{(\nu)}}$, *где* $\tilde{\Delta}_p^{(\nu)} = [\frac{\nu-1}{2^p}, \frac{\nu}{2^p})$, $\nu = 1, ..., 2^p - 1$ *и* $\tilde{\Delta}_p^{(2^p)} = [\frac{2^p-1}{2^p}, 1]$. *Тогда можно найти измеримое множество* $E \subset [0,1]$, *непрерывную на* $[0,1]$ *функцию* $g(x)$, *полином* $Q(x)$ *по системе Фабера-Шаудера вида*

$$Q(x) = \sum_{n=N_0}^{M} A_n \varphi_n(x)$$

и перестановку $\{\sigma(n)\}_{n=N_0}^{M}$ *натуральных чисел* $N_0, ..., M$, *удовлетворяющие условиям:*

1) $\mid E \mid > 1 - \epsilon$

2) $g(x) = f(x)$, для всех $x \in E$,

3) $||g(x)||_C = ||f(x)||_\infty = \max\{|\gamma_\nu| \ , \ \nu \in [1, 2^p]\}$

4) $||Q(x) - g(x)||_C < \epsilon$,

5) $\epsilon > |A_{\sigma(n)}| > |A_{\sigma(n+1)}| > 0,\ \ \forall n \in [N_0, M)$,

6) $|| \sum_{n=N_0}^{m} A_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)||_C < 4 \cdot ||f(x)||_\infty$, $\forall m \in [N_0, M]$,

где $||f(x)||_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\}$.

Доказательство . Пусть $\alpha_0 = \frac{\epsilon}{2^p}$. Применим лемму 3.2, полагая в ее формулировке $\Delta = \Delta_p^{(1)}$, $\gamma = \gamma_1$, $N = N_0$, $\epsilon = \alpha_0$. Тогда определяются непрерывная на $[0,1]$ функция $g_1(x)$, измеримое множество $E_1 \subset \Delta_p^{(1)}$, полином вида

$$Q_1(x) = \sum_{n=N_0}^{N_1-1} A_n^{(1)}\varphi_n(x)$$

и перестановка $\{\sigma_1(n)\}_{n=N_0}^{N_1-1}$ натуральных чисел $N_0, ..., N_1-1$, удовлетворяющие условиям:

$$g_1(x) = \begin{cases} \gamma_1, \text{ при } x \in E_1 \ , \\ 0, \text{ при } x \notin \Delta_p^{(1)} \end{cases} \quad ; \quad ||g_1(x)||_C = |\gamma_1| \ ,$$

$$|E_1| > |\Delta_p^{(1)}| - \alpha_0 \ ,$$

$$||Q_1(x) - g_1(x)||_C < \alpha_0 \ ,$$

$$\alpha_0 > |A^{(1)}_{\sigma_1(N_0)}| > ... > |A^{(1)}_{\sigma_1(N_1-1)}| > 0 \ ,$$

$$\left\| \sum_{n=N_0}^{m} A^{(1)}_{\sigma_1(n)}\varphi_{\sigma_1(n)}(x) \right\|_C < 2\cdot|\gamma_1| \ , \ \forall m \in [N_0, N_1-1] \ .$$

Положим

$$\alpha_1 = \min\left\{ \frac{||f(x)||_\infty}{2^p} \ ; \ \min_{N_0\le n\le N_1-1} \left(|A_n^{(1)}|\right) \right\} .$$

Снова применим лемму 3.2, полагая в ее формулировке $\Delta = \Delta_p^{(2)}$, $\gamma = \gamma_2$, $N = N_1$, $\epsilon = \alpha_1$. Тогда определяются непрерывная на $[0,1]$ функция $g_2(x)$, измеримое множество $E_2 \subset \Delta_p^{(2)}$, полином вида

$$Q_2(x) = \sum_{n=N_1}^{N_2-1} A_n^{(2)}\varphi_n(x)$$

и перестановка $\{\sigma_2(k)\}_{k=N_1}^{N_2-1}$ натуральных чисел $N_1, ..., N_2-1$, удовлетворяющие условиям:

$$g_2(x) = \begin{cases} \gamma_2, \text{ при } x \in E_2, \\ 0, \text{ при } x \notin \Delta_p^{(2)} \end{cases} ; \quad ||g_2(x)||_C = |\gamma_2| \, ,$$

$$|E_2| > |\Delta_p^{(2)}| - \alpha_1 \, ,$$

$$||Q_2(x) - g_2(x)||_C < \alpha_1,$$

$$\alpha_1 > |A^{(2)}_{\sigma_2(N_1)}| > ... > |A^{(2)}_{\sigma_2(N_2-1)}| > 0,$$

$$\left\| \sum_{n=N_1}^{m} A^{(2)}_{\sigma_2(n)} \varphi_{\sigma_2(n)}(x) \right\|_C < 2 \cdot |\gamma_2| \, , \, \forall m \in [N_1, N_2 - 1].$$

Продолжая эти рассуждения, мы можем, по индукции, определить числа $\frac{\epsilon}{2^p} = = \alpha_0 > \alpha_1 > ... > \alpha_{2^p-1}$, непрерывные на $[0,1]$ функции $g_1(x), ..., g_{2^p}(x)$, измеримые множества $E_1 \subset \Delta_p^{(1)}, ..., E_{2^p} \subset \Delta_p^{(2^p)}$, полиномы $Q_1(x), \ldots, Q_{2^p}(x)$ вида

$$Q_\nu(x) = \sum_{n=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} A_n^{(\nu)} \varphi_n(x) \, , \, 1 \le \nu \le 2^p \, , \tag{3.4}$$

и перестановки $\{\sigma_\nu(n)\}_{n=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}$ натуральных чисел $N_{\nu-1}, ..., N_\nu - 1$, удовлетворяющие условиям:

$$\alpha_0 = \frac{\epsilon}{2^p} \, ,$$

$$\alpha_\nu = \min \left\{ \frac{||f(x)||_\infty}{2^p} \, ; \, \min_{N_{\nu-1} \le n \le N_\nu - 1} \left(|A_n^{(\nu)}| \right) \right\} < \frac{\epsilon}{2^p}, \;\; 1 \le \nu < 2^p, \tag{3.5}$$

$$g_\nu(x) = \begin{cases} \gamma_\nu, \text{ при } x \in E_\nu, \\ 0, \text{ при } x \notin \Delta_p^{(\nu)} \end{cases} ; \quad ||g_\nu(x)||_C = |\gamma_\nu| \, , \, 1 \le \nu \le 2^p \, , \tag{3.6}$$

$$|E_\nu| > |\Delta_p^{(\nu)}| - \alpha_{\nu-1} \, , \;\; 1 \le \nu \le 2^p \, , \tag{3.7}$$

$$||Q_\nu(x) - g_\nu(x)||_C < \alpha_{\nu-1} \ , \ 1 \le \nu \le 2^p \ , \tag{3.8}$$

$$\alpha_{\nu-1} > |A^{(\nu)}_{\sigma_\nu(n)}| > |A^{(\nu)}_{\sigma_\nu(n+1)}| > 0 \ ; \ \forall n \in [N_{\nu-1}, N_\nu - 1) \ ; \ 1 \le \nu \le 2^p \ , \tag{3.9}$$

$$\left\| \sum_{n=N_{\nu-1}}^{m} A^{(\nu)}_{\sigma_\nu(n)} \varphi_{\sigma_\nu(n)}(x) \right\|_C < 2 \cdot |\gamma_\nu| \ ; \ \forall m \in [N_{\nu-1}, N_\nu - 1] \ ; \ 1 \le \nu \le 2^p \ . \tag{3.10}$$

Положим

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{2^p} g_\nu(x) \ , \tag{3.11}$$

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{2^p} E_\nu \ , \tag{3.12}$$

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{2^p} Q_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{2^p} \left(\sum_{n=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} A^{(\nu)}_n \varphi_n(x) \right) = \sum_{n=N_0}^{M} A_n \varphi_n(x) \tag{3.13}$$

(см. (3.4)), где

$$M = N_{2^p} - 1; \ \ A_n = A^{(\nu)}_n, \ \ n \in [N_{\nu-1}, N_\nu - 1], \ \ 1 \le \nu \le 2^p \ . \tag{3.14}$$

Из (3.5)-(3.8), (3.11)-(3.13) и из того, что $\{\Delta^{(\nu)}_p\}_{\nu=1}^{2^p}$ попарно не пересекаются, вытекает, что функция $g(x)$ непрерывна на $[0, 1]$ и

$$g(x) = f(x) \ , \text{ при } x \in E \ ; \ ||g(x)||_C = ||f(x)||_\infty = \max\{|\gamma_\nu| \ , \ \nu \in [1, 2^p]\} \ , \tag{3.15}$$

$$|E| = \sum_{\nu=1}^{2^p} |E_\nu| > \sum_{\nu=1}^{2^p} |\Delta_\nu| - \sum_{\nu=1}^{2^p} \alpha_{\nu-1} > 1 - \epsilon,$$

$$||Q(x) - g(x)||_C \le \sum_{\nu=1}^{2^p} ||Q_\nu(x) - g_\nu(x)||_C < \epsilon \ ,$$

т.е. утверждения 1)- 4) леммы 3.3 выполнены.

Из (3.5) и (3.9) следует, что

$$|A^{(1)}_n| < \alpha_0 = \frac{\epsilon}{2^p}, \ \ n \in [N_0, N_1) \ ,$$

$$|A_n^{(\nu)}| < \alpha_{\nu-1} \le \min_{N_{\nu-2}\le i<N_{\nu-1}} \left(|A_i^{(\nu-1)}|\right) \ , \ \ n \in [N_{\nu-1}, N_\nu) \ , \ \nu \in [2, 2^p] \ .$$

Отсюда, из (3.9) и (3.14) будем иметь

$$\epsilon > |A_{\sigma(n)}| > |A_{\sigma(n+1)}| > 0, \ \ \forall n \in [N_0, M) \ ,$$

где

$$\sigma(n) = \sigma_\nu(n), \ \ n \in [N_{\nu-1}, N_\nu), \ \ 1 \le \nu \le 2^p \ . \tag{3.16}$$

Теперь проверим выполнение утверждения 6) леммы 3.3. Пусть $m \in [N_0, M]$, тогда для некоторого $\nu \in [1, 2^p]$ имеем $N_{\nu-1} \le m < N_\nu$, следовательно, из (3.13), (3.14) и (3.16) получим

$$\sum_{n=N_0}^{m} A_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\nu-1} Q_k(x) + \sum_{n=N_{\nu-1}}^{m} A_{\sigma_\nu(n)}^{(\nu)}\varphi_{\sigma_\nu(n)}(x).$$

Отсюда, из соотношений (3.5), (3.6), (3.8), (3.10), (3.11), (3.15) и из того, что $\{\Delta_p^{(\nu)}\}_{\nu=1}^{2^p}$ попарно не пересекаются, будем иметь

$$\left\| \sum_{n=N_0}^{m} A_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x) \right\|_C \le \sum_{k=1}^{\nu-1} ||Q_k(x) - g_k(x)||_C + ||g(x)||_C + \left\| \sum_{n=N_{\nu-1}}^{m} A_{\sigma_\nu(n)}^{(\nu)}\varphi_{\sigma_\nu(n)}(x) \right\|_C <$$

$$< 2^p \cdot \frac{||f(x)||_\infty}{2^p} + ||g(x)||_C + 2|\gamma_\nu| \le 4 \cdot ||f(x)||_\infty \ .$$

Лемма 3.3 доказана.

3.2 Доказательства теорем

Доказательство теоремы 3.2 . Схема доказательства теоремы 3.2 такова: функция $\tilde{f}(x)$, полученная после изменения значений любой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$ вне множества E, представляется в $C_{[0,1]}$ рядом, членами которого являются непересекающиеся полиномы по системе Фабера-Шаудера, внутренние колебания которых равномерно стремятся к нулю, а модули коэффициентов от полинома к полиному убывают.

Итак, пусть $0 < \epsilon < 1$. Пронумеровав все ступенчатые функции вида

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{2^p} \gamma_\nu \chi_{\tilde{\Delta}_p^{(\nu)}} \ ,$$

где $\{\gamma_\nu\ ;\ \nu = 1, 2, ..., 2^p\ ;\ p = 1, 2, ...\}$ - рациональные числа, отличные от нуля, а $\tilde{\Delta}_p^{(\nu)} = [\frac{\nu-1}{2^p}, \frac{\nu}{2^p})$, $\nu = 1, 2, ..., 2^p - 1$ и $\tilde{\Delta}_p^{(2^p)} = [\frac{2^p-1}{2^p}, 1]$, $p \in \mathbb{N}$, мы можем представить их в виде последовательности

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \ . \tag{3.17}$$

Последовательным применением леммы 3.3, можем найти последовательности функций $\{\overline{g}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, множеств $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ и полиномов

$$\overline{Q}_k(x) = \sum_{n=m_{k-1}}^{m_k-1} a_n^{(k)} \varphi_{\sigma_k(n)}, \ \ m_0 = 2\ ,\ k \in \mathbb{N} \tag{3.18}$$

($\{\sigma_k(n)\}_{n=m_{k-1}}^{m_k-1}$ для каждого фиксированного k есть некоторая перестановка натуральных чисел $m_{k-1}, m_{k-1}+1, ..., m_k - 1$), которые удовлетворяют условиям:

$$\overline{g}_k(x) \in C_{[0,1]}; \qquad \overline{g}_k(x) = f_k(x),\ \ x \in E_k; \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ , \tag{3.19}$$

$$|E_k| > 1 - \epsilon \cdot 4^{-8(k+2)}, \tag{3.20}$$

$$||\overline{g}_k(x)||_C = ||f_k(x)||_\infty, \tag{3.21}$$

$$||\overline{Q}_k(x) - \overline{g}_k(x)||_C < \epsilon \cdot 4^{-8(k+2)}, \tag{3.22}$$

$$\max_{m_{k-1} \le N < m_k} \left\| \sum_{n=m_{k-1}}^{N} a_n^{(k)} \varphi_{\sigma_k(n)}(x) \right\|_C < 4 \cdot ||f_k(x)||_\infty, \tag{3.23}$$

$$\epsilon \cdot 4^{-8(k+2)} > |a_n^{(k)}| > |a_{n+1}^{(k)}| > |a_{m_k}^{(k+1)}|\ ,\ \ \forall n \in [m_{k-1}, m_k - 1)\ ,\ \ \forall k \ge 1\ . \tag{3.24}$$

Напомним, что под $||f(x)||_\infty$ понимаем $\sup\limits_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\}$. Положим

$$B = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(x_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right)\ , \tag{3.25}$$

где $x_n = \frac{2i-1}{2^{k+1}},\ n = 2^k + i,\ k = 0, 1, ...,\ i = 1, 2, ..., 2^k$ (см. (1.1)), и

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \bigcap B\ . \tag{3.26}$$

Очевидно, что (см. (3.20) и (3.25))

$$|E| > 1 - \epsilon.$$

Пусть $f(x) \in C_{[0,1]}$. Нетрудно видеть, что можно выбрать последовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из последовательности (3.17) такую, что

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} f_{k_n}(x) - f(x) \right\|_{\infty} = 0 \,, \tag{3.27}$$

$$||f_{k_n}(x)||_{\infty} \le \overline{\epsilon} \cdot 4^{-8(n+2)}, \;\; n \ge 2, \quad \text{где} \;\; \overline{\epsilon} = \min\left\{\epsilon, \; ||f(x)||_C\right\} \; . \tag{3.28}$$

Положим

$$g_1(x) = \overline{g}_{k_1}(x); \quad Q_1(x) = \overline{Q}_{k_1}(x) = \sum_{i=m_{k_1-1}}^{m_{k_1}-1} a_i^{(k_1)} \varphi_{\sigma_{k_1}(i)}(x). \tag{3.29}$$

Очевидно, что

$$||f(x) - f_{k_1}(x)||_{\infty} < \frac{\overline{\epsilon}}{2}. \tag{3.30}$$

Учитывая (3.19), (3.21), (3.23) и (3.29), будем иметь

$$g_1(x) = f_{k_1}(x), \; x \in E_{k_1} \,,$$

$$\max_{m_{k_1-1} \le m < m_{k_1}} \left\| \sum_{i=m_{k_1-1}}^{m} a_i^{(k_1)} \varphi_{\sigma_{k_1}(i)}(x) \right\|_C < 4 \cdot \left\| f_{k_1}(x) \right\|_{\infty} = 4 \cdot \left\| g_1(x) \right\|_C. \tag{3.31}$$

Положим

$$a_n = a_n^{(k)}, \;\; \sigma(n) = \sigma_k(n); \qquad n \in [m_{k-1}, m_k), \;\; k \ge k_1, \tag{3.32}$$

$$M_1 = m_{k_1-1}, \; \overline{M}_1 = m_{k_1} - 1, \;\; p(1) = 0 \quad \text{и} \quad b_0 = \frac{1}{4} \min\{\overline{\epsilon}\,, |a_{\overline{M}_1}|\}. \tag{3.33}$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 = \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{q-1}$, $p(1) << p(2) < \ldots < p(q-1)$, $\{b_{p(k)}\}_{k=2}^{q-1}$, функции $g_n(x) \in C_{[0,1]}$, $f_{\nu_n}(x)$, $1 < n \le q-1$ $(q-1 \ge 2)$ и полиномы

$$Q_n(x) = \sum_{k=M_n}^{\overline{M}_n} a_k \varphi_{\sigma(k)}(x) \,,$$

$$M_n = m_{\nu_n - 1}, \;\; \overline{M}_n = m_{\nu_n} - 1, \;\; M_2 > m_{k_1}, \;\; 1 < n \le q-1 \,,$$

удовлетворяющие условиям:

$$\max_{M_n \le N \le \overline{M}_n} \left\| \sum_{k=M_n}^{N} a_k \varphi_{\sigma(k)}(x) \right\|_C < 4^{-3n} \overline{\epsilon}, \;\; 1 < n \le q-1 \,,$$

$$p(n)=\min\{k\in\mathbb{N}:\ \ k\notin\left(\bigcup_{j=1}^{n}[M_j,\overline{M}_j]\right)\cup\{p(s)\}_{s=1}^{n-1}\}\},\ 1<n\le q-1\ ,$$

$$|a_{\overline{M}_n}|>b_{p(n)}>|a_{M_{n+1}}|,\ 1\le n<q-1;\qquad |a_{\overline{M}_{q-1}}|>b_{p(q-1)}\ ,$$

$$g_n(x)=f_{k_n}(x),\ \ x\in E_{\nu_n}\cap B,\ \ 1<n\le q-1\ ,$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\left[\left(Q_k(x)+b_{p(k)}\cdot\varphi_{p(k)}(x)\right)-g_k(x)\right]\right\|_C<4^{-8(n+1)}\overline{\epsilon},\ \ 1<n\le q-1, \tag{3.34}$$

$$||g_n(x)||_C<4^{-3n}\overline{\epsilon},\ \ 1<n\le q-1\ .$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q>\nu_{q-1}$ (функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (3.17)) таким образом, чтобы

$$\left\|f_{\nu_q}(x)-\left(f_{k_q}(x)-\sum_{n=1}^{q-1}\left[\left(Q_n(x)+b_{p(n)}\cdot\varphi_{p(n)}(x)\right)-g_n(x)\right]\right)\right\|_\infty<4^{-8(q+2)}\overline{\epsilon}, \tag{3.35}$$

$$|a_{M_q}|<b_{p(q-1)},\ \ M_q=m_{\nu_q-1}. \tag{3.36}$$

Ввиду того, что (см. (3.28) и (3.34))

$$\left\|f_{k_q}(x)-\sum_{n=1}^{q-1}\left[\left(Q_n(x)+b_{p(n)}\cdot\varphi_{p(n)}(x)\right)-g_n(x)\right]\right\|_\infty<4^{-8q+1}\overline{\epsilon},$$

из (3.35) получим

$$||f_{\nu_q}(x)||_\infty<4^{-8q+2}\overline{\epsilon}. \tag{3.37}$$

Положим

$$Q_q(x)=\overline{Q}_{\nu_q}(x)=\sum_{k=M_q}^{\overline{M}_q}a_k\varphi_{\sigma(k)},\ \ \overline{M}_q=m_{\nu_q}-1,\ \ M_q=m_{\nu_q-1}, \tag{3.38}$$

$$\tilde{g}_q(x)=f_{k_q}(x)+[\overline{g}_{\nu_q}(x)-f_{\nu_q}(x)], \tag{3.39}$$

$$p(q)=\min\{k\in\mathbb{N}:\ \ k\notin\left(\bigcup_{n=1}^{q}[M_n,\overline{M}_n]\right)\cup\{p(s)\}_{s=1}^{q-1}\}\}, \tag{3.40}$$

$$b_{p(q)}=\min\left(4^{-8(q+2)}\overline{\epsilon};\ \ \frac{|a_{\overline{M}_q}|}{2}\right). \tag{3.41}$$

Учитывая соотношения (3.19), (3.21)-(3.24), (3.32), (3.34)-(3.41), получим

$$\max_{M_q\le N<\overline{M}_q}\left\|\sum_{k=M_q}^{N}a_k\varphi_{\sigma(k)}(x)\right\|_C<4\cdot||f_{\nu_q}(x)||_\infty<4^{-3q}\overline{\epsilon}\ , \tag{3.42}$$

$$b_{p(q-1)} > |a_{M_q}| > ... > |a_k| > ... > |a_{\overline{M}_q}| > b_{p(q)} \, , \tag{3.43}$$

$$\tilde{g}_q(x) = f_{k_q}(x), \;\; x \in E_{\nu_q} \cap B, \tag{3.44}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{p(j)}(x) \right) - g_j(x) \right] + Q_q(x) + b_{p(q)} \cdot \varphi_{p(q)}(x) - \tilde{g}_q(x) \right\|_\infty \leq$$

$$\leq \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=1}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{p(j)}(x) \right) - g_j(x) \right] \right) \right\|_\infty +$$

$$+ ||b_{p(q)} \cdot \varphi_{p(q)}(x)||_C + ||\overline{Q}_{\nu_q}(x) - \overline{g}_{\nu_q}(x)||_C < 4^{-8q-9}\overline{\epsilon}, \tag{3.45}$$

$$||\tilde{g}_q(x)||_\infty \leq \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=1}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{p(j)}(x) \right) - g_j(x) \right] \right) \right\|_\infty +$$

$$+ ||\overline{g}_{\nu_q}(x)||_C + \left\| \sum_{j=1}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{p(j)}(x) \right) - g_j(x) \right] \right\|_C < 4^{-8q+3}\overline{\epsilon}. \tag{3.46}$$

Поскольку, как функции $g_j(x), \; j = 1, ..., q-1$, так и полинимы $Q_j(x)$, $j = 1, ..., q-1$, непрерывны на $[0, 1]$, сразу получим, что функция

$$\sum_{j=1}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{p(j)}(x) \right) - g_j(x) \right] + Q_q(x) + b_{p(q)} \cdot \varphi_{p(q)}(x)$$

непрерывна на $[0, 1]$ и ввиду того, что функция $\tilde{g}_q(x)$ имеет конечное число точек разрыва (скачков) на отрезке $[0, 1]$ (см. (3.17), (3.19), (3.39)), из (3.45) находим, что величины скачков в этих точках не превосходят $2 \cdot 4^{-8q-9}\overline{\epsilon}$. Следовательно, так как точки разрыва функции $\tilde{g}_q(x)$ являются двоично-рациональными (см. (3.17), (3.19), (3.39)), то можно найти непрерывную на $[0, 1]$ функцию $g_q(x)$, $g_q(x) = \tilde{g}_q(x)$ на B (см. (3.25)) и такую, что

$$||g_q(x) - \tilde{g}_q(x)||_\infty < 2 \cdot 4^{-8q-9}\overline{\epsilon} \, ,$$

так что из (3.44)-(3.46) имеем

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \;\; x \in E_{\nu_q} \cap B, \tag{3.47}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{q} \left[\left(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{p(j)}(x) \right) - g_j(x) \right] \right\|_C < 4^{-8(q+1)}\overline{\epsilon} \, , \tag{3.48}$$

$$||g_q(x)||_C \leq ||g_q(x) - \tilde{g}_q(x)||_\infty + ||\tilde{g}_q(x)||_\infty < 2 \cdot 4^{-8q-9}\overline{\epsilon} + 4^{-8q+3}\overline{\epsilon} < 4^{-3q}\overline{\epsilon} \, . \tag{3.49}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности непрерывных на $[0,1]$ функций $\{g_q(x)\}$, чисел $\{p(q)\}$, $\{b_{p(q)}\}$ и полиномов $\{Q_q(x)\}$, удовлетворяющих условиям (3.36), (3.38), (3.40)-(3.43),(3.47)-(3.49) для всех $q \geq 2$.

Учитывая выборы $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{[M_q, \overline{M}_q]\}_{q=1}^{\infty}$ и $\{p(q)\}_{q=1}^{\infty}$ (см. (3.18), (3.32), (3.33), (3.38), (3.40)), получим, что последовательность неотрицательных целых чисел

$$\sigma(M_1), ..., \sigma(\overline{M}_1), p(1),\ \sigma(M_2), ..., \sigma(\overline{M}_2), p(2)\ , ...$$

$$..., \sigma(M_n), ..., \sigma(k), ..., \sigma(\overline{M}_n), p(n)\ , ... \tag{3.50}$$

есть некоторая перестановка последовательности $0, 1, 2, ..., n, ...$

Последовательность (3.50) запишем в виде

$$\sigma_f(1),\ \ \sigma_f(2), ..., \sigma_f(k), ...$$

и определим функцию $\tilde{f}(x)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{\sigma_f(k)}(x)$ следующим образом:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x), \tag{3.51}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{\sigma_f(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=M_n}^{\overline{M}_n} a_k \varphi_{\sigma(k)}(x) + b_{p(n)} \cdot \varphi_{p(n)}(x) \right], \tag{3.52}$$

где $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть последовательность $a_{M_1}, ..., a_{\overline{M}_1},\ b_{p(1)}, ..., a_{M_n}, ..., a_{\overline{M}_n},\ b_{p(n)}, ...$ Отсюда и из условий (3.19), (3.21), (3.24), (3.26)-(3.30),(3.33),(3.43),(3.47) и (3.49) вытекает

$$|c_k| > |c_{k+1}|,\ \ \forall k \geq 1\ ,$$

$$\tilde{f}(x) \in C_{[0,1]},\ \ \tilde{f}(x) = f(x),\ \ \text{при}\ \ x \in E; \qquad \frac{1}{2}||f(x)||_C < ||\tilde{f}(x)||_C < 2||f(x)||_C\ .$$

Так что, учитывая (3.31)-(3.33), (3.41), (3.42), (3.49) и (3.51), для каждого натурального числа m будем иметь

$$\|G_m(\tilde{f})\|_C = \left\| \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_{\sigma(k)}(x) \right\|_C \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{M_n \leq N \leq \overline{M}_n} \left\| \sum_{k=M_n}^{N} a_k \varphi_{\sigma(k)}(x) \right\|_C \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left| b_{p(k)} \right| \leq$$

$$\leq 4 \left\| g_1(x) \right\|_C + \overline{\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \leq 5 \left\| \tilde{f}(x) \right\|_C \leq 10 \left\| f(x) \right\|_C.$$

Учитывая соотношения (3.41),(3.42),(3.48),(3.49),(3.51),(3.52) получим, что ряд (3.52) равномерно сходится к $\tilde{f}(x)$ и, следовательно, является переставленным рядом разложения функции $\tilde{f}(x)$ по системе Фабера-Шаудера.

Теорема 3.2 доказана.

Заключение

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

а) Построены подмножество отрезка $[0,1]$ мощности континуума и непрерывная на $[0,1]$ функция, жадный алгоритм которой по системе Фабера-Шаудера расходится к $+\infty$ во всех точках этого множества.

б) Построена непрерывная на $[0,1]$ функция, последовательность жадных аппроксимантов которой по системе Фабера-Шаудера имеет как подпоследовательность расходящейся к $+\infty$ почти всюду на $[0,1]$, так и подпоследовательность равномерно сходящейся к ней.

в)Построена непрерывная на $[0,1]$ функция, коэффициенты разложения которой по системе Фабера-Шаудера удовлетворяют условию

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right) \text{ при } n \to \infty ,$$

и жадный алгоритм которой расходится по норме пространства $C_{[0,1]}$.

г) Описаны подсистемы системы Фабера-Шаудера, которые являются квази-гриди базисами в $C_{[0,1]}$, на замыканиях своих линейных оболочек.

д) Описаны подсистемы системы Фабера-Шаудера, которые являются демократичными системами в $C_{[0,1]}$.

е) Для любого $\epsilon \in (0,1)$ построено измермое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\epsilon$ такое, что значения любой непрерывной на $[0,1]$ функции можно изменить вне E так, чтобы жадный алгоритм вновь полученной непрерывной функции по системе Фабера-Шаудера равномерно сходился к ней.

Литература

[1] DeVore R. A., Temlyakov V. N., "Some remarks on greedy algorithms Advances in Computational Math., N5, 1996, pp. 173-187.

[2] Temlyakov V. N., "The best m-term approximation and Greedy Algorithms Advances in Computational Math., N8, 1998, pp. 249-265.

[3] Temlyakov V. N., "Non-linear m-term approximation with regard to the multivariate Haar system East Journal on Approximations, v.4, N1, 1998, pp. 87-106.

[4] Konyagin S. V. and Temlyakov V. N., "A remark on Greedy approximation in Banach spaces East J. on Approx., v.5, 1999, pp. 1-15.

[5] Temlyakov V. N., "Nonlinear Methods of Approximation Found. Comput. Math., N3, 2003, pp. 33-107.

[6] Dilworth S. J., Kalton N. J., Kutzarova D., Temlyakov V. N., "The Tresholding Greedy Algorithm, Greedy Basis and Duality IMI-Preprints Series v.23, 2001, pp. 1-23.

[7] Dilworth S. J., Kalton N. J., Kutzarova D., "On the existance of almost greedy bases in Banach spaces STUDIA MATHEMATICA, v.159, N1, 2003, pp. 67-101.

[8] Wojtaszczyk P., "Greedy Algoritm for General Biorthogonal Systems Journal of Approximation Theory, v.107, 2000, pp. 293-314.

[9] Kamont A., "General Haar systems and greedy approximation Sudia Math., v.145, N2, 2001, pp. 165-184.

[10] Grigorian M. G., "Greedy algorithm and applications Isaac Int. Conf., 2002, Yerevan, Armenia, p. 35.

[11] Григорян М. Г., "О сходимости в метрике L^p жадного алгоритма по тригонометрической системе Изв. НАН Армении, т. 39, N4, 2004, ст. 89-116.

[12] Grigorian M. G., Zink R. E., "Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system Proc. Amer. Math. Soc., v. 134, N12, 2006, pp. 3495-3505.

[13] Григорян М. Г., Гогян С. Л., "Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций Analysis Mathematica, т. 32, N1, 2006, ст. 49-80.

[14] Геворкян Г., Камонт А., "Два замечания о квази-греди базисах в пространстве L_1 Известия НАН Армении, т.40, N1, 2005, ст. 2-14.

[15] Gogyan S. L., "On the greedy algorithm with regard to the Haar subsystems East J. on Approx., v.11, N2, 2005, pp. 221-236.

[16] Саакян А. А., "О сходимости жадного алгоритма для непрерывных функций после замены переменных Известия НАН Армении, Математика, т. 37, N4, 2002, ст. 63-72.

[17] Gribonval R., Nielsen M., "Some remarks on nonlinear approximation with Shauder bases East Journal on Approximations, v. 7, N3, 2001, pp. 267-285.

[18] Сильниченко А. В., "О скорости сходимости жадных алгоритмов Матем. заметки, т. 76, N4, 2004, ст. 628-632.

[19] Лившиц Е. Д., "Об оптимальности жадного алгоритма для некоторых классов функций"Матем. сб., т. 198, N5, 2007, ст. 95-114.

[20] Schauder J., "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Functionalraumen Math. Zeit., Bd. 26, S. 47-65, 1927.

[21] Лузин Н. Н., "К основной теореме интегрального исчисления Мат.Сб., т.28, N 2, 1912, ст. 266-294.

[22] Меньшов Д. Е., "О равномерной сходимости рядов Фурье Мат.Сб., т.53, N 2, 1942, ст. 67-96.

[23] Талалян А. А., "О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции, Мат. Заметки, т.33, N5, 1983, ст. 715-722".

[24] Арутюнян Ф. Г., "О рядах по системе Хаара Доклады АН Арм. ССР., т. 42, N3, 1966, ст. 134-140.

[25] Церетели О. Д., "О сходимости почти всюду рядов Фурье Сообщ. АН Груз. ССР, т. 57, N1, 1970, ст. 21-24.

[26] Price J. J., "Walsh series and adjustment of functions on small sets Illine is J. Math., v. 13, 1969, pp. 131-136.

[27] Осколков К. И., "Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры ДАН СССР-1976, т. 228, N2, ст. 304-306.

[28] Кашин.Б. С., Кошелева Г. Г., "Об одном подходе к теоремам об исправлении Вестник МГУ, Сер. мат. мех., N1, 1988, ст. 6-8.

[29] Хеладзе Ш. В., "Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрике L^1 Мат. сб., т. 107, N 2, 1978, ст. 245-258.

[30] Григорян М. Г., "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам Мат.Сб., т. 181, N 8, 1990, ст. 1011-1030.

[31] Grigorian M. G. "On the convergence of Fourier series in the metric of L^1, Analysis Math., v. 17, N3, 1991, pp. 211-237.

[32] Grigorian M. G. "On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces, Studia. Math., v. 134, N3, 1999, pp. 207-216.

[33] Grigorian M. G., Kazarian K. S. and Soria F., "Mean convergence of orthonormal Fourier series of mod. functions Trans. Amer. Math. Soc. (TAMS), v. 352, N8, 2000, pp. 3777-3799.

[34] Григорян М. Г., "Об усиленном L^p_μ свойстве Математический сборник, N10, 2003, ст. 77-106.

[35] Меньшов Д. Е., "О рядах Фурье непрерывных функций Уч.Записки, "Математика т. 148, N4, 1951, ст. 108-132.

[36] Меньшов Д. Е., "О рядах Фурье от суммируемых функций Тр.Моск. матем. общва, т.1, 1952, ст. 5-38.

[37] Ульянов П. Л., "Представление измеримых функций рядами и классы $\varphi(L)$ Успехи матем. наук, т. 27, 1972, ст. 3-52.

[38] Фихтенгольц Г. М., "Курс дифференциального и интегрального исчисления Наука, Москва, т. 2, 1970.

[39] Саргсян А. А., "О квази-гриди базисности системы Фабера - Шаудера Доклады НАН Арм., т. 105, N4, 2005, ст. 333-337.

[40] Sargsian A. A., "Greedy algorithm with regard to Schauder subsystems Harmonic Analysis and Approximations |||, 20-27 September 2005, Tsahkadzor, Armenia, pp. 65-66.

[41] Саргсян А. А., "Квази-гриди системность некоторых подсистем системы Фабера - Шаудера в $C_{[0,1]}$ Известия НАН Арм., т. 40, N3, 2005, ст. 46-54.

[42] Саргсян А. А., "О квази-гриди системности и демократичности некоторых подсистем системы Фабера - Шаудера Известия НАН Арм., т. 41, N2, 2006, ст. 57-74.

[43] Саргсян А. А., "Квази-гриди базисность системы Фабера - Шаудера Теория функций и смежные вопросы, Материалы конференции, посвященной 90-летию Айка Бадаляна, 2006, ст. 46-47.

[44] Григорян М. Г., Саргсян А. А., "Нелинейная аппроксимация по системе Фабера - Шаудера XIV Международная Конференция Математика, Экономика, Образование. IV Международный Симпозиум Ряды Фурье и Их Приложения, 2006 г, Ростов-на-Дону, Россия, ст. 87-88.

[45] Grigoryan M. G. and Sargsyan A. A., "Divergence a.e. of the greedy algorithm by Faber-Schauder system for continuous functions East Journal on Approx., v. 13, N 2, 2007, pp. 199-209.

[46] Саргсян А. А., "Расходимость жадного алгоритма по системе Фабера - Шаудера на множестве мощности континуума Известия НАН Арм., т. 42, N2, 2007, ст. 69-77.