РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

АМИРДЖАНЯН РАЧИЯ АШОТОВИЧ

О ФАКТОРИЗАЦИИ МЕРОМОРФНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

01.01.02- Дифференциальные уравнения

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук
А.Г.Камалян

Ереван -2008

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В теории краевых задач аналитических функций возникает необходимость представления матрицы-функции G (порядка $(n\times n)$) определенной на некотором замкнутом спрямляемом контуре Γ, разбивающий расширенную комплексную плоскость $\bar{C}$ на области Ω^+ (э 0) и Ω^- (э ∞), в виде

$$G(t)=G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t) \qquad (t\in\Gamma) \tag{0.1}$$

где предполагается, что элементы матриц-функций G_+, G_+^{-1}, G_-, G_-^{-1} принадлежат соответственно классам Смирнова $E_p\left(\Omega^+\right)$, $E_q\left(\Omega^+\right)$, $E_p\left(\Omega^-\right)$, $E_q\left(\Omega^-\right)$ ($1<p<\infty$, $q={p}/{(p-1)}$), $\Lambda(t)=diag\left[t^{\kappa_1},\dots,t^{\kappa_n}\right]$, а $\kappa_1\le\kappa_2\le\dots\le\kappa_n$ - целые числа.

Такого типа представление принято называть факторизацией (или факторизацией Винера-Хопфа) матрицы-функции G в пространстве L_p относительно контура Γ. Числа κ_i ($i=1,\dots,n$) называют частными индексами матрицы-функции G.

Задача факторизации матрицы функции тесно связана с проблемой нахождения явных решений векторной краевой задачи Римана. В терминах факторизации (0.1) выписываются условия разрешимости и общий вид решения вышеуказанной задачи, а через частные индексы выражаются дефектные числа задачи (т.е. размерность линеала решений однородной задачи и коразмерность замыкания образа).

Значение задачи факторизации матрицы-функции не исчерпывается только ее ролью в теории краевой задачи Римана и родственных ей теорий сингулярных интегральных операторов, теории интегральных и дискретных операторов Винера-Хопфа. К матричной задаче факторизации приводят также различные уравнения типа свертки (см., например, [1]-[4]). Задача факторизации, естественным образом, возникает в теории случайных процессов (см., например, [5], [6]) в теоретической физике (см., например, [7]-[9]), в ряде прикладных задач механики (см., например, [10]-[17]).

Идея факторизации заложена еще в ранних работах Племеля [18], Карлемана [19], Винера-Хопфа [20]. Первые результаты завершающего характера были получены в работах Ф.Д. Гахова [21-23], Н.И. Мусхелишвили, Н.П. Векуа [24-26], И.Ц. Гохберга, М.Г.Крейна [27, 28]. В этих работах впервые введены понятия частных индексов, получены необходимые и достаточные условия факторизуемости гельдеровских матриц-функций и матриц-функций из алгебры Винера, выведены явные формулы для факторов в скалярном случае ($n=1$).

В соответствии с внутренней логикой развития теории сингулярных интегральных операторов, операторов Винера-Хопфа и спецификой конкретных прикладных задач, дальнейшие усилия были направлены на изучение факторизации для более общих классов матриц-функций. Отказ от условия гельдеровости привел к необходимости рассмотрения задачи Римана в постановке И.И. Привалова, и, тем самым, к формированию понятия факторизации в классах L_p. Существенное влияние на дальнейшее развитие теории факторизации сыграли работы И.Б. Симоненко [29]-[31] относящиеся к факторизации произвольной ограниченной измеримой матрицы-функции. Критерии факторизуемости различных подклассов матриц-функций (кусочно-гельдеровых, непрерывных, кусочно-непрерывных, локально-секторальных, кусочно-квазинепрерывных и т.д.) получены в работах Б.В. Хведелидзе, Г.Ф. Манджавадзе [32, 33], Симоненко [34], И.Ц. Гохберга, Н.Я. Крупника [35, 36], Р.Г. Дугласа [37], Д.Е. Сарасона [38, 39], Г. Хайнига, Б. Зильбермана [40], И.М. Сптковского [41], А.Н. Сагинашвили [42] и многих других а второв.Современное состояние теории задачи факторизации в достаточно полной форме изложено в [25],[43]-[48]. Задача эффективного построения факторизации и вычисления частных индексов, – более или менее в общей ситуации, – остается нерешенной по настоящее время. Как известно, в скалярном случае ($n=1$) явная факторизация может быть построена с помощью интегралов Коши. Перенос этих явных формул на матричный случай ($n>1$) возможен только для весьма узкого класса матриц-функций (см. Г.Н. Чеботарев [49]). Другие эффективные методы факторизации (т.е. методы восстанавливающие факторы с помощью конечного числа алгебраических операций и вычислений интегралов) известны лишь для частных классов матриц-функций (см., например, [50]- [56], [23], [18], [59]-[67]).

Наиболее полное исследование в этом плане проведена для мероморфных матриц-функций (см.[68]- [69], [50], [23], [44]). Критерий факторизуемости для мероморфных матриц-функций представимых интегралом типа Коши получены И.М. Спитковским ([68], [44]). Эффективная факторизация предложенная в [44] для таких матриц-функций, основана на методе “отщепления нулей” Ф.Д. Гахова [23].

И.Ц. Гохбергом, Л. Лерером, Л. Родманом ([70]- [71]) получены явные формулы для частных индексов полиномиальных матриц-функций. Явная факторизация для мероморфных в Ω^+ и непрерывных в $\bar{\Omega}^+$ м.-ф. построена В.М. Адуковым [72], а для матриц-функций из класса $E_\infty\left(\Omega^\pm\right)$ А.Г.Камаляном [73]. Несмотря на различие методов, результаты всех этих работ формулируются в терминах степенных моментов (относительно контура) матрицы-функции являющей обратной к факторизуемой.

Как известно необходимым и достаточным условием факторизуемости непрерывной матрицы-функции является ее невырожденность.Между тем в приложениях часто возникает необходимость исследования задачи Римана с вырожденным коэффициентом либо соответствующих интегральных операторов с вырожденным символом.Различные методы исследования таких задач предложены в работах Ф.Д.Гахова, Н.П.Векуа, Б.В.Хведелидзе, Г.Н.Чеботарева,Н.Е.Товмасяна,Н.Б.Енгибаряна[58], и др. авторов (более подробно см[57]).

Аппарат факторизации Винера-Хопфа становится непригодным для исследования векторной задачи Римана, когда одно или оба из дефектных чисел бесконечны. По этой причине возникает желание видоизменения определения факторизации, таким образом, чтобы оставаясь эффективным инструментом исследования задачи Римана, оно охватывало и случай бесконечных дефектных чисел. Такое общее определение предложено И.М. Спитковским в работах [74], [75], где подробно исследуются свойства обобщенной факторизации и ее связь с задачей Римана.Другой подход предложен А.Г. Камаляном в работах [76], [77]. Этот подход основан на переосмыслении понятия частных индексов. Основываясь на некоторых алгебраических свойствах теплицевых операторов с символами $t^{-j}G$, понятие (не обязательно конечных) частных индексов вводится для произвольной матрицы-функции G принимающей почти всюду на контуре конечные значения. В случае конечных частных индексов матрица-функция G естественным образом допускает представление (01), где $G_{\pm} \in E_p\left(\Omega^{\pm}\right)$ ($1 \le p \le \infty$), $G_{\pm}^{-1}$ аналитична в $\Omega^{\pm}$, и для любой точки контура $z_0 \in \Gamma$ и любого постоянного вектора $V \in C^n$, либо вектор-функция $\varphi(z) = (z - z_0)^{-1} G_{+}(z) V$ не принадлежит $E_p\left(\Omega^{+}\right)$ либо вектор-функция $G\varphi$ не представляется в виде суммы вектор-функций из классов $E_p\left(\Omega^{+}\right)$ и $E_p\left(\Omega^{-}\right)$. Такой тип факторизации предложено называть индексной факторизацией (см. [77]). В отличии от [75] индексная факторизация допускает лишь конечную индексацию, но не предполагает принадлежность $G^{\pm 1}$ классу $L_1(\Gamma)$ и не исключает случаи $p = 1$ и $p = \infty$.

Индексная факторизация является естественным обобщением стандартной факторизации Винера-Хопфа в том смысле, что, если матрица-функция допускает факторизацию Винера-Хопфа, то ее индексная факторизация существует и одновременно является факторизацией Винера-Хопфа. Класс матриц-функций ,допускающих индексную факторизацию существенно шире класса матриц-функций допускающих факторизацию Винера-Хопфа.В связи с этим возникает необходимость в определении условий индексной факторизуемости, в построении эффективных методов индексной факторизации и в исследовании задачи Римана (в общей постановке) в терминах индексной факторизации.
Настоящая диссертация посвящена исследованию этих вопросов в случае мероморфных в $\Omega^{\pm}$ матриц-функций.

Цель работы

1. Описание классов матриц-функций мероморфных во внутренней либо во внешней области контура, допускающих индексную факторизацию.

2. Приведение явных формул для частных индексов и суммарного индекса матриц-функций из указанных классов.

3. Построение индексной факторизаций матриц-функций из указанного класса путем решения конечного числа явно выписываемых систем линейных алгебраических уравнений.

4.Исследование задачи Римана в терминах индексной факторизации.

Метод исследования. Применены методы теории функций и функционального анализа. Используется техника сингулярных интегральных операторов с ядром Коши.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность.

Работа носит теоретический характер и посвящена задаче факторизации мероморфных матриц-функций в более общей постановке, чем факторизация Винера-Хопфа.Приведены приложения в теории векторной задачи Римана.Полученные результаты могут быть применены в различных прикладных задачах, сводящихся к задаче факторизации мероморфных матриц-функций.

Содержание работы

Введем некоторые понятия и обозначения, используемые на протяжении всего текста.

Пусть $\Omega_j\,(j=0,1,...,m)$ односвязные ограниченные области комплексной плоскости C, такие что $\overline{\Omega}_j \subset \Omega_0, \overline{\Omega}_j \cap \overline{\Omega}_i = \emptyset (i,j=1,...,m)$ а границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j\,(j=0,...,m)$ являются замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми. Предполагается, что контур $\Gamma = \bigcup\limits_{j=0}^{m} \Gamma_j$ ориентирован таким образом, что при ее обходе, внутренняя область $\Omega^+ = \Omega_0 \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} \overline{\Omega}_j$ остается слева, внешняя область $\Omega^- = \overline{C} \setminus \overline{\Omega}^+$ справа.

Пусть $E_p^{\pm}(0 < p \le \infty)$ классы Смирнова областей $\Omega^{\pm}$ (см.[78]-[81] а также [44]), $\overset{0}{E}{}_p^{-}$ класс функций из E_p^- исчезающих на бесконечности, а $L_p^{\pm}$ $(\overset{0}{L}{}_p^{-})$ множество функций из $L_p\,(=L_p(\Gamma))$ совпадающих почти всюду на Γ с угловыми предельными значениями некоторой функции из $E_p^{\pm}$ $(\overset{0}{E}{}_p^{-})$.Пусть R множество рациональных функций, а R_0 -множество рациональных функций с полюсами вне контура Γ.

Множество мероморфных в Ω^+ (Ω^-) функций φ для каждого из которых существует ненулевой многочлен q_+ (существуют ненулевой многочлен q_- и целое число $k(k \geq 0)$ такое (такие), что $(q_+\varphi)(t) \in L_p^+$ $(t^{-k}(q_-\varphi)(t) \in \overset{0}{L_p^-})$ будем обозначать через $\tilde{M}_p^+(\tilde{M}_p^-)$. Мы также будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\mathcal{L}_p := L_p^+ \dot{+} \overset{0}{L_p^-}, \quad M_p^\pm := L_p^\pm \dot{+} R_0 \,, M^\pm := \bigcup_{p>0} M_p^\pm .$$

Операторы проектирующие прямую сумму $\mathcal{L}_p$ на $L_p^+(\overset{0}{L_p^-})$ вдоль $\overset{0}{L_p^-}(L_p^+)$ обозначим через $P_\pm$.

Под правой факторизаций Винера-Хопфа (далее WH(r, p) – факторизация) матриц-функции (далее м.-ф.) G в пространстве $L_p(1 < p < \infty)$ относительно контура Г (см[44]) будем понимать представление вида (0.1), где, $G_\pm^{-1} \in (L_q^\pm)^{n\times n}, (q = p/(p-1))$ $G_\pm \in (L_p^\pm)^{n\times n}$

$\Lambda(t) = diag[t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}, ..., t^{\kappa_n}]$

$(t \in \Gamma, \kappa_1 \leq ... \leq \kappa_n, \kappa_i \in Z, i = 1,...,n)$.

Пусть, G м.-ф. порядка $n \times n$,элементы которой почти всюду на контуре Г принимают конечные комплексные значения, D_p^+(G)- пространство всех вектор-функций (далее в.-ф.) $\varphi_+ \in (L_p^+)^n$, $(1 \leq p \leq \infty)$ таких, что $G\varphi_+ \in \mathcal{L}_p^n$, D_p^-(G)- пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in (L_p^-)^n$, для которых существует $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$ такое, что $\varphi_- = G\varphi$.

Через τ_α $(\alpha \in C)$ и τ'_α $(\alpha \in \overline{C}/\{0\})$ обозначим операторы сдвига действующие на функцию (соответственно на в.-ф. и м.-ф.) f по формулам $(\tau_\alpha f)(t) = (t-\alpha)f(t)$, $\tau'_\alpha = -(\alpha)^{-1}\tau_\alpha(\tau_0)^{-1}$. В частности предполагается, что $\tau'_\infty = (\tau_0)^{-1}$.

Пусть $T_p(G)$ -оператор Теплица ($1 \leq p \leq \infty$) с областью определения D_p^+(G) ,действующий по формуле

$$T_p(G)\varphi_+ = P_+(G\varphi_+) \; .$$

Обозначим через $N_{p,j}(G)(j \in Z)$ ядра опрератора $T_p(\tau_0^{-j}G)$. Множество

$$\hat{N}_{p,j}(G) := N_{p,j}(G) + \tau_0 N_{p,j}(G)$$

является подпространством $N_{p,j+1}(G)$. Определим числа

$$\mu_p(G,j) := \dim N_{p,j+1}(G) \big/ \hat{N}_{p,j}(G), \qquad \hat{n}(G) := \sum_{j\in Z} \mu_p(G,j).$$

Как известно(см. [76]) $\hat{n}(G) \le n$.

В случае $\hat{n}(G) = n$ будем говорить, что м.-ф. G допускает конечную (r_+, p)-индексацию.

Пусть

$$\{\eta_1,...,\eta_s,\} = \{j; \mu_p(G,j) > 0\}, \eta_1 < \eta_2 < ...\eta_s (s \in N) \text{ и } n_j = \mu_p(G,j).$$

Числа

$$\kappa_1 = ... = \kappa_{n_1} = \eta_1, \kappa_{n_1+1} = ... = \kappa_{n_1+n_2} = \eta_2, ..., \kappa_{n_1+n_2+...n_{s-1}+1} = ... = \kappa_{\hat{n}(G)} = \eta_s$$

будем называть (r_+, p)-частными индексами м.-ф. G.

Скажем, что м.-ф. G допускает (r_+, p)-индексную факторизацию(далее $I(r_+, p)-$ факторизацию) (см. [77]), если G допускает представление (01), а факторы $G_\pm$ и Λ удовлетворяют следующим условиям:

(а) $G_\pm \in (L_p^\pm)^{n\times n}$;

(б) для любых $z \in \overline{\Omega}^+, V \in C^n, V \ne 0,$ в.-ф. $(\tau_z)^{-1} G_+ V$ не принадлежит $D_p^+(G)$;

(в) для любых $z \in \Omega^-, V \in C^n, V \ne 0$ в.-ф. $(\tau'_z)^{-1} G_- V$ не принадлежит $D_p^-(G)$;

(г) $\Lambda(t) = diag[t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}, ..., t^{\kappa_n}]$, где $\kappa_1 \le \kappa_2 ... \le \kappa_n$ целые числа.

Пусть ϕ_z $(z \in \Gamma)$ является семейством диагональных м.-ф., диагональные элементы которой равны либо единице, либо линейной функции l(t)= t-z.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав,заключения и списка цитированной литературы,включающего 85 наименований.

Первая глава диссертации состоит из трех параграфов.

В §1 приведены необходимые нам сведения относительно $I(r_+, p)-$ факторизации и ее связь с WH(r, p) –факторизацией. В §2 изучается связь между $I(r_+, p)$, WH(r, p) факторизациями матриц-функций G и gG.

Теорема1.2.2 *Пусть* $1 \le p \le \infty$ *и* $g \in R$. *Тогда м.-ф. G и gG допускают* (r_+, p) *-конечную индексацию одновременно. Если*

$$g(z)=\prod_{i=1}^{s}(z-\alpha_i)\Big/\prod_{j=1}^{l}(z-\beta_j)(\alpha_i,\beta_j\in \Gamma;\alpha_i\neq\beta_j;i=1,...,s;j=1,...,l;s,l\in N)$$

а представления $G(t)=G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t)$, $g(t)G(t)=\widehat{G}_-(t)\widehat{\Lambda}(t)\widehat{G}_+^{-1}(t)$ *являются* (r_+,p) *-индексными факторизациями м.-ф. G и gG, то существуют м.-ф.* $F_{\alpha_i}\in\phi_{\alpha_i},F_{\beta_i}\in\phi_{\beta_i}(i=1,...s;j=1,...,l)$ *и существуют полиномиальные матрицы* $Q,Q_{\alpha_i},Q_{\beta_j}(i=1,...,s;j=1,...,l)$ *(detQ,* $\det Q_{\alpha_i},\det Q_{\beta_j}(i=1,...,s;j=1,...,l)$ *отличные от нуля постоянные) такие, что*

$$\widehat{G}_+=G_+Q_{\alpha_1}F_{\alpha_1}^{-1}...Q_{\alpha_s}F_{\alpha_s}^{-1}Q_{\beta_1}F_{\beta_1}...Q_{\beta_l}F_{\beta_l}Q,$$

$$\widehat{G}_-=G_-\tau_{\beta_1}^{-1}...\tau_{\beta_l}^{-1}\tau_{\alpha_1}...\tau_{\alpha_s}\Lambda Q_{\alpha_1}F_{\alpha_1}^{-1}...Q_{\alpha_s}F_{\alpha_s}^{-1}Q_{\beta_1}F_{\beta_1}...Q_{\beta_1}F_{\beta_1}Q\widehat{\Lambda}^{-1}\quad .$$

Теорема 1.2.3 *Пусть* $1<p<\infty$ *и* $g\in R$ *. Тогд если м.-ф. G и gG одновременно допускают WH(r, p) факторизацию относительно контура Г, то* $g^{\pm1}\in R_0$.

В §3 исследуется векторная краевая задача Римана в пространстве $L_p\ (1<p<\infty)$ с матричным коэффициентом G ,транспонированное которой допускает $I(r_+,q)$ ($q=p/(p-1)$) факторизацию:

$$G^T(t)=G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t)\qquad (0.2).$$

Для вектор-функции h ,определенной почти всюду на контуре Γ, требуется найти вектор-функции $\varphi_+\in(E_p^+)^n$, $\varphi_-\in(\overset{0}{E_p^-})^n$ ($1<p<\infty$) граничные значения которых почти всюду на Γ удовлетворяют условию:

$$\varphi_+(t)+G(t)\varphi_-(t)=h(t)\qquad (0.3).$$

Для м.-ф. G^T допускающую $I(r_+,q)$ ($q=p/(p-1)$)факторизацию (0.2) важную роль играет следующий класс полиномиальных в.-ф.

$\Phi(G)=\{g;(G_+^T)^{-1}g\in(L_p^+)^n,(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g\in(\overset{0}{L_p^-})^n\}$ ($\Lambda(t)=diag[\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_n]$) где, g векторный многочлен, j-ая компонента которого является многочленом степени не выше κ_j-1 при $\kappa_j>0$,и тождественно равна нуля при $\kappa_j\le 0$ ($j=1,...,n$).

Теорема1.3.2 *Пусть* (0.2) *является* $I(r_+, q)$ *факторизацией м.-ф.* G^T *.Тогда неоднородная задача Римана* (0.3) *разрешима тогда и только тогда, когда* $G_+^T h \in (\mathcal{L}_1)^n$ *и существует векторный многочлен* P *удовлетворяющий следующим условиям:*

а) j-ая компонента в.-ф. P *является многочленом степени не выше* $\kappa_j - 1$ *если* $\kappa_j > 0$*,и тождественно равна нулю при* $\kappa_j \le 0$*,*

б) $(G_+^T)^{-1}\mathsf{P} + (G_+^T)^{-1} P_+(G_+^T h) \in (L_p^+)^n$*,*

в) $-(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}\mathsf{P} + (G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}P_-(G_+^T h) \in (\overset{0}{L_p^-})^n$.

Если задача (0.3) *разрешима и* P *удовлетворяет условию а), б), в) то все решение* (0.3) *допускает представления:*

$$\varphi_+ = (G_+^T)^{-1} g + (G_+^T)^{-1}\mathsf{P} + (G_+^T)^{-1} P_+(G_+^T h) \qquad (0.4)$$

$$\varphi_- = -(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1} g - (G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}\mathsf{P} + (G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1} P_-(G_+^T h) \qquad (0.5)$$

где $g \in \Phi(G)$ *.Обратно,если* $g \in \Phi(G)$*,а* φ_+*,* φ_- *допускают представление* (0.4), (0.5) *то пара*

(φ_+, φ_-*) является решением задачи* (0.3).

Заметим что в частности число линейно независимых решениий однородной задачи (h=0)совпадает с $\dim \Phi(G)$ (теорема 1.3.1).

Глава II посвящена исследованию $I(r_+, p)-$ факторизации матриц-функций мероморфных во внутренней области контура. Глава состоит из четырех параграфов.

М.-Ф. $\mathcal{B}$, мероморфную в области Ω^+ и имеющую почти всюду на Γ угловые граничные значения,назовем p-допустимым в Ω^+ $(1 \le p \le \infty)$,если существует ненулевой многочлен g такой, что из условия $\varphi_+ \in D_p^+(\mathcal{B})$ следует $g\mathcal{B}\varphi_+ \in (L_1^+)^n$.Обозначим множество p-допустимых в Ω^+ м.-ф. через $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$. Подмножество $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ состоящих из аналитических м.-ф. в Ω^+ будем обозначать через $\mathcal{F}_p(\Omega^+)$.

В §1 исследуется задача существования $I(r_+, p)-$ факторизации для матриц-функций из класса $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ $(1 \le p \le \infty)$ **.**

Теорема2.1.1 *Пусть* $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ $(1 \le p \le \infty)$. *Для того, чтобы* $\mathcal{B}$ *допускала* $I(r_+, p)$-*факторизацию, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\tilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{p}}^+\right)^{n\times n}$.

В §2 получены явные формулы для (r_+, p)-частных индексов матриц-функции $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$,удовлетворяющих условию $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\mathrm{M}_{\mathrm{p}}^+\right)^{n\times n}$ $(1 \le p \le \infty)$.

Ниже для матрицы-функции $G \in (L_1)^{n\times n}$ примем следующее обозначение

$$< G >_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma t^{-k-1}G(t)dt \quad (k \in Z).$$

Пусть $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n\times n}$ и $P_-(\mathcal{B}^{-1}) \ne 0$. Наименьшее натуральное число ν_r, для которого существуют матрицы $Q_0^{(r)},...,Q_{\nu_r-1}^{(r)} \in C^{n\times n}$,удовлетворяющие соотношениям

$$< \mathcal{B}^{-1} >_{-(\nu_r+m)} + \sum_{k=0}^{\nu_r-1} < \mathcal{B}^{-1} >_{-(m+k)} Q_k^{(r)} = 0 \qquad (m \in N)$$

будем обозначать через $\nu_r(\mathcal{B}^{-1})$. Наименьшее натуральное число ν_l, для которого существуют матрицы $Q_0^{(r)},...,Q_{\nu_l-1}^{(r)} \in C^{n\times n}$,удовлетворяющие соотношениям

$$< \mathcal{B}^{-1} >_{-(\nu_l+m)} + \sum_{k=0}^{\nu_l-1} Q_k^{(l)} < \mathcal{B}^{-1} >_{-(m+k)} = 0 \qquad (m \in N)$$

будем обозначать через $\nu_l(\mathcal{B}^{-1})$. В случае, когда $P_-(\mathcal{B}^{-1}) = 0$ будем считать, что $\nu_r(\mathcal{B}^{-1}) = \nu_l(\mathcal{B}^{-1}) = 0$.

Для $\mathcal{B}^{-1} \in (M_1^+)^{n\times n}$ через $\mathcal{H}_s^+ (s \in N)$ будем обозначать ганкелеву матрицу:

$$\mathcal{H}_s^+ = \begin{bmatrix} < \mathcal{B}^{-1} >_{-1} & < \mathcal{B}^{-1} >_{-2} & \cdots & < \mathcal{B}^{-1} >_{-s} \\ < \mathcal{B}^{-1} >_{-2} & < \mathcal{B}^{-1} >_{-3} & \cdots & < \mathcal{B}^{-1} >_{-s-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ < \mathcal{B}^{-1} >_{-\nu_l(\mathcal{B}^{-1})} & < \mathcal{B}^{-1} >_{-\nu_l(\mathcal{B}^{-1})-1} & \cdots & < \mathcal{B}^{-1} >_{-\nu_l(\mathcal{B}^{-1})-s+1} \end{bmatrix}$$

Числа $h_s^+ (s \in Z, s \ge 0)$ определим следующим образом: $h_s^+ = rang\mathcal{H}_s^+$ при $s > 0$ и $h_0^+ = 0$.

Теорема.2.2.1. *Пусть* $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$ *и* $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\mathrm{M}_p^+\right)^{n\times n}$ $(1 \le p \le \infty)$. *Тогда* (r_+, p) *частные индексы м.-ф.* $\mathcal{B}$ *могут быть определены по формулам*

$$\kappa_i = card\{ j \mid n + h_{j-1}^+ - h_j^+ < i;\ j = 1,2,...,v_r\left(\mathcal{B}^{-1}\right)\} \quad i = 1,...,n,$$

если $v_r\left(\mathcal{B}^{-1}\right) \ne 0$ *и* $\kappa_1 = ... = \kappa_n = 0$, *если* $v_r\left(\mathcal{B}^{-1}\right) = 0$.

В §3 приводится конструкция $I(r_+, p)$-факторизации матрицы-функции $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$ удовлетворяющей условию $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\mathrm{M}_p^+\right)^{n\times n}$ $(1 \le p \le \infty)$.Для вектора $V = (v_1^T, v_2^T ... v_s^T) \in C^{ns}$ $(v_1, ..., v_s \in C^n, s \in N)$ определим векторы $\omega_s^1 V, \omega_s^2 V \in C^{n(s+1)}$ и полиномиальный вектор $\Psi_s V$ следующими равенствами: $\omega_s^1 V = (v_1^T, v_2^T ... v_s^T, 0)^T$,

$$\omega_s^2 V = V = (0, v_1^T, v_2^T ... v_s^T,)^T \qquad \Psi_s V = \sum_{j=1}^{s} v_j z^{j-1}.$$

Пусть $\theta_0 = Ker\mathcal{H}_1^+$ и $\theta_s\left(s \in N\right)$ некоторое прямое дополнение $\omega_s^1 Ker\mathcal{H}_s^+ + \omega_s^2 Ker\mathcal{H}_s^+$ *в* $Ker\mathcal{H}_{s+1}^+$.

Теорема.2.3.1 *Пусть* $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$, $\mathcal{B}^{-1} \in \left(M_p^+\right)^{n\times n}$, $v_l\left(\mathcal{B}^{-1}\right) > 0$ *и* $\eta_1 < \cdots < \eta_s$ $(1 \le p \le \infty)$ *все возможные значения* $\kappa_1 \le \cdots \le \kappa_n - \left(r_+, p\right)$ *частных индексов м.-ф.* $\mathcal{B}$. *Пусть* $\left\{X_{\eta_i,1}, ..., X_{\eta_i,n_i}\right\}$ *базисы пространств* $\theta_{\eta_i}\left(i = 1,...,s\right)$,*а в.-ф.* $U_{\eta_i,j}\left(i = 1,...,s;\ j = 1,...,n_i\right)$, *определены следующим образом*

$$U_{\eta_i,j} = \mathcal{B}^{-1}\Psi_{\eta_i+1}X_{\eta_i,j} \quad \left(i = 1,...,s,\ j = 1,...,n_i\right).$$

Тогда, если $\mathcal{B}_+ = \left[U_{\eta_1,1,...,}U_{\eta_1,n_1,}U_{\eta_2,1...,}U_{\eta_s,n_s}\right]$, $\Lambda(t) = diag\left[t^{\kappa_1}, ..., t^{\kappa_n}\right]$, $\mathcal{B}_- = \mathcal{B}\mathcal{B}_+\Lambda^{-1}$, *то представление*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_-\Lambda\mathcal{B}_+^{-1}$$

является $I\left(r_+, p\right)$ *-факторизацией м.-ф.* $\mathcal{B}$. *В случае* $v_l\left(\mathcal{B}^{-1}\right) = 0$, *представление*

$$\mathcal{B} = I_n I_n \left(\mathcal{B}^{-1}\right)^{-1}$$

является представление $I\left(r_+, p\right)$ *факторизацией м.-ф.* $\mathcal{B}$ *(*I_n *единичная матрица).*

В §4 приводятся некоторые обобщения.В частности доказываются, что результаты §2,3 легко обобщаются на случае матриц-функции $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)\,, \mathcal{B}^{-1} \in \left(M_p^+\right)^{n\times n}$ $(1 \le p \le \infty)$.В случае $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)\,, \mathcal{B}^{-1} \in \left(\tilde{M}_p^+\right)^{n\times n}$ факторизация может быть восстановлена по схеме §2 гл.I.

Приводится также формула для нахождения суммарного индекса.

Теорема.2.4.1 *Пусть* $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ *и* $\mathcal{B}^{-1} \in \left(M_p^+\right)^{n\times n}$ $(1 \le p \le \infty)$. *Тогда* $\left(r_+\,, p\right)$ *суммарный индекс м.-ф.* $\mathcal{B}$ *равен разности количества нулей и полюсов функции* $\det\mathcal{B}$ *в области* Ω^+ *с учетом их кратностей.*

В конце параграфа приводится уточнение теоремы1.3.2 для матриц-функции из класса $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$.

Глава III посвящена исследованию $I(r_+, p)-$факторизации матриц-функций мероморфных во внешней области контура. Глава состоит из пяти параграфов.

Для м.-ф. A определенной на контуре Γ через $\overset{0}{D}{}_p^-(A)(1 \le p \le \infty)$ будем обозначать пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in (\overset{0}{L}{}_p^-)^n$ таких, что $A\varphi_- \in \mathcal{L}_1^n$. Тогда мероморфную в Ω^- м.-ф. A и имеющую почти всюду на Γ угловые граничные значения назовем p-допустимым в Ω^-, если существуют ненулевой многочлен g и число $k \in Z(k \ge 0)$ такие, что из условия $\varphi_- \in \overset{0}{D}{}_p^-(A)$ следует, что $\tau_0^{-k} gA\varphi_- \in (\overset{0}{L}{}_1^-)^n$. Обозначим множество p-допустимых в Ω^- м.-ф. через $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$.

Подмножество $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ состоящих из аналитических м.-ф. в Ω^-, обозначим через $\mathcal{F}_p(\Omega^-)$.

В §1 исследуется задача существования $I(r_+, p)-$факторизации для матриц-функций удовлетворяющей условию: $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ $(1 \le p \le \infty)$.

Теорема.3.1.1 *Пусть* $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ $(1 \le p \le \infty)$. *Для того, чтобы м.-ф.* A *допускало* $I\left(r_+, p\right)$ *факторизацию необходимо и достаточно, чтобы* $A \in \left(\tilde{M}_p^-\right)^{n\times n}$.

В §2 изучаются некоторые свойства ганкелева оператора $H_P^-(A^{-1})\varphi = P_+(A^{-1}\varphi)$ $(1 \le p \le \infty)$ с областью определения $\overset{0}{D_p^-}(A)$.

В §3 получены явные формулы для (r_+, p)-частных индексов матриц-функции удовлетворяющих условию $A \in \left(L_p^-\right)^{n\times n}, A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap \left(M_1^-\right)^{n\times n}$ $(1 \le p \le \infty)$.

Пусть $A^{-1} \in (M_1^-)^{n\times n}$ и $P_+(A^{-1}) \ne 0$. Наименьшее число ν, для которого существуют матрицы $Q_1^{(r)},...,Q_\nu^{(r)} \in C^{n\times n}$,удовлетворяющие соотношениям

$$< A^{-1} >_{\nu+m} + \sum_{k=1}^{\nu} < A^{-1} >_{\nu+m-k} Q_k^{(r)} = 0 \qquad\qquad m \in N$$

будем обозначать через $\nu_r(A^{-1})$.Аналогично, наименьшее число ν, для которого существуют матрицы $Q_1^{(l)},...,Q_\nu^{(l)} \in C^{n\times n}$,удовлетворяющие соотношениям

$$< A^{-1} >_{\nu+m} + \sum_{k=1}^{\nu} Q_k^{(l)} < A^{-1} >_{\nu+m-k} = 0 \qquad\qquad m \in N$$

будем обозначать через $\nu_l(A^{-1})$. В случае, когда $P_+(A^{-1}) = 0$ будем считать, что $\nu_r(A^{-1}) = \nu_l(A^{-1}) = 0$.

Для $A^{-1} \in (M_1^-)^{n\times n}$ через $\mathcal{H}_s^-$ $(-s \in N)$ будем обозначать ганкелеву матрицу.

$$\mathcal{H}_s^- = \begin{bmatrix} < A^{-1} >_1 & < A^{-1} >_2 & ... & < A^{-1} >_{\nu_r(A^{-1})} \\ < A^{-1} >_2 & < A^{-1} >_3 & ... & < A^{-1} >_{\nu_r(A^{-1})+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ < A^{-1} >_{-s} & < A^{-1} >_{-s+1} & ... & < A^{-1} >_{-s+\nu_r(A^{-1})-1} \end{bmatrix}$$

Число $h_s^-(s \in Z, s \le 0)$ определим следующим образом: $h_s^- = rang\mathcal{H}_s^-$ при $s < 0$ и $h_0^- = 0$. Число h_s^- очевидным образом зависит от матрицы A^{-1} и контура интегрирования.Ниже во избежания двусмысленности мы это число будем обозначать также через $h_s^-(\Gamma, A^{-1})$.

Теорема.3.3.1. *Пусть* $A \in \left(L_p^-\right)^{n\times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap \left(M_1^-\right)^{n\times n}$. *Тогда* $\left(r_+, p\right)$ *частные индексы м.-ф.* A *в случае* $v_l\left(A^{-1}\right) > 0$ *могут быть определены по формулам:*

$$\kappa_i = -v_{l\left(A^{-1}\right)} + card\left\{ j \middle| h_{j-1}^- - h_j^- < i, j = -v_l\left(A^{-1}\right) + 1, \dots, 0 \right\}$$

$\left(i = 1, \dots, n\right)$. *Если* $v_l\left(A^{-1}\right) = 0$, *то* $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = 0$.

В §4 предложена схема факторизации в пространстве L_p $(1 \le p \le \infty)$ для м.-ф. $A \in \left(L_p^-\right)^{n\times n}$ удовлетворяющих условию $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap \left(M_1^-\right)^{n\times n}$ (теорема 3.4.1).В более общей ситуации $A \in \left(M_p^-\left(\Gamma\right)\right)^{n\times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ задача факторизации по контуру Γ может быть сведена к факторизации по контуру окаймляющему Γ.

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\limits_{i,j=0,\dots,m, i\ne j} d(\Gamma_i, \Gamma_j)$ и $U_\varepsilon = \{z \in C; |z| < \varepsilon\}$. Пусть $\Omega'_{\varepsilon,i}\left(i = 0, \dots, m\right)$ односвязные области с границей $\Gamma'_{\varepsilon,i} = \partial\Omega'_{\varepsilon,i}$ удовлетворяющие включениям: $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega'_{\varepsilon,0}$, $\Omega'_{\varepsilon,0} \subset \Omega_0 + U_\varepsilon$, $\bar{\Omega}'_{i,\varepsilon} \subset \Omega_i$, $\bar{\Omega}_i \subset \Omega'_{i,\varepsilon} + U_\varepsilon\left(i = 1, \dots, m\right)$. Будем предполагать, что $\Gamma'_{i,\varepsilon}\left(i = 0, \dots, m\right)$ являются замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми и контур $\Gamma'_\varepsilon = \bigcup\limits_{j=0}^{m} \Gamma'_{\varepsilon,j}$ ориентирован таким образом, что при ее обходе внутренняя область $\Omega'^+_\varepsilon = \Omega'_{0,\varepsilon} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} \bar{\Omega}'_{\varepsilon,j}$ остается слева, а внешняя область $\Omega'^-_\varepsilon = \bar{C} \setminus \bar{\Omega}'^+_\varepsilon$ справа.

Теорема.3.4.2. *Пусть* $A \in \left(M_p^-\left(\Gamma\right)\right)^{n\times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, *а целое неотрицательное число* k *и многочлен* q *нули которого лежат в* Ω^-, *таковы, что* $\tau_0^{-k} qA \in \left(L_p^-\left(\Gamma\right)\right)^{n\times n}$. *Тогда при достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *м.-ф.* $\tau_0^{-k} qA$ *допускает* $WH\left(r, p\right)$ *факторизацию относительно контура* Γ'_ε. *Если представление* $\tau_0^{-k} qA = \tilde{A}_- \tilde{\Lambda} \tilde{A}_+^{-1}$ *является* $WH\left(r, p\right)$ *факторизацией м.-ф.* $\tau_0^{-k} qA$ *относительно контура* Γ'_ε, *то* $\tilde{A}_+ \in R^{n\times n}$. *Если* $A_+ = \tilde{A}_+ q$, $\Lambda = \tilde{\Lambda}\tau_0^k$, $A_- = \tau_0^{-k} qA\tilde{A}_+ \tilde{\Lambda}^{-1}$, *то представление* $A = A_- \Lambda A_+^{-1}$ *является* $I\left(r_+, p\right)$ *факторизацией м.-ф.* A *на контуре* Γ. *В частности* $\left(r_+, p\right)$ *частные индексы м.-ф.* A *в случае* $v_l\left(\tau_0^{-k} q^{-1} A^{-1}\right) > 0$ *могут быть вычислены по формулам*

$$\kappa_i = -v_i\left(\tau_0^{-k} q^{-1} A^{-1}\right) + k + card\left\{ j \middle| h_{j-1}^-\left(\Gamma'_\varepsilon, \tau_0^{-k} q^{-1} A^{-1}\right) - h_j^-\left(\Gamma'_\varepsilon, \tau_0^{-k} q^{-1} A^{-1}\right) < i \right\}, i = 1, \ldots, n$$

Если $v_l\left(\tau_0^{-k} q A^{-1}\right) = 0$*, то* $\kappa_1 = \cdots = \kappa_n = k$ *.*

В §5 приведена схема восстановления факторизации р-допустимих в Ω^- м.-ф. A в наиболее общем случае $A \in \left(\tilde{M}_p^-\right)^{n\times n}$ $(1 < p < \infty)$.Приводится также формула для суммарного индекса в случае $A \in \left(M_p^-\right)^{n\times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ (теорема3.5.1).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах[82-85].

ГЛАВА I

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИНДЕКСНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ

§1 Предварительные сведения и некоторые следствия

1^0 Пусть $\Omega_j (j=0,1,\ldots,m)$ односвязные ограниченные области комплексной плоскости C, такие что $\bar{\Omega}_j \subset \Omega_0, \bar{\Omega}_j \cap \bar{\Omega}_i = \emptyset (i,j=1,\ldots,m)$, а границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j (j=0,\ldots,m)$ являются замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми. Предполагается, что контур $\Gamma = \bigcup_{j=0}^{m} \Gamma_j$ ориентирован таким образом, что при ее обходе внутренняя область $\Omega^+ = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \bar{\Omega}_j$ остается слева, а внешняя область $\Omega^- = \bar{C} \setminus \bar{\Omega}^+$ справа.

Пусть $E_p^{\pm}(0 < p \le \infty)$ классы Смирнова областей $\Omega^{\pm}$ (см.[78]-[81] а также [44]), $\overset{0}{E}{}_p^-$ класс функций из E_p^- исчезающих на бесконечности, а $L_p^{\pm}$ ($\overset{0}{L}{}_p^-$) множество функций из L_p $(= L_p(\Gamma))$ совпадающих почти всюду на Γ с угловыми предельными значениями некоторой функции из $E_p^{\pm}$ ($\overset{0}{E}{}_p^-$). Скажем, $\Gamma \in \mathcal{S}$ если все области $\Omega_j, C \setminus \bar{\Omega}_j (j=0,\ldots m)$ являются смирновскими (относительно определения смирновской области и достаточных условий $\Gamma \in \mathcal{S}$.см [78]-[81] а также [44]) . Ниже, через R будем обозначать множество рациональных функций, а через R_0-множество рациональных функций с полюсами вне контура Γ. Множество мероморфных в $\Omega^+ (\Omega^-)$ функций φ для каждого из которых существует ненулевой многочлен q_+ (существуют ненулевой многочлен q_- и целое число $k (k \ge 0)$ такое (такие), что $(q_+\varphi)(t) \in L_p^+$ $(t^{-k}(q_-\varphi)(t) \in \overset{0}{L}{}_p^-)$ будем обозначать через $\tilde{M}_p^+ (\tilde{M}_p^-)$. Мы также будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\mathcal{L}_p := L_p^+ \dot{+} \overset{0}{L}{}_p^-, \quad M_p^{\pm} := L_p^{\pm} \dot{+} R_0 \, , M^{\pm} := \bigcup_{p>0} M_p^{\pm} .$$

Пространство вектор-столбцов порядка n (матриц порядка $n \times m$) с элементами из линейного пространства X будем обозначать через $X^n(X^{n\times m})$, а операторы проектирующие прямую сумму $\mathcal{L}_p$ на $L_p^+(\overset{0}{L_p^-})$ вдоль $\overset{0}{L_p^-}(L_p^+)$ через $P_\pm$. Действие проекторов $P_\pm$ в $\mathcal{L}_p^n(\mathcal{L}_p^{n\times m})$ понимается покомпонентно.Вместо часто встречающихся слов матрица-функция и вектор-функция используются сокращения м.-ф. и в.-ф. соответственно.

2^0 Под правой факторизаций Винера-Хопфа (далее WH(r, p) –факторизация) м.-ф. G в пространстве $L_p(1 < p < \infty)$ относительно контура Г (см[44]) будем понимать представление

$$G(t) = G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t) \qquad (t \in \Gamma)$$

где ,$G_\pm \in (L_p^\pm)^{n\times n}$,$G_\pm^{-1} \in (L_q^\pm)^{n\times n}, (q = p/(p-1))\Lambda(t) = diag[t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}, ..., t^{\kappa_n}](\kappa_i \in Z, i = 1, ..., n, \kappa_1 \le ...\kappa_n)$.

Числа $\kappa_1, ..., \kappa_n$ будем называть WH(r, p) –частными индексами.

Задача W H(r, p)- факторизации м.-ф. G играют важную роль в теории краевой задачи Римана.Задача Римана с коэффициентом G состоит в определении пары аналитических в.-ф. $\varphi_+ \in (E_p^+)^n, \varphi_- \in (\overset{0}{E_p^-})^n$ граничные значения которых, почти всюду на контуре Г удовлетворяют условию:

$$\varphi_+(t) + G(t)\varphi_-(t) = h(t) \tag{1.1.1}$$

Решение задачи Римана в терминах факторизации Винера-Хопфа приведено в [44](см.теорема3.3.1из [44]).Приведем этот результат.

Теорема1.1.1 *Пусть* $1 < p < \infty$ *,* G^T *допускает WH(r, q) факторизацию* ($q = p/(p-1)$) *и представление*

$$G^T(t) = G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t)$$

является этой факторизацией, где $\Lambda(t) = diag\left[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}\right]$*.Тогда, задача (1.1.1) разрешима тогда и только тогда ,когда*

1)$G_+^T h \in (\mathcal{L}_1)^n$, $\varphi_0^+ = (G_+^T)^{-1}P_+(G_+^T h) \in (L_p^+)^n$, $\varphi_0^- = (G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}P_-(G_+^T h) \in (\overset{0}{L_p^-})^n$.

2)Если утверждение 1) имеет место, то все решения задачи (1.1.1) допускают представления:

$$\varphi_+ = \varphi_0^+ + (G_+^T)^{-1} g \ , \ \varphi_- = \varphi_0^- - (G_-^T)^{-1} \Lambda^{-1} g$$

где g *является многочленом степени не выше* $\kappa_j - 1$ *ели* $\kappa_j > 0$ *,и тождественно равна нулю при* $\kappa_j \le 0$ *.*

Для м.-ф. из класса $(M_q^+)^{n\times n}, (M_p^-)^{n\times n}$ $(1 < p < \infty$, $q = p/(p-1))$ известны следующие критерии WH(r, p)-факторизуемости(см. [44]).

Теорема1.1.2*. Пусть* $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$ *.М.-ф.* $G \in (M_q^+)^{n\times n} (G \in (M_p^-)^{n\times n})$ *допускает WH(r, p) факторизацию тогда и только тогда,когда* $G^{-1} \in (M_p^+)^{n\times n} (G^{-1} \in (M_q^-)^{n\times n})$ *.Если дополнительно* $\Gamma \in \mathcal{S}$ *то м.-ф.* $G \in (M^+)^{n\times n} (G^{-1} \in (M^-)^{n\times n})$ *допускает WH(r, p) факторизацию тогда и только тогда,когда* $G \in (L_p)^{n\times n} (G \in (L_q)^{n\times n})$ *и* $G^{-1} \in (M_q^+)^{n\times n} (G^{-1} \in (M_p^-)^{n\times n})$ *.*

3^0В работе [77] введены понятия (r_+, p)-частных индексов и (r_+, p) индексной факторизации м.-ф. G (далее $\mathrm{I}(r_+, p)$ факторизация $(1 \le p \le \infty$)).Приведем определения и свойства этих понятий,а также некоторые следствия известных резултатов.

Пусть $1 \le p \le \infty$, G м.-ф. порядка $n \times n$, элементы которой почти всюду на контуре Г принимают конечные комплексные значения, D_p^+(G)- пространство всех в.-ф. $\varphi_+ \in (L_p^+)^n$, таких, что $G\varphi_+ \in \mathcal{L}_p^n$, D_p^-(G)- пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in (L_p^-)^n$, для которых существует $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$ такое, что $\varphi_- = G\varphi$.

Через τ_α $(\alpha \in C)$ и τ'_α $(\alpha \in \overline{C}/\{0\})$ обозначим операторы сдвига действующие на функцию (соответственно на в.-ф. и м.-ф.) f по формулам $(\tau_\alpha f)(t) = (t-\alpha) f(t)$, $\tau'_\alpha = -(\alpha)^{-1} \tau_\alpha (\tau_0)^{-1}$. В частности предполагается, что $\tau'_\infty = (\tau_0)^{-1}$.

Пусть $T_p(G)$ оператор Теплица ($1 \le p \le \infty$) с областью определения D_p^+(G) действующий по формуле

$$T_p(G)\varphi_+ = P_+(G\varphi_+) \ .$$

Обозначим через $N_{p,j}(G)(j \in Z)$ ядра опрератора $T_p(\tau_0^{-j}G)$. Следуя [76] ,подпространство

$$\hat{N}_{p,j}(G) = N_{p,j}(G) + \tau_0 N_{p,j}(G)$$

будем называть $(p, j)_+$-наследственным подпространством, а его произвольное прямое дополнение $M_{p,j}(G)$ в $N_{p,j+1}(G)$ $(p, j)_+$-индексным подпространством м.-ф. G. Определим числа

$$\mu_p(G, j) := \dim M_{p,j}(G), \qquad \hat{n}(G) := \sum_{j \in Z} \mu_p(G, j).$$

В [76] доказана следующая теорема:

Теорема1.1.3 *За исключением,быть может конечного числа* $j \in Z$ *,все* $(p, j)_+$ *индексные подпространства являются нулевыми.Кроме того, для произвольного набора* $(p, j)_+$ *индексных подпространств* $M_{p,j}(G)$ *справедливо неравенство*: $\hat{n}(G) \le n$.

В случае $\hat{n}(G) = n$ будем говорить, что м.-ф. G допускает конечную (r_+, p)-индексацию.

Пусть

$$\{\eta_1, ..., \eta_s,\} = \{j; \mu_p(G, j) > 0\}, \eta_1 < \eta_2 < ...\eta_s (s \in N) \text{ и } n_j = \mu_p(G, j).$$

Числа

$$\kappa_1 = ... = \kappa_{n_1} = \eta_1, \kappa_{n_1+1} = ... = \kappa_{n_1+n_2} = \eta_2, ..., \kappa_{n_1+n_2+...n_{s-1}+1} = ... = \kappa_{\hat{n}(G)} = \eta_s$$

будем называть (r_+, p)-частными индексами м.-ф. G. Для каждой точки $z \in \Omega^+$ рассмотрим также подпространства

$$N_{p,j}(G; z) = \{\varphi(z); \varphi \in N_{p,j}(G)\} \ , M_{p,j}(G; z) = \{\varphi(z); \varphi \in M_{p,j}(G)\} .$$

Если для некоторого $j \in Z$

$$\dim N_{p,j}(G; z_+) < \max_{z \in \Omega^+} \dim N_{p,j}(G; z)$$

то $z_+ \in \Omega^+$ назовем *s*-точкой м.-ф.G. В [76] доказана также следующая теорема:

Теорема1.1.4.*Для произвольного* $j \in Z$ *справедливы равенства:*

$$N_{p,j}(G;z)\dot{+}M_{p,j}(G;z)=N_{p,j+1}(G;z) \qquad (z\in\Omega^{+}) \ .$$

Для любого $z\in\Omega^{+}$ *имеет место равенство:*

$$\dim M_{p,j}(G;z)=\dim M_{p,j}(G) \ .$$

Множество s-точек в Ω^{+} *не более чем счетно и не имеет предельных точек в* Ω^{+}. *Если одно из неравенств*

$$\dim N_{p,j}(G;z_{+})<\max_{z\in\Omega^{+}}\dim N_{p,j}(G;z) \qquad (j\in Z\ )$$

имеет место при некотором j *,то оно справедливо при всех* j .

Из этих равенств следует,что число $\dim N_{p,j}(G;z)$ одновременно для всех $j\le\eta_1$ и почти для всех $z\in\Omega^{+}$ является постоянным,которое обозначим через $\mu_p(G,-\infty)$. Из этих равенств следует также(см.также [77]), что число $\dim N_{p,j}(G;z)$ одновременно для всех $j>\eta_s$ и почти для всех $z\in\Omega^{+}$,равно $\mu_p(G,-\infty)+\hat{n}(G)$ а для остальных z не превышает это число. Из равенства

$$\dim M_{p,j}(G;z)=\dim M_{p,j}(G) \quad (z\in\Omega^{+}).$$

следует также,следующие утверждение:

Предложение1.1.1 *Если* $\varphi\in M_{p,j}(G)(j\in Z)$ *и* $\varphi(z)=0(z\in\Omega^{+})$ *то* $\varphi=0$.

Определим

$$\mu_p(G,+\infty):=n-\hat{n}(G)-\mu_p(G,-\infty) \qquad .$$

Из теоремы 1.1.4 в частности следуют утверждения:

Предложение1.1.2 *Число* $\mu_p(G,-\infty)$ *равно нулю тогда и только тогда, когда существует* $j\in Z$ *такое, что* $\dim N_{p,j}(G;z)=0$ ($z\in\Omega^{+}$).

Предложение1.1.3 *Число* $\mu_p(G,+\infty)$ *равен нулю тогда и только тогда, когда существует* $j\in Z$ *и* $z\in\Omega^{+}$ *такие, что* $\dim N_{p,j}(G;z)=n$.

В работе [77] доказана, следующая теорема:

Теорема1.1.5 *Пусть для М.-ф.* G *порядка* $n \times n$ *элементы которой почти всюду на контуре* Γ *принимают конечные комплексные значения число* $\mu_p(G, -\infty) = 0$.

Тогда для любой $k \in Z$ *имеет место равенство:*

$$\dim N_{p,k}(G) = \sum_{j<k} (k-j)\mu_p(G, j) .$$

Отсюда пользуясь стандартными рассуждениями(см.например [73]) нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение1.1.4 *Пусть* $\mu_p(G, -\infty) = 0$ *, а* η_0 *и* η_{s+1} *произвольные целые числа, удовлетворяющие условиям* $\eta_0 \le \eta_1, \eta_{s+1} \ge \eta_s, \eta_0 < \eta_{s+1}$*, тогда* (r_+, p) *-частные индексы м.-ф.* G *удовлетворяют равенствам:*

$$\kappa_i = \eta_0 + card\{j \mid \dim N_{p,j}(G) - \dim N_{p,j-1}(G) < i, j = \eta_0 + 1, ... \eta_{s+1}\}, i = 1, 2, ..., \hat{n}(G). \qquad (1.1.2).$$

4^0 Скажем, что м.-ф. G допускает (r_+, p)-индексную факторизацию (см. [77]), если G допускает представление (01) , а факторы $G_\pm$ и Λ удовлетворяют следующим условиям:

(а) $G_\pm \in (L_p^\pm)^{n \times n}$;

(б) для любых $z \in \overline{\Omega}^+, V \in C^n, V \ne 0,$ в.-ф. $(\tau_z)^{-1} G_+ V$ не принадлежит $D_p^+(G)$;

(в) для любых $z \in \Omega^-, V \in C^n, V \ne 0$ в.-ф. $(\tau'_z)^{-1} G_- V$ не принадлежит $D_p^-(G)$;

(г) $\Lambda(t) = diag[\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n]$, где $\kappa_1 \le \kappa_2 ... \le \kappa_n$ целые числа.

Приведем ряд утверждений доказанных в [76]-[77] в удобной нам формулировке.

Теорема1.1.6 *Пусть м.-ф.* G *допускает конечную* (r_+, p) *индексацию,*

$$\{\eta_1, ..., \eta_s,\} = \{j; \mu_p(G, j) > 0\}, (s \in N)$$

А $\kappa_1 \le ... \le \kappa_n$ *-ее* (r_+, p) *-частные индексы. Тогда м.-ф.* G *допускает* $I(r_+, p)$ *факторизацию. Кроме того, если* $M_{p,\eta_k}(G)(k = 1, ... s)$ *некоторые* $(p, \eta_k)_+$ *-индексные подпространства м.-ф. G, а столбцы м.-ф.* G'_+ *являются базисом пространства*

$$M_{p,\eta_1}(G) \dot{+} .... \dot{+} M_{p,\eta_s}(G)$$

то представление

$$G = G'_- \Lambda (G'_+)^{-1}$$

где $\Lambda(t)=diag[t^{\kappa_1},...,t^{\kappa_n}]$, $G'_-=GG'_+\Lambda^{-1}$ *является* $I(r_+,p)$ *факторизацией м.-ф. G.*

Теорема1.1.7 *Пусть* $\mu_p(G,-\infty)=0$ *и представление*

$$G=G_-\Lambda G_+^{-1}$$

является $I(r_+,p)$ *факторизацией м.-ф. G с* $\Lambda(t)=diag[t^{\kappa_1},...,t^{\kappa_n}]$. *Тогда м.-ф. G допускает конечную* (r_+,p)*-индексацию с* (r_+,p) *частными индексами равными* $\kappa_1,...,\kappa_n$. *Если* $\{\eta_1,...,\eta_s,\}=\{j;\mu_p(G,j)>0\},(s\in N)$ $n_j=\mu_p(G,\eta_j)(j=1,...,s)$ *и* $G_{11}^+,...G_{1n_1}^+,G_{21}^+,...,G_{2n_2}^+,...,G_{s1}^+,...,G_{sn_s}^+$ *столбцы м.-ф.* G_+, *то* $span\{G_{k1}^+,...,G_{kn_k}^+\}(k=1,...,s)$ *является* $(p,\eta_k)_+$ *-индексным подпространством м.-ф. G.*

Теорема.1.1.8 Пусть $\Lambda_\kappa(t)=diag[t^{\kappa_1},...,t^{\kappa_n}],\Lambda_\chi(t)=diag[t^{\chi_1},...,t^{\chi_n}]$.*Если* $G=G_-\Lambda_\kappa G_+^{-1}$, *и* $G=G'_-\Lambda_\chi(G'_+)^{-1}$ *две различные* (r_+,p) *индексные факторизации м.-ф. G, то* $\Lambda_\kappa=\Lambda_\chi$, *и существует невырожденная полиномиальная м.-ф.* $Q=(q_{ij})_{i,j=1}^n$ *с* $q_{ij}=0$ *при* $j<i$, $\deg q_{ij}\le\kappa_j-\kappa_i$ *при* $j\ge i$ *и такая, что* $G'_+=G_+Q$, $G'_-=G_-\Lambda_\kappa Q\Lambda_\kappa^{-1}$.

Теорема1.1.9*Если м.-ф. G допускает WH (r, p) факторизацию, то она имеет* (r_+,p) *- конечную индексацию, причем ее* (r_+,p) *- частные индексы совпадают с ее WH(r, p) частными индексами, а ее WH(r, p) – факторизация является одновременно* (r_+,p) *- индексной факторизацией. Для таких м.-ф. любая* (r_+,p) *-индексная факторизациая является WH(r, p) -факторизацией.*

Предложение1.1.5 *Если м.-ф. G обладает тем свойством, что из условий* $\varphi\in\mathcal{L}_p^n$ *и* $G\varphi=0$ *следует, что* $\varphi=0$, *то условие (в)* $I(r_+,p)$ *факторизации выполняется и для* $z\in\Gamma$.

§2 О влиянии простейших сомножителей на индексную факторизацию матрицы-функции

1^0 Хорошо известно,что непрерывная м.-ф. *G* допускает WH(r,p) $(1<p<\infty)$ факторизацию тогда и только тогда когда $\det G(t)\ne0$ $(t\in\Gamma)$.Отсюда в чатности следует, что $\tau_\alpha G$ $(\alpha\in\Gamma)$ уже не допускает WH(r, p)- факторизацию.В этом параграфе мы докажем,что в отличии от факторизации Винера-Хопфа, индексная факторизация инвариантна относительно операторов сдвига $\tau_\alpha^{\pm 1}$ $(\alpha \in \Gamma)$.Основной целью этого параграфа является восстановление $I(r_+, p)$ $(1 \le p \le \infty)$ факторизации м.-ф. $\tau_\alpha^{\pm 1} G$ $(\alpha \in \Gamma)$ по $I(r_+, p)$ факторизации м.-ф. G . Попутно докажем что для любого $G \in L_1^{n\times n}$ м.-ф. G и $\tau_\alpha\, G$ не могут одновременно допускать WH(r, p) -факторизацию $(1 < p < \infty)$.

Введем некоторые понятия необходимые для дальнешего.

Пространства $K^{\pm}_{p,\alpha,j}, \widehat{K}^{\pm}_{p,\alpha,j}$ $(j \in Z)$ $(\alpha \in \Gamma\ )$ $(1 \le p \le \infty)$ определим следующим образом:

$$K^{+}_{p,\alpha,j}(G) = \{\varphi \in N_{p,j}(G); \tau_\alpha^{-1}\varphi \in (L_p^+)^n\}, \qquad K^{-}_{p,\alpha,j}(G) = \{\varphi \in N_{p,j}(G); \tau_\alpha^{-1} G\varphi \in \mathcal{L}_p^n\}$$

$$\widehat{K}^{+}_{p,\alpha,j}(G) = \{\varphi \in \widehat{N}_{p,j}(G); \tau_\alpha^{-1}\varphi \in (L_p^+)^n\}, \qquad \widehat{K}^{-}_{p,\alpha,j}(G) = \{\varphi \in \widehat{N}_{p,j}(G); \tau_\alpha^{-1} G\varphi \in \mathcal{L}_p^n\}$$

Поскольку

$$\widehat{N}_{p,j}(G) \subset N_{p,j+1}(G)$$

то

$$\widehat{K}^{\pm}_{p,\alpha,j}(G) \subset K^{\pm}_{p,\alpha,j+1}(G) .$$

Заметим, что любое прямое дополнение $\widehat{K}^{\pm}_{p,\alpha,j}(G)$ в $K^{\pm}_{p,\alpha,j+1}(G)$ имеет лишь нулевое пересечение с $\widehat{N}_{p,j}(G)$. Действительно, пусть

$$K^{+}_{p,\alpha,j+1}(G) = \widehat{K}^{+}_{p,\alpha,j}(G) \dotplus F_j^+ \quad (K^{-}_{p,\alpha,j+1}(G) = \widehat{K}^{-}_{p,\alpha,j}(G) \dotplus F_j^-)$$

и

$$\varphi \in \widehat{N}^{+}_{p,\alpha,j} \cap F_j^+ \qquad\qquad (\varphi \in \widehat{N}^{-}_{p,\alpha,j} \cap F_j^-).$$

Тогда очевидно, что

$$\tau_\alpha^{-1}\varphi \in (L_p^+)^n \, (\tau_\alpha^{-1} G\varphi \in \mathcal{L}_p^n),$$

т.е.

$$\varphi \in \widehat{K}^{+}_{p,\alpha,j}(G)\, (\varphi \in \widehat{K}^{-}_{p,\alpha,j}(G)).$$

Отсюда следует,что $\varphi = 0$. И потому любое прямое дополнение $\widehat{K}^{\pm}_{p,\alpha,j}(G)$ в пространстве $K^{\pm}_{p,\alpha,j+1}(G)$ имеет лишь нулевое пересечение с $\widehat{N}_{p,j}(G)$.

Условимся $(p, j)_+$- индексное подпространство м.-ф. G содержащее некоторое прямое дополнение $\widehat{K}^{\pm}_{p,\alpha,j}(G)$ в $K^{\pm}_{p,\alpha,j+1}(G)$ называть $(p, j)_+$- индексным подпространством типа $(\alpha_{\pm})$. Подпространство $M_{p,\alpha_{\pm},j}(G)$ типа $(\alpha_{\pm})$ допускает представление в виде прямой суммы

$$\overset{1}{M}_{p,\alpha_{\pm},j}(G) \dot{+} \overset{2}{M}_{p,\alpha_{\pm},j}(G),$$

где $\overset{1}{M}_{p,\alpha_{\pm},j}(G)$ являются прямым дополнением $\widehat{K}^{\pm}_{p,\alpha,j}(G)$ в $K^{\pm}_{p,\alpha,j+1}(G)$,а $\overset{2}{M}_{p,\alpha_{\pm},j}(G)$ являются прямым дополнением $\widehat{N}_{p,j}(G) \dot{+} \overset{1}{M}_{p,\alpha_{\pm},j}(G)$ в $N_{p,j+1}(G)$. Такого типа представления будем называть направленными. Для каждого $z \in \Omega^+$ подпространства $\overset{k}{M}_{p,\alpha_{\pm},j}(G;z)$ ($k = 1,2$) пространства C^n определим следующим образом:

$$\overset{k}{M}_{p,\alpha_{\pm},j}(G;z) = \{\varphi(z); \varphi \in \overset{k}{M}_{p,\alpha_{\pm},j}(G)\} \quad .$$

Заметим, что справедливы равенства:

$$M_{p,\alpha_+,j}(G;z) = \overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j}(G;z) \dot{+} \overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G;z) \qquad (1.2.1)$$

$$M_{p,\alpha_-,j}(G;z) = \overset{1}{M}_{p,\alpha_-,j}(G;z) \dot{+} \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G;z). \qquad (1.2.2).$$

Действительно, если

$$y \in \overset{1}{M}_{p,\alpha_{\pm},j}(G;z) \cap \overset{2}{M}_{p,\alpha_{\pm},j}(G;z)$$

то существуют

$$\varphi_k \in \overset{k}{M}_{p,\alpha_{\pm},j}(G)(k = 1,2)$$

такие что

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z) = y,$$

т.е.

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(z) = 0.$$

В силу предложении1.1.1 следует

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Поскольку

$$\varphi_1 \in \overset{1}{M}_{p,\alpha_\pm,j}(G) \cap \overset{2}{M}_{p,\alpha_\pm,j}(G)$$

то $$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

т.е. y=0. Последнее означает справедливость представление (1.2.1), (1.2.2).

2^0 Перейдем к задаче описания индексных подпространств м.-ф. $\tau_\alpha^{\pm 1} G$ $(\alpha \in \Gamma)$ посредством индексных подпространств м.-ф. G .Предварительно докажем следующие две леммы.

Лемма1.2.1Пусть $1 \le p \le \infty$ *. Тогда для любого* $j \in Z$ *,* $\alpha \in \Gamma$ *имеют место соотношения:*

1) $\tau_\alpha \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G) \cap \overset{1}{M}_{p,\alpha_-,j+1}(G) = \{0\}$,

2) $(\tau_\alpha \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G) \dotplus \overset{1}{M}_{p,\alpha_-,j+1}(G)) \subset N_{p,j+1}(\tau_\alpha^{-1} G)$,

3) $(\tau_\alpha \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G) \dotplus \overset{1}{M}_{p,\alpha_-,j+1}(G)) \cap \widehat{N}_{p,j}(\tau_\alpha^{-1} G) = \{0\}$ *.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi \in \tau_\alpha \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G) \cap \overset{1}{M}_{p,\alpha_-,j+1}(G)$$

легко видеть, что

$$\{\varphi(0); \varphi \in \tau_\alpha \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G)\} = \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G;0)\} .$$

Следовательно

$$\varphi(0) \in M_{p,\alpha_-,j}(G;0) \cap M_{p,\alpha_-,j+1}(G;0).$$

В силу теоремы1.1.4 имеет $\varphi(0) = 0$. Доказательство утверждение 1) следует из предложении1.1.1.

Пусть $\varphi_+ \in \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G)$.Поскольку существует $\varphi_- \in (\overset{\circ}{L}{}_p^-)^n$ такая, что

$$\tau_0^{-(j+1)} \tau_\alpha^{-1} G \tau_\alpha \varphi_+ = \varphi_- ,$$

то

$$\tau_\alpha \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G) \subset N_{p,j+1}(\tau_\alpha^{-1} G).$$

Пусть теперь $\varphi_+ \in \overset{1}{M}_{p,\alpha_-,j+1}(G)$. Тогда существуют

$$\varphi_- \in (\overset{\circ}{L_p^-})^n, \psi_+ \in (L_p^+)^n \text{ и } \psi_- \in (\overset{\circ}{L_p^-})^n$$

такие что

$$\tau_0^{-(j+1)} G\varphi_+ = \varphi_- \qquad \text{и} \qquad \tau_0^{-(j+2)} G\tau_\alpha^{-1}\varphi_+ = \psi_+ + \psi_-.$$

Отсюда

$$\tau_\alpha^{-1}\varphi_- = \psi_+ + \psi_-$$

т.е.

$$\tau_\alpha\psi_+ = \varphi_- - \tau_\alpha\psi_-.$$

Поскольку $\tau_\alpha\psi_+ \in (L_p^+)^n$ а $\varphi_- - \tau_\alpha\psi_- \in (L_p^-)^n$ то

$$\tau_\alpha\psi_+ = c\,,\ (c \in C^n\,).$$

Следовательно $\psi_+ = 0$. Последнее означает что

$$\tau_0^{-(j+1)}\tau_\alpha^{-1} G\varphi_+ = \tau_0\tau_\alpha^{-1}\varphi_- \in (\overset{\circ}{L_p^-})^n.$$

Утверждение 2) доказано.

Пусть

$$\varphi \in (\tau_\alpha \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G) \dot{+} \overset{1}{M}_{p,\alpha_-,j+1}(G)) \cap \widehat{N}_{p,j}(\tau_\alpha^{-1}G).$$

Нетрудно заметить, что

$$N_{p,j}(G) + \tau_0 N_{p,j}(G) = N_{p,j}(G) + \tau_\beta N_{p,j}(G) \tag{1.2.3}$$

для произвольного $\beta \in C$. Тогда, существуют $\varphi_1, \varphi_2 \in N_{p,j}(\tau_\alpha^{-1}G)$ и

$\psi_1 \in \overset{1}{M}_{p,\alpha_-,j+1}(G), \psi_2 \in \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G)$

такие, что

$$\varphi = \varphi_1 + \tau_\alpha\varphi_2 = \psi_1 + \tau_\alpha\psi_2.$$

В частности получаем

$$\psi_1(0) = \varphi_1(0) + \alpha\psi_2(0) - \alpha\varphi_2(0).$$

Поскольку

$$N_{p,j}(\tau_\alpha^{-1}G) \subset N_{p,j+1}(G) \text{ и } \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G;0) \subset M_{p,\alpha_-,j}(G;0) \subset N_{p,j+1}(G;0),$$

то правая часть последнего равенства принадлежит $N_{p,j+1}(G;0),$ а левая часть принадлежит $\overset{1}{M}_{p,\alpha_-,j+1}(G;0)$, которая в свою очередь лежит в пространстве $M_{p,\alpha_-,j+1}(G;0).$ Из теоремы1.1.4 следует, что $\psi_1(0)=0.$ В силу предложении1.1.1. последнее означает, что $\psi_1=0.$ Таким образом

$$\tau_\alpha^{-1}\varphi_1 = \psi_2 - \varphi_2 \in (L_p^+)^n.$$

С другой стороны, поскольку $\varphi_1 \in N_{p,j}(\tau_\alpha^{-1}G)$ то существует в.-ф. $\varphi_1^- \in (\overset{\circ}{L}{}_p^-)^n$ такая, что

$$\tau_0^{-j}G\tau_\alpha^{-1}\varphi_1 = \varphi_1^-.$$

Отсюда следует, что $\tau_\alpha^{-1}\varphi_1 \in N_{p,j}(G).$ В частности

$$(\tau_\alpha^{-1}\varphi_1)(0) = (-\alpha)^{-1}\varphi_1(0) \in N_{p,j}(G;0),$$

и потому $\varphi_1(0) \in N_{p,j}(G;0)$. Из условия $\varphi_2 \in N_{p,j}(\tau_\alpha^{-1}G)$ следует, что существует в.-ф. $\varphi_2^- \in (\overset{\circ}{L}{}_p^-)^n$ такая, что

$$\tau_0^{-(j+1)}G\varphi_2 = \tau_0^{-1}\tau_\alpha\varphi_2^- \quad \text{ и } \quad \tau_\alpha^{-1}G\varphi_2 \in \mathcal{L}_p^n.$$

Следовательно $\varphi_2 \in K_{p,\alpha,j+1}^-(G)$ т.е. $\varphi_2 \in \widehat{N}_{p,j}(G) \dot{+} \overset{1}{M}_{p,\alpha_-,j}(G).$

Из представления

$$\tau_\alpha\psi_2 = \varphi_1 + \tau_\alpha\varphi_2,$$

имеем

$$-\alpha\psi_2(0) = \varphi_1(0) - \alpha\varphi_2(0),$$

где

$$\psi_2(0) \in \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G;0), \;\; \varphi_1(0) \in N_{p,j}(G;0),$$

а $$\varphi_2(0) \in N_{p,j}(G;0) \dot{+} \overset{1}{M}_{p,\alpha_-,j}(G;0).$$

Из теоремы1.1.4 и равенства (1.2.2) имеем $\psi_2(0)=0$. Но тогда в силу предложении1.1.1,

$$\psi_2=0$$

и потому $\varphi=0$. Последнее утверждение доказывает справедливость утверждение 3). □

Лемма1.2.2.*Пусть* $1\le p\le\infty$ *. Тогда для любого* $j\in Z$ *,* $\alpha\in\Gamma$ *имеют место соотношения:*

1) $\overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G)\cap\tau_\alpha^{-1}\overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j+1}(G)=\{0\}$,

2) $(\overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G)\dot{+}\tau_\alpha^{-1}\overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j+1}(G))\subset N_{p,j+2}(\tau_\alpha G)$,

3) $(\overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G)\dot{+}\tau_\alpha^{-1}\overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j+1}(G))\cap\widehat{N}_{p,j+1}(\tau_\alpha G)=\{0\}$.

Доказательство. Пусть

$$\varphi\in\overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G)\cap\tau_\alpha^{-1}\overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j+1}(G).$$

Легко видеть, что

$$\{\varphi(0);\varphi\in\tau_\alpha^{-1}\overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j+1}(G)\}=\overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j+1}(G;0)\subset M_{p,\alpha_+,j+1}(G;0)\,.$$

Следовательно

$$\varphi(0)\in M_{p,\alpha_+,j}(G;0)\cap M_{p,\alpha_+,j+1}(G;0).$$

В силу теоремы1.1.4 имеем $\varphi(0)=0$. Отсюда из предложении1.1.1 следует доказательство утверждения 1).

Пусть $\varphi_+\in\overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G)$. Тогда существует в.-ф. $\varphi_-\in(\overset{\circ}{L}{}_p^-)^n$ такая, что

$$\tau_0^{-(j+1)}G\varphi_+=\varphi_-$$

т.е.

$$\tau_0^{-(j+2)}\tau_\alpha G\varphi_+=\tau_0^{-1}\tau_\alpha\varphi_-.$$

Следовательно $\overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G)\subset N_{p,j+2}(\tau_\alpha G)$. Пусть теперь $\varphi_+\in\overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j+1}(G)$. Тогда существует $\varphi_-\in(\overset{\circ}{L}{}_p^-)^n$, такая, что

$$\tau_0^{-(j+2)}G\varphi_+=\varphi_-$$

т.е.

$$\tau_0^{-(j+2)}\tau_\alpha G\tau_\alpha^{-1}\varphi_+ = \varphi_-.$$

Поскольку $\tau_\alpha^{-1}\varphi_+ \in (L_p^+)^n$, то утверждение 2) доказано.

Пусть теперь

$$\varphi \in (\overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G) \dotplus \tau_\alpha^{-1}\overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j+1}(G)) \cap \widehat{N}_{p,j+1}(\tau_\alpha G).$$

Тогда, в силу равенства (1.2.3) существуют $\varphi_1, \varphi_2 \in N_{p,j+1}(\tau_\alpha G)$ и $\psi_1 \in \overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j+1}(G), \psi_2 \in \overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G)$ такие, что

$$\varphi = \varphi_1 + \tau_\alpha\varphi_2 = \tau_\alpha^{-1}\psi_1 + \psi_2.$$

В частности, справедливо равенство

$$\alpha^{-1}\psi_1(0) = \psi_2(0) + \alpha\varphi_2(0) - \varphi_1(0).$$

Поскольку

$$N_{p,j+1}(\tau_\alpha G;0) \subset N_{p,j+1}(G;0) \text{ и } \overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G;0) \subset M_{p,\alpha_+,j}(G;0) \subset N_{p,j+1}(G;0),$$

то правая часть последнего равенства принадлежит $N_{p,j+1}(G;0)$, а левая часть $\overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j+1}(G;0) \subset M_{p,\alpha_+,j+1}(G;0)$. Из теоремы1.1.4 следует, что $\psi_1(0) = 0$.

В силу предложении1.1.1 последнее означает, что $\psi_1 = 0$. Из условия $\varphi_i \in N_{p,j+1}(\tau_\alpha G)(i = 1,2)$ следует, что $\tau_\alpha\varphi_i \in N_{p,j+1}(G)(i = 1,2)$ т.е. $\tau_\alpha\varphi_i \in K^+_{p,\alpha,j+1}(G)(i = 1,2)$. С другой стороны, поскольку

$$\varphi_1 + \tau_\alpha\varphi_2 = \psi_2$$

то

$$\varphi_1(0) - \alpha\varphi_2(0) = \psi_2(0).$$

Правая часть последнего равенства принадлежит $\overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G;0)$, а левая часть $N_{p,j}(G;0) \dotplus \overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j}(G;0)$. В силу теоремы1.1.4 и равенства (1.2.1) это означает, что

$$\psi_2(0) = 0.$$

Но тогда из предложении1.1.1 следует что $\psi_2 = 0$ и следовательно $\varphi = 0$. Утверждение 3) доказано. □

Следующая теорема дает описание (r_+, p) - индексных подпространств м.-ф. $\tau_\alpha^{\pm 1} G$ $(\alpha \in \Gamma)$.

Теорема 1.2.1 . *Пусть* $M_{p,\alpha_\pm,j}(G)$ $(1 \le p \le \infty)$ $(j \in Z)$ $(p,j)_+$ *-индексные подпространства типа* $(\alpha_\pm)$ *м.-ф. G, а* $M_{p,\alpha_\pm,j}(G) = \overset{1}{M}_{p,\alpha_\pm,j}(G) \dot{+} \overset{2}{M}_{p,\alpha_\pm,j}(G)$ *их направленные представления. Тогда подпространства* $\tilde{M}_{p,\alpha_-,j}(\tau_\alpha^{-1}G) = \tau_\alpha \overset{2}{M}_{p,\alpha_-,j}(G) \dot{+} \overset{1}{M}_{p,\alpha_-,j+1}(G),$ *являются* $(p,j)_+$ *индексными подпространствами м.-ф.* $\tau_\alpha^{-1}G,$ *а* $\tilde{M}_{p,\alpha_+,j}(\tau_\alpha G) = \overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j-1} \dot{+} \tau_\alpha^{-1} \overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j}(G)$ *являются* $(p,j)_+$ *индексными подпространствами м.-ф.* $\tau_\alpha G.$

Доказательство. В силу леммы1.2.1 существуют $(p,j)_+$ индексные подпространства $M_{p,j}(\tau_\alpha^{-1}G),$ такие что

$$\tilde{M}_{p,\alpha_-,j}(\tau_\alpha^{-1}G) \subset M_{p,j}(\tau_\alpha^{-1}G)(j \in Z)$$

т.е.

$$\dot{+}_{j\in Z} \tilde{M}_{p,\alpha_-,j}(\tau_\alpha^{-1}G) \subset \dot{+}_{j\in Z} M_{p,j}(\tau_\alpha^{-1}G).$$

Отсюда, из теоремы1.1.3 и определений $\tilde{M}_{p,\alpha_-,j}(\tau_\alpha^{-1}G)$ следует, что

$$\dim(\dot{+}_{j\in Z} \tilde{M}_{p,\alpha_-,j}(\tau_\alpha^{-1}G)) = \hat{n}(G) \le \hat{n}(\tau_\alpha^{-1}G).$$

Пусть $M_{p,\alpha_+,j}(\tau_\alpha^{-1}G)(j \in Z)$ некоторые $(p,j)_+$-индексные подпространства типа (α_+) м.-ф. $\tau_\alpha^{-1}G,$

$$M_{p,\alpha_+,j}(\tau_\alpha^{-1}G) = \overset{1}{M}_{p,\alpha+,j}(\tau_\alpha^{-1}G) \dot{+} \overset{2}{M}_{p,\alpha+,j}(\tau_\alpha^{-1}G)$$

$(j \in Z)$ некоторые их направленные представления а

$$\tilde{M}_{p,\alpha_+,j}(G) = \overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j-1}(\tau_\alpha^{-1}G) \dot{+} \tau_\alpha^{-1} \overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j}(\tau_\alpha^{-1}G) \qquad (j \in Z).$$

В силу леммы1.2.2 существуют $(p,j)_+$ индексные подпространства $M_j(\tau_\alpha G),$ $M_j(G)$ такие, что

$$\tilde{M}_{\alpha_+,j}(\tau_\alpha G)\subset M_j(\tau_\alpha G),\ \tilde{M}_{p,\alpha_+,j}(G)\subset M_{p,j}(G) \qquad (j\in Z).$$

т.е

$$\dot{+}_{j\in Z}\tilde{M}_{p,\alpha_+,j}(\tau_\alpha G)\subset \dot{+}_{j\in Z} M_{p,j}(\tau_\alpha G) \text{ и } \dot{+}_{j\in Z}\tilde{M}_{p,\alpha_+,j}(G)\subset \dot{+}_{j\in Z} M_{p,j}(G).$$

Отсюда нетрудно, заметить, что

$$\dim(\dot{+}_{j\in Z}\tilde{M}_{p,\alpha_+,j}(G))=\hat{n}(\tau_\alpha^{-1}G)\le \hat{n}(G).$$

Следовательно

$$\hat{n}(\tau_\alpha^{-1}G)=\hat{n}(G)=\hat{n}(\tau_\alpha G).$$

Таким образом

$$\dot{+}_{j\in Z}\tilde{M}_{p,\alpha_+,j}(\tau_\alpha G)=\dot{+}_{j\in Z} M_{p,j}(\tau_\alpha G)$$

$$\dot{+}_{j\in Z}\tilde{M}_{p,\alpha_-,j}(\tau_\alpha^{-1} G)=\dot{+}_{j\in Z} M_{p,j}(\tau_\alpha^{-1} G).$$

Последнее означает, что

$$\tilde{M}_{p,\alpha_+,j}(\tau_\alpha G)=M_{p,j}(\tau_\alpha G) \qquad (j\in Z)$$

$$\tilde{M}_{p,\alpha_-,j}(\tau_\alpha^{-1} G)=M_{p,j}(\tau_\alpha^{-1} G) \qquad (j\in Z). \qquad \square$$

3^0 Установим теперь связь между $I(r_+,p)$ индексными факторизациями м.-ф. G и gG, где $g\in R.$

Ниже через ϕ_z $(z\in \Gamma)$ будем обозначать семейство диагональных м.-ф. диагональные элементы которой равны либо единице, либо функции t-z.

Теорема1.2.2 *Пусть* $1\le p\le\infty$ *и* $g\in R$ *. Тогда м.-ф. G и gG допускают* (r_+,p) *-конечную индексацию одновременно. Если*

$$g(z)=\prod_{i=1}^{s}(z-\alpha_i)\Big/\prod_{j=1}^{l}(z-\beta_j)(\alpha_i,\beta_j\in\Gamma;\alpha_i\ne\beta_j;i=1,...,s;j=1,...,l;s,l\in N)$$

а представления $G(t)=G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t)$, $g(t)G(t)=\hat{G}_-(t)\hat{\Lambda}(t)\hat{G}_+^{-1}(t)$ *являются* (r_+,p) *- индексными факторизациями м.-ф. G и gG, то существуют м.-ф.*

$F_{\alpha_i} \in \phi_{\alpha_i}, F_{\beta_i} \in \phi_{\beta_i} (i=1,...s; j=1,...,l)$ *и существуют полиномиальные матрицы* $Q, Q_{\alpha_i}, Q_{\beta_j} (i=1,...,s; j=1,...,l)$ *(detQ,* $\det Q_{\alpha_i}, \det Q_{\beta_j} (i=1,...,s; j=1,...,l)$ *отличные от нуля постоянные) такие, что*

$$\widehat{G}_+ = G_+ Q_{\alpha_1} F_{\alpha_1}^{-1} ... Q_{\alpha_s} F_{\alpha_s}^{-1} Q_{\beta_1} F_{\beta_1} ... Q_{\beta_l} F_{\beta_l} Q,$$

$$\widehat{G}_- = G_- \tau_{\beta_1}^{-1} ... \tau_{\beta_l}^{-1} \tau_{\alpha_1} ... \tau_{\alpha_s} \Lambda Q_{\alpha_1} F_{\alpha_1}^{-1} ... Q_{\alpha_s} F_{\alpha_s}^{-1} Q_{\beta_1} F_{\beta_1} ... Q_{\beta_1} F_{\beta_1} Q \widehat{\Lambda}^{-1}$$

Доказательство. Пусть G допускает конечную (r_+, p)- индексацию. Первое утверждение следует из теоремы 1.2.1.

Пусть $\alpha \in \Gamma$. Посмотрим (r_+, p)- индексную факторизацию для м.-ф. $\tau_\alpha G.$ В силу теоремы1.2.1, если

$$M_{p,\alpha_+,j}(G) = \overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j}(G) \dot{+} \overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G)$$

$(j \in Z)$

некоторые направленные представления то пространства

$$\tilde{M}_{p,\alpha_+,j}(\tau_\alpha G) = \overset{2}{M}_{p,\alpha_+ j-1}(G) \dot{+} \tau_\alpha^{-1} \overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j}(G)$$

$(j \in Z)$

являются $(p,j)_+$-индексными подпространствами м.-ф. $\tau_\alpha G$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ базис пространства

$$\dot{+}_{j \in Z} M_{p,\alpha_+,j}(G), \ \tilde{G}_+ = [\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n] \text{ а } \tilde{G}_- = G\tilde{G}_+\Lambda^{-1}.$$

Из теорем1.1.6 и 1.1.8 следует, что м.-ф. G обладает (r_+, p)- индексной факторизацией

$$G(t) = \tilde{G}_-(t)\Lambda(t)\tilde{G}_+^{-1}(t),$$

и что существует полиномиальная матрица $Q_\alpha (\det Q_\alpha = const \neq 0)$ такая, что

$$\tilde{G}_+ = G_+ Q_\alpha, \ \tilde{G}_- = G_- \Lambda Q_\alpha \Lambda^{-1}.$$

Пусть $\kappa_1' \le \kappa_2' ... \le \kappa_n'$ являются (r_+, p)-частными индексамы м.-ф. $\tau_\alpha G$, $\Lambda_\alpha = diag[\kappa_1', \kappa_2', ..., \kappa_n']$,

а м.-ф. F_α определяется таким образом:

$$F_\alpha(t) = diag[a_1(t), ..., a_n(t)]$$

Где $a_i(t)=1$, если $\varphi_i \in \dot{+}_{j\in Z} \overset{2}{M}_{p,\alpha_+,j}(G)(i=1,...,n)$ и $a_i(t)=t-\alpha$, если $\varphi_i \in \dot{+}_{j\in Z} \overset{1}{M}_{p,\alpha_+,j}(G)(i=1,...,n)$. Из теоремы 1.2.1 следует ,что представление

$$\tau_\alpha G = G'_- \Lambda_\alpha (G'_+)^{-1} \ ,$$

где $G'_+ = G_+ Q_\alpha F_\alpha^{-1}$, $G'_- = G_- \tau_\alpha \Lambda Q_\alpha F_\alpha^{-1} \Lambda_\alpha^{-1}$ является (r_+,p) - индексной факторизацией для м.-ф. $\tau_\alpha G$. Аналогичным образом может быть построена (r_+,p) - индексная факторизация для м.-ф. $\tau_\alpha^{-1} G$. Применяя последовательно предложенную схему, получим конкретную (r_+,p) индексную факторизацию.Пользуясь связью между двумя различными факторизациями, получим

$$\widehat{G}_+ = G_+ Q_{\alpha_1} F_{\alpha_1}^{-1} ... Q_{\alpha_s} F_{\alpha_s}^{-1} Q_{\beta_1} F_{\beta_1} ... Q_{\beta_l} F_{\beta_l} Q,$$

$$\widehat{G}_- = G_- \tau_{\beta_1}^{-1} ... \tau_{\beta_l}^{-1} \tau_{\alpha_1} ... \tau_{\alpha_s} \Lambda Q_{\alpha_1} F_{\alpha_1}^{-1} ... Q_{\alpha_s} F_{\alpha_s}^{-1} Q_{\beta_1} F_{\beta_1} ... Q_{\beta_1} F_{\beta_1} Q \widehat{\Lambda}^{-1} \qquad \square .$$

Теорема 1.2.3 *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $g \in R$. *Если м.-ф. G и gG одновременно допускают WH(r, p) факторизацию относительно контуре Г, то* $g^{\pm 1} \in R_0$.

Доказательство. Допустим, что м.-ф. G и gG одновременно допускают WH(r, p)-факторизацию:

$$G(t) = G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t), \qquad g(t)G(t) = \widehat{G}_-(t)\widehat{\Lambda}(t)\widehat{G}_+^{-1}(t) \ ,$$

где

$$G_\pm \in (L_p^\pm)^{n\times n}, \quad G_\pm^{-1} \in (L_q^\pm)^{n\times n}, \quad \widehat{G}_\pm \in (L_p^\pm)^{n\times n}, \ \widehat{G}_\pm^{-1} \in (L_q^\pm)^{n\times n} \quad (q = p/(p-1))$$

Без потери общности можем полагать, что нули и полюсы g находятся на контуре Г, т.е. g имеет вид :

$$g(z) = \prod_{i=1}^{s}(z-\alpha_i) \Big/ \prod_{j=1}^{l}(z-\beta_j)(\alpha_i, \beta_j \in \Gamma; \alpha_i \neq \beta_j; i=1,...,s; j=1,...,l; s,l \in N)\,).$$

Поскольку, WH(r, p) факторизация м.-ф. является (r_+,p) индексной факторизацией, то из теоремы1.2.2 WH(r, p) факторизации G и gG связаны соотношениями

$$\widehat{G}_+ = G_+ Q_{\alpha_1} F_{\alpha_1}^{-1} ... Q_{\alpha_s} F_{\alpha_s}^{-1} Q_{\beta_1} F_{\beta_1} ... Q_{\beta_l} F_{\beta_l} Q,$$

$$\widehat{G}_- = G_-\tau_{\beta_1}^{-1}...\tau_{\beta_l}^{-1}\tau_{\alpha_1}...\tau_{\alpha_s}\Lambda Q_{\alpha_1}F_{\alpha_1}^{-1}...Q_{\alpha_s}F_{\alpha_s}^{-1}Q_{\beta_1}F_{\beta_1}...Q_{\beta_1}F_{\beta_1}Q\widehat{\Lambda}^{-1} \qquad (1.2.4)$$

отсюда, из условий

$$G_\pm \in (L_p^\pm)^{n\times n},\quad G_\pm^{-1} \in (L_q^\pm)^{n\times n},\quad \widehat{G}_\pm \in (L_p^\pm)^{n\times n},\ \widehat{G}_\pm^{-1} \in (L_q^\pm)^{n\times n} \quad (q = p/(p-1))$$

получим, что

$$G_\pm^{-1}\widehat{G}_\pm \in (L_1^\pm)^{n\times n},\quad (G_\pm^{-1}\widehat{G}_\pm)^{-1} \in (L_1^\pm)^{n\times n}.$$

Поскольку м.-ф. $G_\pm^{-1}\widehat{G}_\pm$, $(G_\pm^{-1}\widehat{G}_\pm)^{-1}$ являются рациональными м.-ф, то, из полученных условий интегрируемости следует, что их элементы и соответственно их определители принадлежат R_0. С другой стороны, из формулы (1.2.4) очевидным образом следует, что в каждой из точек $\alpha_i,\beta_j (i=1,...,s; j=1,...,l)$ один из функций $\det G_\pm^{-1}\widehat{G}_\pm$ $\det(G_\pm^{-1}\widehat{G}_\pm)^{-1}$ имеет полюс. Полученное противоречие доказывает теорему □.

§ Краевая задача Римана

1^0В этом параграфе рассматривается краевая задача Римана с матричным коэффициентом G в пространстве L_p^n $(1<p<\infty)$ при предположении, что м.-ф. G^T допускает $I(r_+,q)$ ($q=p/(p-1)$) факторизацию :

$$G^T(t) = G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t) \qquad (1.3.1).$$

(где $\Lambda(t) = diag[\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_n]$) .

Далее важную роль играет следующий класс полиномиальных в.-ф.

$$\Phi(G) = \{g; (G_+^T)^{-1}g \in (L_p^+)^n, (G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g \in (\overset{0}{L_p^-})^n\} \qquad (1.3.2)$$

где, g векторный многочлен порядко n j- ая компонента которого является многочленом степени не выше $\kappa_j - 1$ при $\kappa_j > 0$, и тождественно равна нуля при $\kappa_j \le 0$ ($j=1,...,n$).

В случае когда G^T допускает WH(r,q) ($q=p/(p-1)$) факторизацию, то $\Phi(G)$ совпадает с множеством векторных многочленов j- ая компонента которого является многочленом степени не выше $\kappa_j - 1$ при $\kappa_j > 0$,и тождественно равна нуля при $\kappa_j \le 0$ ($j=1,...,n$). В случае когда G^T допускает $I(r_+,q)$ факторизацию, то структура $\Phi(G)$ зависит от поведения факторов $G_\pm$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема1.3.1 *Пусть* (1.3.1) *является* $I(r_+,q)$ $(1<q<\infty)$ *факторизацией м.-ф.* G^T. *Тогда количество линейно независимых решениий однородной задачи*

$$\varphi_+ + G\varphi_- = 0 \qquad (1.3.3)$$

совпадает с $\dim\Phi(G)$. *Любое решение* (1.3.3) *допускает представление:* $\varphi_+ = (G_+^T)^{-1}g$, $\varphi_- = -(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g$ *где* $g\in\Phi(G)$.

*Доказательство.*Пусть (ψ_+,ψ_-) является нетривиальным решением задачи (1.3.3), т.е.

$$\psi_+ + G\psi_- = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\psi_+ + (G_-\Lambda G_+^{-1})^T\psi_- = 0.$$

Следовательно $\psi_+ + (G_+^T)^{-1}\Lambda G_-^T\psi_- = 0$ и потому $(G_+^T)\psi_+ = -\Lambda G_-^T\psi_-$.Поскольку $G_\pm^T \in (L_q^\pm)^{n\times n}$, $\psi_+\in(L_p^+)^n$ и $\psi_-\in(\overset{0}{L_p^-})^n$ то $G_+^T\psi_+\in(L_1^+)^n$ и $G_-^T\psi_-\in(\overset{0}{L_1^-})^n$.Таким образом существует ненулевой многочлен g, j-ая компонента которого является многочленом степени не выше κ_j-1 при $\kappa_j>0$,и тождественно равна нулю при $\kappa_j\le 0$ такой что $(G_+^T)\psi_+ = g$ и $-\Lambda(G_-^T)\psi_- = g$. Т.е. любое решение (1.3.3) допускает представление: $\varphi_+ = (G_+^T)^{-1}g$, $\varphi_- = -(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g$, где $g\in\Phi(G)$.

Пусть теперь существует ненулевой $g\in\Phi(G)$. Определим ψ_+ и ψ_- равенствами:

$\psi_+ = (G_+^T)^{-1}g,\ \psi_- = -(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g$. Очевидно что $\psi_+\in(L_p^+)^n, \psi_-\in(\overset{0}{L_p^-})^n$. Нетрудно проверить, что $(\psi_+,\ \psi_-)$ является решением задачи (1.3.3). □

Теорема1.3.2 *Пусть* (1.3.1) *является* $I(r_+,q)$ *факторизацией м.-ф.* G^T.*Тогда неоднородная задача Римана* (1.1.1) *разрешима тогда и только тогда, когда* $G_+^T h\in(\mathcal{L}_1)^n$ *и существует векторный многочлен* Р *удовлетворяющий следующим условиям:*

a) j-ая компонента в.-ф. P *является многочленом не выше степени* κ_j-1 *если* $\kappa_j>0$ *и тождественно равна нуля при* $\kappa_j\le 0$*,*

b) $(G_+^T)^{-1}\mathrm{P}+(G_+^T)^{-1}P_+(G_+^Th)\in(L_p^+)^n$*,*

c) $-(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}\mathrm{P}+(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}P_-(G_+^Th)\in(\overset{0}{L_p^-})^n$.

Если задача (1.1.1) *разрешима и* P *удовлетворяет условию a), b), c) то все решение* (1.1.1) *допускает представления:*

$$\varphi_+=(G_+^T)^{-1}g+(G_+^T)^{-1}\mathrm{P}+(G_+^T)^{-1}P_+(G_+^Th) \qquad (1.3.4)$$

$$\varphi_-=-(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g-(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}\mathrm{P}+(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}P_-(G_+^Th) \qquad (1.3.5)$$

где $g\in\Phi(G)$*. Обратно,если* $g\in\Phi(G)$*,а* φ_+*,* φ_- *допускают представление* (1.3.4), (1.3.5) *то пара*(φ_+,φ_-) *является решением задачи* (1.1.1).

*Доказательство.*Пусть (φ_+,φ_-) является решением задачи (1.1.1). Отсюда следует,что . $\varphi_++(G_-\Lambda G_+^{-1})^T\varphi_-=h$ и потому $(G_+^T)\varphi_++\Lambda G_-^T\varphi_-=G_+^Th$. Поскольку $G_\pm^T\in(L_q^\pm)^{n\times n}$, $\varphi_+\in(L_p^+)^n$ и $\varphi_-\in(\overset{0}{L_p^-})^n$ то $G_+^Th\in(\mathcal{L}_1)^n$.С другой стороны из равенства

$$(G_+^T)\varphi_+-P_+(G_+^Th)=-\Lambda G_-^T\varphi_-+P_-(G_+^Th),$$

следует, что существует векторной многочлен P , удовлетворяющий условию а), такой,что

$$(G_+^T)\varphi_+-P_+(G_+^Th)=\mathrm{P}, \quad -\Lambda G_-^T\varphi_-+P_-(G_+^Th)=\mathrm{P}$$

т.е.

$$\varphi_+=(G_+^T)^{-1}\mathrm{P}+(G_+^T)^{-1}P_+(G_+^Th), \quad \varphi_-=-(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}\mathrm{P}+(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}P_-(G_+^Th).$$

Последнее означает выполнение условии b) и c).

Пусть (ψ_+,ψ_-) также является решением задачи (1.1.1).Тогда очевидно, что $(\psi_+-\varphi_+,\psi_--\varphi_-)$ является решением задачи (1.3.3). Из теоремы1.3.1 следует существование в.-ф. $g\in\Phi(G)$. Таким образом любое решение задачи (1.1.1) допускает представление (1.3.4), (1.3.5). Пусть теперь $G_+^Th\in(\mathcal{L}_1)^n$ и существует векторной многочлен P, удовлетворяющий условию a), b), c).Определим φ_+ , φ_- с помощью (1.3.4) и (1.3.5).Очевидно, что $\varphi_+ \in (L_p^+)^n , \varphi_- \in (\overset{0}{L}{}_p^-)^n$ и пара (φ_+ , φ_-) удовлетворяет равенству (1.1.1). □

В следующих главах в случаях мероморфных коэффициентов приводится усиление этих теорем.

ГЛАВА II

ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ МЕРОМОРФНЫХ ВО ВНУТРЕННЕЙ ОБЛАСТИ КОНТУРА

§ 1Критерий факторизуемости.

1^0 М.-Ф. $\mathcal{B}$ мероморфную в области Ω^+, имеющую почти всюду на Γ угловые граничные значения, назовем p-допустимым в Ω^+ $(1 \le p \le \infty)$, если существует ненулевой многочлен g такой, что из условия $\varphi_+ \in D_p^+(\mathcal{B})$ следует $g\mathcal{B}\varphi_+ \in (L_1^+)^n$.Обозночим множество p-допустимых в Ω^+ м.-ф. через $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$.

В данной главе исследуется задача $I(r_+, p)$ – факторизации м.-ф. из класса $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)(1 \le p \le \infty)$. Подмножество $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ состоящих из аналитических м.-ф. в Ω^+ будем обозначать через $\mathcal{F}_p(\Omega^+)$. Нетрудно заметить, что если $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$, то из условия $\varphi_+ \in D_p^+(\mathcal{B})$ следует, что $\mathcal{B}\varphi_+ \in (L_1^+)^n$. Заметим также, что для принадлежности м.-ф. $\mathcal{B}$ классу $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ достаточно выполнение одного из следующих двух условий (см. теоремы 1.11 и 1.25 [44]):

1) $\mathcal{B} \in (\tilde{M}_q^+)^{n\times n}$ где $q = p/(p-1)$ в случае $1 < p < \infty$, $q = \infty$ при $p = 1$, и $q = 1$ при $p = \infty$.

2) $\Gamma \in \mathcal{S}$ и $\mathcal{B} \in (M^+)^{n\times n}$.

Нетрудно заметить также, что из условий $g \in R$ и $G \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ следует, что $gG \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$.

2^o. М.-ф. G мероморфную в области $\Omega^\pm$ и имеющую почти всюду на Γ угловые граничные значения назовем регулярной в $\Omega^\pm$, если $\det G$ тождественно не равен нулю в $\Omega^\pm$.

Пусть $\mathcal{B}$ регулярная м.-ф. в Ω^+. Ганкелев оператор $H_p^+(\mathcal{B}^{-1})$ $(1 \le p \le \infty)$ с областью определения $D_p^+(\mathcal{B}^{-1})$ определим по формуле: $H_p^+(\mathcal{B}^{-1}) = P_-(\mathcal{B}^{-1}\varphi)$.

Пусть $J_s = \{\sum_{k=0}^{s-1} y_k z^k ; y_k \in C^n, z \in C)\}$ для $s \in N$ и $J_s = \{\sum_{k=s}^{-1} y_k z^k ; y_k \in C^n, z \in C)\}$ для $-s \in N$.

Справедливы следующие утверждения.

Предложение2.1.1 *Пусть* $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$ $(1 \le p \le \infty)$ *регулярная м.-ф в* Ω^+. *Тогда* $N_{p,s}(\mathcal{B}) = \{0\}$ *при* $s \le 0$ *и* $N_{p,s}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1} \ker(H_p^+(\mathcal{B}^{-1}|_{J_s})$ *при* $s > 0$.

*Доказательство.*Пусть $\varphi_+ \in N_{p,s}(\mathcal{B})$. С помощью стандартных рассуждений нетрудно убедиться, что $\varphi_+ = 0$ при $s \le 0$ и $\mathcal{B}\varphi_+ \in J_s$ при $s > 0$. Поскольку $H_p^+(\mathcal{B}^{-1})\mathcal{B}\varphi_+ = 0$, то $N_{p,s}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}^{-1} \ker(H_p^+(\mathcal{B}^{-1}|_{J_s})$ $(s > 0)$.

Пусть $\varphi_+ \in \ker(H_p^+(\mathcal{B}^{-1}|_{J_s})$ $(s > 0)$ т.е. $\varphi_+ \in J_s$ и $\psi_+ = \mathcal{B}^{-1}\varphi_+ \in (L_p^+)^n$. Очевидно, что $\psi_+ \in D_p^+(\mathcal{B}\ )$ и $T_p(\tau_0^{-s}\mathcal{B})\psi_+ = P_+(\tau_0^{-s}\varphi_+) = 0$. □

Предложение2.1.2 *Если* $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ $(1 \le p \le \infty)$ *и допускает* $I(r_+, p)$ *факторизацию, то* $\det\mathcal{B}^{\pm 1}$ *имеет конечное число нулей в* Ω^+.

Доказательство. Пусть представление $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{-}\Lambda\mathcal{B}_{+}^{-1}$ является $I(r_+, p)$ факторизацией м.-ф. $\mathcal{B}$. Поскольку $\det \mathcal{B}_{\pm} \ne 0$ в $\Omega^{\pm}$, то из теоремы единственности следует, что $\det\mathcal{B}$ отлична от нуля почти всюду на Γ. Из $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и $\mathcal{B}_+ e_k \in \mathcal{D}_p^+(\mathcal{B})$ $(k = 1,\ldots,n)$, где $e_k = [0,\ldots,1,\ldots,0]^T$ $k = 1,\ldots,n$ базисные векторы в C^n, следует, что существует ненулевой полином g такой, что $g\mathcal{B}\mathcal{B}_+ \in \left(L_1^+\right)^{n\times n}$. В.-ф. $g\mathcal{B}_{-}\Lambda \in \left(M_p^-\right)^{n\times n}$ и может иметь полюс лишь в бесконечности. Поэтому из равенства $g\mathcal{B}\mathcal{B}_+ = g\mathcal{B}_{-}\Lambda$ следует, что $g\mathcal{B}\mathcal{B}_+ \in \left(L_1^+\right)^{n\times n} \cap \left(M_p^-\right)^{n\times n}$. Последнее означает, что $g\mathcal{B}\mathcal{B}_+$ является ненулевой полиномиальной матрицей. □

Предложение 2.1.3 *Пусть* $\mathcal{B}$ *регулярная м.-ф. в* Ω^+ *и* $1 \le p \le \infty$. *Тогда*

1) Если $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, *то* $\mu_p(\mathcal{B}, -\infty) = 0$.

2) Если $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\tilde{M}_p^+\right)$, *то* $\mu_p(\mathcal{B}, +\infty) = 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+(\mathcal{B})$. Поскольку м.-ф. $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, то существует ненулевой многочлен g такой, что $\mathrm{g}\mathcal{B}\varphi_+ \in \left(\mathrm{L}_1^+\right)^n$. Пусть $j \le -\deg g$. Если $\varphi_+ \in N_{p,j}(\mathcal{B})$, то существует $\varphi_- \in (\overset{o}{L_p^-})$ такое, что

$$\mathrm{g}\mathcal{B}\varphi_+ = \tau_0^j g\varphi_- .$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{g}\mathcal{B}\varphi_+ = 0 ,$$

а в силу регулярности м.-ф. $\mathcal{B}$, получим

$$\varphi_+ = 0 .$$

Таким образом $N_{p,j}(\mathcal{B}) = \{0\}$ и 1) следует из предложениий1.1.2.

Пусть $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\tilde{\mathrm{M}}_\mathrm{p}^+\right)^{n\times n}$, тогда существует ненулевой полином q такой, что $q\mathcal{B}^{-1} \in \left(\mathrm{L}_\mathrm{p}^+\right)^{n\times n}$. Заметим, что $q\mathcal{B}^{-1}e_k \in \mathcal{D}_p^+(\mathcal{B})$ ($k = 1,\ldots,n$). Если $j > \deg q$, то из равенства

$$\tau_0^{-j}\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}qe_k = \tau_0^{-j}qe_k \qquad (k = 1,\ldots,n)$$

следует, что

$$\mathcal{B}^{-1}qe_k \in N_{p,j}(\mathcal{B}).$$

В свою очередь из регулярности $\mathcal{B}$ следует существование точки $z \in \Omega^+$ такой, что

$$\dim N_{p,j}(\mathcal{B}, z) = n .$$

Утверждение 2) следует из предложений1.1.3. □

Доказанные предложения позволяют получить следующие критерий $I(r_+, p)$ $(1 \le p \le \infty)$ факторизации для м.-ф. из класса $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$.

Теорема2.1.1 *Пусть* $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ $(1 \le p \le \infty)$. *Для того, чтобы* $\mathcal{B}$ *допускало* $I(r_+, p)$ *факторизацию, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\tilde{\mathrm{M}}_\mathrm{p}^+\right)^{n\times n}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ допускает $I(r_+, p)$ факторизацию, тогда

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_-\Lambda\mathcal{B}_+^{-1} ,$$

где $\mathcal{B}_- \in \left(\mathrm{L}_\mathrm{p}^-\right)^{n\times n}$, $\mathcal{B}_+ \in \left(\mathrm{L}_\mathrm{p}^+\right)^{n\times n}$, $\Lambda(t) = diag\left[t^{\kappa_1},...,t^{\kappa_n}\right]$ $\left(\kappa_i \in Z, i=1,...,n\right)$. Тогда очевидно, что $\mathcal{B}$ регулярная м.-ф. в Ω^+. Поскольку существует ненулевой многочлен g такой, что

$$\mathrm{g}\mathcal{B}\mathcal{B}_+ = g\mathcal{B}_-\Lambda \in \left(\mathrm{L}_1^+\right)^{n\times n}$$

то отсюда следует, что

$$\mathcal{B}_- \in R_0{}^{n\times n}.$$

Из представления

$$\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{B}_+\left(\mathcal{B}_-\Lambda\right)^{-1}$$

следует, что $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\tilde{\mathrm{M}}_\mathrm{p}^+\right)^{n\times n}$.

Обратное утверждение следует из предложений 2.1.3 и теоремы1.1.6. □

Следствие2.1.1 *Если* $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\mathrm{M}_\mathrm{p}^+\right)^{n\times n}$ *и представление* $\mathcal{B}_-\Lambda\mathcal{B}_+^{-1}$ *является* $I(r_+,p)$ *факторизацией м.-ф.* $\mathcal{B}$ *, то м.-ф.* $\mathcal{B}_- \in R_0{}^{n\times n}$ *и* $det\mathcal{B}_-\left(z\right) \neq 0$ *для* $z \in \Gamma$*.*

Доказательство. Утверждения $\mathcal{B}_- \in R_0{}^{n\times n}$ содержится в доказательстве теоремы2.1.1.

Пусть

$$\det\mathcal{B}_-\left(z_0\right) = 0 \text{ при некотором } z_0 \in \Gamma.$$

Поскольку м.-ф. $\mathcal{B}_-\left(z\right)$ рациональная м.-ф., то существуют ненулевой вектор V $\in C^n$ и рациональная в.-ф. $\psi_- \in (\overset{o}{L_p^-})^n$ такие, что в достаточно малой окрестности точки z_0 имеет место представление

$$B_-\left(z\right)V = \left(z - z_0\right)\psi_-\left(z\right),$$

отсюда

$$\left(\tau'_{z_0}\right)^{-1}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{B}_-V = \mathcal{B}^{-1}\left(-z_0\right)\tau_0\psi_- \in \left(\mathcal{L}_p\right)^n,$$

т.е.

$$\left(\tau'_{z_0}\right)^{-1}\mathcal{B}_-V \in \mathcal{D}_p^-\left(\mathcal{B}\right),$$

что в силу предложения1.1.5 противоречит условию (в) $I\left(r_+, p\right)$ факторизации. □

§ 2 Формулы для частных индексов

1^0 Для функции (в.-ф. и м.-ф.) из класса L_1 введем следующее обозначение:

$$< f >_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma t^{-k-1} f(t)dt \qquad k \in Z .$$

Пусть $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n\times n}$ и $P_-(\mathcal{B}^{-1}) \neq 0$. Нетрудно заметить, что матрица - функция $P_-(\mathcal{B}^{-1})$ допускает представление

$$P_-(\mathcal{B}^{-1}) = \mathrm{P}_r Q_r^{-1},$$

где Q_r матричный полином, старший коэффициент которого равен единичной матрице I_n, а P_r матричный полином удовлетворяющий условий $\deg \mathrm{P}_r < \deg Q_r = \nu_r$.Очевидно,что такого типа представления неоднозначны.Нетрудно заметить также, что возможность представления $P_-(\mathcal{B}^{-1}) = \mathrm{P}_r Q_r^{-1}$, эквивалентна существованию матриц $Q_0^{(r)},...,Q_{\nu_r-1}^{(r)} \in C^{n\times n}$ удовлетворяющих, соотношениям

$$< \mathcal{B}^{-1} >_{-(\nu_r+m)} + \sum_{k=0}^{\nu_r-1} < \mathcal{B}^{-1} >_{-(m+k)} Q_k^{(r)} = 0 \quad m \in N \qquad (2.2.1).$$

Наименьшее число ν_r, для которого существуют матрицы $Q_0^{(r)},...,Q_{\nu_r-1}^{(r)} \in C^{n\times n}$,удовлетворяющие соотношениям (2.2.1) будем обозначать через $\nu_r(\mathcal{B}^{-1})$.

Аналогично, нетрудно заметить, что матрица - функция $P_-(\mathcal{B}^{-1})$ допускает представление

$$P_-(\mathcal{B}^{-1}) = Q_l^{-1}\mathrm{P}_l,$$

где Q_l матричный полином старший коэффициент которого равен единичной матрице I_n ,а P_r матричный полином, удовлетворяющий условий $\deg \mathrm{P}_l < \deg Q_l = \nu_l$. Заметим также, что возможность представления $P_-(\mathcal{B}^{-1}) = Q_l^{-1}\mathrm{P}_l$ эквивалентна существованию матриц $Q_0^{(l)},...,Q_{\nu_l-1}^{(l)} \in C^{n\times n}$, удовлетворяющих соотношениям

$$< \mathcal{B}^{-1} >_{-(\nu_l+m)} + \sum_{k=0}^{\nu_l-1} Q_k^{(l)} < \mathcal{B}^{-1} >_{-(m+k)} = 0 \quad m \in N \qquad (2.2.2).$$

Наименьшее число ν_l, для которого существуют матрицы $Q_0^{(l)},...,Q_{\nu_l-1}^{(l)} \in C^{n\times n}$,удовлетворяющие соотношениям (2.2.2) будем обозначать через $\nu_l(\mathcal{B}^{-1})$. В случае, когда $P_-(\mathcal{B}^{-1}) = 0$ будем считать ,что $\nu_r(\mathcal{B}^{-1}) = \nu_l(\mathcal{B}^{-1}) = 0$.

Для $\mathcal{B}^{-1} \in (M_1^+)^{n\times n}$ через $\mathcal{H}_s^+ (s \in N)$ будем обозначать ганкелеву матрицу:

$$\mathcal{H}_s^+ = \begin{bmatrix} < \mathcal{B}^{-1} >_{-1} & < \mathcal{B}^{-1} >_{-2} & \ldots & < \mathcal{B}^{-1} >_{-s} \\ < \mathcal{B}^{-1} >_{-2} & < \mathcal{B}^{-1} >_{-3} & \ldots & < \mathcal{B}^{-1} >_{-s-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ < \mathcal{B}^{-1} >_{-\nu_l(\mathcal{B}^{-1})} & < \mathcal{B}^{-1} >_{-\nu_l(\mathcal{B}^{-1})-1} & \ldots & < \mathcal{B}^{-1} >_{-\nu_l(\mathcal{B}^{-1})-s+1} \end{bmatrix}.$$

Числа $h_s^+ (s \in Z, s \geq 0)$ определим следующим образом: $h_s^+ = rang\,\mathcal{H}_s^+$ при $s > 0$ и $h_0^+ = 0$. Учитывая (2.2.1), нетрудно заметить, что $h_s^+ = h_{\nu_r(\mathcal{B}^{-1})}^+$ при $s > \nu_r(\mathcal{B}^{-1})$.

2^0. Пусть s ненулевое целое число. Изоморфизм $\Psi_s : C^{n|s|} \to J_s$ определим по формулам:

$$\Psi_s \overline{y} = \sum_{k=0}^{s-1} y_k z^k \quad \overline{y} = [y_0^T,,...,y_{s-1}^T]^T;\ y_k \in C^n, (\ k = 0,...,s-1)\ , s \in N$$

$$\Psi_s \overline{y} = \sum_{k=s}^{-1} y_k z^k \quad \overline{y} = [y_{-1}^T,,...,y_s^T]^T;\ y_k \in C^n, (\ k = s,...,-1)\ , -s \in N.$$

Справедливы следующие утверждения.

Предложение2.2.1 *Пусть* $\mathcal{B}^{-1}\left(\mathrm{M}_{\mathrm{p}}^+\right)^{n\times n}$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $s \in N$ *и* $\nu_r\left(\mathcal{B}^{-1}\right) > 0$. *Тогда в.-ф.* φ *принадлежит* $\ker\left(H_p^+\left(\mathcal{B}^{-1}\right)\Big|_{J_s}\right)$ *тогда и только тогда, когда вектор* $\Psi_s^{-1}\varphi$ *принадлежит* $\ker\mathcal{H}_s^+$. *В частности справедливы равенства*

$$\dim\ker\left(H_p^+\left(\mathcal{B}^{-1}\right)\Big|_{J_s}\right) = ns - h_s^+ \quad . \qquad (2.2.3)$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in J_s$. Поскольку

$$H_p^+\left(\mathcal{B}^{-1}\right)\varphi = H_p^+\left(P_-\mathcal{B}^{-1}\right)\varphi \quad ,$$

то для достаточно больших $|z|$ имеет место разложение

$$\left(H_p^+\left(\mathcal{B}^{-1}\right)\varphi\right)(z)=\sum_{m=-\infty}^{-1} z^m \sum_{k=0}^{s-1} <\mathcal{B}^{-1}>_{m-k} <\varphi>_k \qquad (2.2.4)\ .$$

Нетрудно видеть, что если $\varphi\in J_s$, то $\mathcal{B}^{-1}\varphi\in\left(\mathrm{M}_{\mathrm{p}}^+\right)^{n\times n}$. Учитывая (2.2.4) получим, что $\varphi\in\ker\left(H_p^+\left(\mathcal{B}^{-1}\right)\Big|_{J_s}\right)$ тогда и только тогда, когда вектор $\Psi_s^{-1}\varphi=\left[\langle\varphi\rangle_0^T,...,\langle\varphi\rangle_{s-1}^T\right]^T$ удовлетворяет бесконечной системе уравнений

$$\sum_{k=0}^{s-1} <\mathcal{B}^{-1}>_{m-k}\langle\varphi\rangle_k=0 \quad m=-1,-2...\ . \qquad (2.2.5)$$

Поскольку существуют матрицы $Q_i^{(l)}\in C^{n\times n}$ $(i=0,1,...,v_l\left(\mathcal{B}^{-1}\right)-1)$ удовлетворяющие (2.2.2), то для выполнения (2.2.5) необходимо и достаточно, чтобы вектор $\Psi_s^{-1}\varphi\in$ Ker $\mathcal{H}_s^+$. Формула (2.2.3) следует из очевидного равенства:

$$\dim\ker\left(H_p^+\left(\mathcal{B}^{-1}\right)\Big|_{J_s}\right)=\dim\ker\mathcal{H}_s^+ \qquad \square$$

Приведем теперь явные формулы для (r_+,p) -частных индексов м.-ф. $\mathcal{B}$ в случае, когда $\mathcal{B}\in\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, $\mathcal{B}^{-1}\in\left(M_p^+\right)^{n\times n}$.

Предложение2.2.2 *Пусть* $\mathcal{B}\in\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ $(1\le p\le\infty)$ *и допускает* $I(r_+,p)$ *факторизацию. Тогда м.-ф.* $\mathcal{B}$ *имеет конечную* (r_+,p) *индексацию.*

Доказательство. Из определения $I(r_+,p)$ факторизуемости следует, регулярность м.-ф. $\mathcal{B}$.В силу предложения 2.1.3, имеет место равенство: $\mu_p(\mathcal{B},-\infty)=0$.Остается воспользоваться теоремой 1.1.7 . □

Теорема.2.2.1. *Пусть* $\mathcal{B}\in\mathcal{F}_p(\Omega^+)$ $(1\le p\le\infty)$ *и* $\mathcal{B}^{-1}\in\left(\mathrm{M}_{\mathrm{p}}^+\right)^{n\times n}$. *Тогда м.-ф.* $\mathcal{B}$ *имеет конечную* (r_+,p) *индексацию .Кроме того* (r_+,p) *частные индексы м.-ф.* $\mathcal{B}$ *могут быть определены по формулам:*

$$\kappa_i = card\{\, j \,|\, n+h_{j-1}^+-h_j^+<i;\ j=1,2,...,v_r\left(\mathcal{B}^{-1}\right)\}\quad i=1,...,n,$$

если $v_r\left(\mathcal{B}^{-1}\right)\neq 0$ *и* $\kappa_1=...=\kappa_n=0$, *если* $v_r\left(\mathcal{B}^{-1}\right)=0$.

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 2.1.1 и предложения 2.2.2 .

Если

$$v_r\left(\mathcal{B}^{-1}\right)=0,$$

то доказательство очевидно. В противном случае доказательство следует из предложений 2.1.1, 2.2.1 и из равенства (1.1.2) из предложение1.1.4. □

§3Конструкция факторизации

$1^{0.}$ Перейдем теперь к построению факторизации м.-ф. $\mathcal{B}$ в случае, когда $\mathcal{B}\in\mathcal{F}_p(\Omega^+)$, $\mathcal{B}^{-1}\in\left(\mathrm{M}_{\mathrm{p}}^{+}\right)^{n\times n}$.

Обозначим через $\omega_s^1,\omega_s^2 : C^{ns}\to C^{n(s+1)}$ $\left(s\in N\right)$ следующие матричные операторы:

$$\omega_s^1=\begin{pmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & I_n & \cdots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & I_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \qquad \omega_s^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0\\ I_n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & I_n & \cdots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & I_n\end{pmatrix}$$

Очевидно, что $\omega_s^i Ker\mathcal{H}_s^{+}\subset Ker\mathcal{H}_{s+1}^{+}$ ($i=1,2, s\in N$).

Справедливо следующее предложение.

Предложение2.3.1 *Пусть* $\mathcal{B}\in\mathcal{F}_p(\Omega^+)$, $\mathcal{B}^{-1}\in\left(\mathrm{M}_{\mathrm{p}}^{+}\right)^{n\times n}$ $(1\le p\le\infty)$, $v_l(\mathcal{B}^{-1})>0$, $\theta_0=Ker\mathcal{H}_1^{+}$ *и* $\theta_s\left(s\in N\right)$ *некоторое прямое дополнение* $\omega_s^1 Ker\mathcal{H}_s^{+}+\omega_s^2 Ker\mathcal{H}_s^{+}$ *в* $Ker\mathcal{H}_{s+1}^{+}$. *Тогда*

$$\hat{N}_{p,s}\left(\mathcal{B}\right)=\mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}(\omega_s^1 Ker\mathcal{H}_s^{+}+\omega_s^2 Ker\mathcal{H}_s^{+})\quad (s\in N) \qquad (2.3.1)$$

а пространство $M_{s-1}:=\mathcal{B}^{-1}\Psi_s\theta_{s-1}$ *(*$s\in N$*) является* $\left(p,s-1\right)_+$ *индексным подпространством м.-ф.*$\mathcal{B}$*, причем*

$$\dim M_{s-1}=\dim\theta_{s-1}\left(s\in N\right).$$

Доказательство. В силу предложения 2.1.1 и 2.2.1

$$N_{p,s}\left(\mathcal{B}\right)=\left\{0\right\}$$

при $s \le 0$ и

$$N_{p,s}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1}\Psi_s Ker\mathcal{H}_s^+$$

при s>0. Равенство (2.3.1) следует из легко проверяемых равенств

$$\Psi_s Ker\mathcal{H}_s^+ = \Psi_{s+1}\omega_s^1 Ker\mathcal{H}_s^+ \quad \text{и} \quad \tau_0\Psi_s Ker\mathcal{H}_s^+ = \Psi_{s+1}\omega_s^2 Ker\mathcal{H}_s^+ \ (s \in N).$$

Поскольку

$$\hat{N}_{p,0}(\mathcal{B}) = \{0\},$$

то очевидно, что M_0 является $(p,0)_+$ индексным подпространством.

Пусть $f \in \hat{N}_{p.s}(\mathcal{B}) \cap M_s\,(s>0)$.Тогда существуют векторы $y_{1,}y_2 \in Ker\mathcal{H}_s^+$ и $y \in \theta_s$ такие, что

$$f = \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}\omega_s^1 y_1 + \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}\omega_s^2 y_2 = \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1} y.$$

Отсюда

$$\mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}(\omega_s^1 y_1 + \omega_s^2 y_2 - y) = 0,$$

следовательно

$$\omega_s^1 y_1 + \omega_s^2 y_2 = y,$$

т.е.

$$y = 0$$

и поэтому

$$f = 0.$$

С другой стороны

$$N_{p,s+1}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}Ker\mathcal{H}_{s+1}^+ = \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}\left[\left(\omega_s^1 Ker\mathcal{H}_s^+ + \omega_s^2 Ker\mathcal{H}_s^+\right) \dot{+}\, \theta_s\right] =$$

$$= \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}\omega_s^1 Ker\mathcal{H}_s^+ + \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}\omega_s^2 Ker\mathcal{H}_s^+ + \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}\theta_s = \hat{N}_{p,s}(\mathcal{B}) + M_s.$$

Равенство

$$M_{p,s-1}(\mathcal{B}) = \dim\theta_{s-1}\,(s \in N)$$

очевидно. □

Из теоремы1.1.6 и 2.3.1 следует следующая теорема .

Теорема.2.3.1 *Пусть* $\mathcal{B}\in\mathcal{F}_p(\Omega^+)$, $\mathcal{B}^{-1}\in\left(M_p^+\right)^{n\times n}$ $(1\le p\le\infty)$, $v_l\left(\mathcal{B}^{-1}\right)>0$ *и* $\eta_1<\cdots<\eta_s$ *все возможные значения* $\kappa_1\le\cdots\le\kappa_n$ $-(r_+,p)$ *частных индексов м.-ф.* $\mathcal{B}$. *Пусть* $\left\{X_{\eta_i,1},...,X_{\eta_i,n_i}\right\}$ *базисы пространств* $\theta_{\eta_i}\left(i=1,...,s\right)$, *а в.-ф.* $U_{\eta_i,j}\left(i=1,...,s;\, j=1,...,n_i\right)$, *определены следующим образом*

$$U_{\eta_i,j}=\mathcal{B}^{-1}\Psi_{\eta_{i+1}}X_{\eta_i,j}\quad\left(i=1,...,s,\, j=1,...,n_i\right).$$

Тогда, если $\mathcal{B}_+=\left[U_{\eta_1,1,...,}U_{\eta_1,n_1,}U_{\eta_2,1...,}U_{\eta_s,n_s}\right]$, $\Lambda=diag\left[t^{\kappa_1},...,t^{\kappa_n}\right]$, $\mathcal{B}_-=\mathcal{B}\mathcal{B}_+\Lambda^{-1}$, *то представление*

$$\mathcal{B}=\mathcal{B}_-\Lambda\mathcal{B}_+^{-1}$$

является $I\left(r_+,p\right)$ *факторизацией м.-ф.* $\mathcal{B}$. *В случае* $v_l\left(\mathcal{B}^{-1}\right)=0$, *представление*

$$\mathcal{B}=I_nI_n\left(\mathcal{B}^{-1}\right)^{-1}$$

является $I\left(r_+,p\right)$ *факторизацией м.-ф.* $\mathcal{B}$ *(*I_n *единичная матрица).*

§4 Некоторые обобщения

1^0 Пусть $\mathcal{B}\in\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и $\mathcal{B}^{-1}\in(M_p^+)^{n\times n}$ $(1\le p\le\infty)$. Нетрудно заметить, что существует полином q с нулями в Ω^+, такой, что $q\mathcal{B}\in\mathcal{F}_p(\Omega^+)$ и $\left(q\mathcal{B}\right)^{-1}\in(M_p^+)^{n\times n}$. Теоремы 2.2.1 и 2.3.1 позволяют строить $I\left(r_+,p\right)$ факторизацию м.-ф. $q\mathcal{B}$. Если представление

$$q\mathcal{B}=\tilde{\mathcal{B}}_-\tilde{\Lambda}\tilde{\mathcal{B}}_+^{-1}$$

является $I\left(r_+,p\right)$ факторизацией м.-ф. $q\mathcal{B}$, то легко видеть, что представление

$$\mathcal{B}=\mathcal{B}_-\Lambda\mathcal{B}_+^{-1},$$

где

$\mathcal{B}_-=\tau_0^kq^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_-$ $\left(k=\deg q\right)$, $\Lambda=\tau_0^{-k}\tilde{\Lambda}$, $\mathcal{B}_+=\tilde{\mathcal{B}}_+$ является $I\left(r_+,p\right)$ факторизацией м.-ф. $\mathcal{B}$.

В частности его $\left(r_+,p\right)$ частные индексы в случае когда $v_r\left(q^{-1}\mathcal{B}^{-1}\right)>0$ могут быть найдены по формулам:

$$\kappa_i = -\deg q + card\left\{ j \middle| n + h_{j-1}^{+}\left(\Gamma, q^{-1}\mathcal{B}^{-1}\right) - h_j^{+}\left(\Gamma, q^{-1}\mathcal{B}^{-1}\right) < i, j = 1,2,\ldots,\nu_r\left(q^{-1}\mathcal{B}^{-1}\right)\right\}, i = 1,\ldots,n.$$

В случае

$$\nu_r\left(q^{-1}\mathcal{B}^{-1}\right) = 0$$

имеем

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_n = -\deg q\ .$$

Пусть $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\tilde{M}_p^{+}\right)^{n\times n}$ $(1 \le p \le \infty)$. Тогда существует полином q_0 нули которого расположены на контуре Γ, такой, что $q_0\mathcal{B}^{-1} \in \left(M_p^{+}\right)^{n\times n}$. Поскольку

$$q_0^{-1}\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+),$$

то $I\left(r_+, p\right)$ факторизация м.-ф. $q_0^{-1}\mathcal{B}$ может быть построена способом предложенным в предыдущем параграфе. $I\left(r_+, p\right)$ факторизация м.-ф. $\mathcal{B}$ может быть восстановлена по $I\left(r_+, p\right)$ факторизации м.-ф. $q_0^{-1}\mathcal{B}$ методом предложенным в §2.Гл. I.

2^0Приведем простую формулу для нахождения $\left(r_+, p\right)$ суммарного индекса $\kappa = \kappa_1 + \cdots + \kappa_n$ м.-ф. $\mathcal{B}$.

Теорема.2.4.1 *Пусть* $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ *и* $\mathcal{B}^{-1} \in \left(M_p^{+}\right)^{n\times n}$ $(1 < p < \infty)$. *Тогда* $\left(r_+, p\right)$ *суммарный индекс м.-ф.* $\mathcal{B}$ *равен разности количества нулей и полюсов функции* $\det\mathcal{B}$ *в области* Ω^+ *с учетом их кратностей.*

Доказательство. Пусть

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\min_{\substack{i,j=0,\ldots,m\\ j\ne i}} d\left(\Gamma_i, \Gamma_j\right)$$

и

$$U_\varepsilon = \left\{ z \in C; |z| < \varepsilon \right\}.$$

Пусть $\Omega_{i,\varepsilon}$ $\left(i = 0,\ldots,m\right)$ односвязные области комплексной плоскости с границей $\Gamma_{i,\varepsilon} = \partial\Omega_{i,\varepsilon}$ и удовлетворяющие соотношениям:

$$\Omega_{0,\varepsilon} \subset \Omega_0,\ \bar{\Omega}_0 \subset \Omega_{0,\varepsilon} + U_\varepsilon,\ \Omega_i \subset \Omega_{\varepsilon,i},\ \bar{\Omega}_{\varepsilon,i} \subset \Omega_i + U_\varepsilon \quad (i = 1,\ldots,m).$$

Будем предполагать, что $\Gamma_{i,\varepsilon}$ являются замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми и контур $\Gamma_\varepsilon = \bigcup\limits_{j=0}^{m} \Gamma_{j,\varepsilon}$ ориентирован таким образом, что при ее обходе внутренняя область $\Omega_\varepsilon^+ = \Omega_{0,\varepsilon} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} \bar{\Omega}_{j,\varepsilon}$ остается слева, а внешняя область $\Omega_\varepsilon^- = \bar{C} \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon^+$ справа.

Примеры таких областей могут быть построены с помощью функций осуществляемых конформное отображение областей $\Omega_0, C \setminus \bar{\Omega}_i \ (i = 1,\ldots,m)$ на единичный круг. Заметим, что при этом $\Gamma_{\varepsilon,i} \ (i = 1,\ldots,m)$ могут быть выбраны аналитическими. Очевидно, что при достаточно малом ε, м.-ф. $\mathcal{B}$ аналитична и обратима в некоторой области содержащей множество $\Omega^+ \setminus \Omega_\varepsilon^+$. Поскольку $\mathcal{B}^{\pm 1} \in M_\infty^+(\Gamma_\varepsilon)$, то в силу теоремы 2.6[44] м.-ф. $\mathcal{B}$ допускает $WH(r,p)$ факторизацию на Γ_ε. Пусть представление

$$\mathcal{B} = B_- \Lambda \tilde{B}_+^{-1}$$

является этой факторизацией и $\Lambda = diag\left[\tau_0^{\kappa_1},\ldots,\tau_0^{\kappa_n}\right]$. В силу той же теоремы число

$$\kappa = \kappa_1 + \cdots + \kappa_n$$

равно разности между количеством нулей и полюсов $\det \mathcal{B}$ в Ω_ε^+. М.-ф. $B_-^{\pm 1} \in R^{n\times n}$ аналитичны в Ω_ε^- и непрерывны на Γ_ε. Следовательно $B_-^{\pm 1}$ аналитичны в Ω^- и непрерывны на Γ. М.-ф. B_+ на $\bar{\Omega}^+$ определим равенством:

$$B_+ = \mathcal{B}^{-1} B_- \Lambda.$$

Поскольку B_+ совпадает на Ω_ε^+ с $\tilde{B}_+$, то в силу своего определения

$$B_+ \in \left(L_p^+(\Gamma)\right)^{n\times n}$$

и удовлетворяет условию (б) определения $I(r_+,p)$ факторизации для $z \in \Omega^+$. Пусть $z \in \Gamma$ и существует $V \in C^n$, $V \neq 0$, такой, что $\tau_z^{-1} B_+ V \in \left(L_p^+(\Gamma)\right)^n$. Поскольку

$$\mathcal{B}\tau_z^{-1}B_+V = \tau_z^{-1}B_-\Lambda V$$

и

$$\det\left(B_-\Lambda\right)\left(z\right) \neq 0\,,$$

то

$$\tau_z^{-1}B_-\Lambda V \in \mathcal{L}_p^n$$

и потому

$$\tau_z^{-1}B_+V \notin D_p^+(\mathcal{B})\,.$$

Таким образом, м.-ф. B_+ удовлетворяет условию (б) определения $I(r_+, p)$ факторизации и для $z \in \Gamma$. Отсюда следует, что представление

$$\mathcal{B} = B_-\Lambda B_+^{-1}$$

является $I(r_+, p)$ факторизации м.-ф. $\mathcal{B}$ на контуре Γ. Доказательство теоремы следует из того, что $\det\mathcal{B}$ не имеет полюсов и нулей на множестве $\Omega^+ \setminus \Omega_\varepsilon^+$. □

Теорема2.4.2 *Пусть* $G^T \in \mathcal{MF}_q(\Omega^+)$ *и* $(G^T)^{-1} \in (\tilde{M}_q^+)^{n\times n}$ $(1 < p < \infty, q = p/(p-1)$.*Тогда утверждения теоремы1.3.1 справедливы.Кроме того если* $G^T \in \mathcal{MF}_q(\Omega^+), (G^T)^{-1} \in (M_q^+)^{n\times n}$ *то* $(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g \in (\overset{0}{L}{}_p^-)^n$.

Доказательство.Первое утверждение очевидным образом следует из теорем 2.1.1 и 1.3.1. Из следтвии 2.1.1 имеем что $G_-^T \in R_0^{n\times n}$ *и* $\det G_-^T\left(z\right) \neq 0$*, для* $z \in \Gamma$.Отсюда следует что $(G_-^T)^{-1} \in R_0^{n\times n}$, и потому $(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g \in (\overset{0}{L}{}_p^-)^n$,что доказывает теоремы 2.4.2 □

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема2.4.3 *Пусть* $G^T \in \mathcal{MF}_q(\Omega^+)$ *и* $(G^T)^{-1} \in (\tilde{M}_q^+)^{n\times n}$ $(q = p/(p-1))$.*Тогда справедливы утверждения теоремы1.3.2. Кроме того если* $G^T \in \mathcal{MF}_q(\Omega^+), (G^T)^{-1} \in (M_q^+)^{n\times n}$, *то условие c) теоремы1.3.2 выполняется автоматическим образом.*

ГЛАВА III

ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ ,МЕРОМОРФНЫХ ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ КОНТУРА.

§1 Класс допустимых мероморфных в Ω^- матриц-функций.Критерий факторизуемости.

1^0Для м.-ф. A определенный на контуре Γ через $\overset{0}{D}{}_p^-(A)(1 \le p \le \infty)$ будем обозначать пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in (\overset{0}{L}{}_p^-)^n$ таких, что $A\varphi_- \in \mathcal{L}_1^n$. Тогда мероморфную в Ω^- м.-ф. A и имеющую почти всюду на Γ угловые граничные значения назовем p-допустимым в Ω^-, если существуют ненулевой многочлен g и число $k \in Z(k \ge 0)$ такие, что из условия $\varphi_- \in \overset{0}{D}{}_p^-(A)$ следует, что $\tau_0^{-k} gA\varphi_- \in (\overset{0}{L}{}_1^-)^n$. Обозначим множество p-допустимых в Ω^- м.-ф. через $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$.

В данной главе исследуется задача $I(r_+, p)$ факторизации из класса $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ $(1 \le p \le \infty)$.

Подмножество $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ состоящих из аналитических м.-ф. в Ω^-, обозначим через $\mathcal{F}_p(\Omega^-)$.Если $A \in \mathcal{F}_p(\Omega^-)$, и $\varphi_- \in \overset{0}{D}{}_p^-(A)$, то $A\varphi_- \in (\overset{0}{L}{}_1^-)^n$.

Заметим, что для принадлежности м.-ф. A классу $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ достаточно выполнение одного из следующих двух условий (см. теоремы 1.11 и 1.25 .[44]):

1) $A \in (\tilde{M}_q^-)^{n\times n}$ где $q = p/(p-1)$ в случае $1 < p < \infty$, $q = \infty$ при $p = 1,$ и $q = 1,$ при $p = \infty.$

2) $\Gamma \in \mathcal{S}$ и $A \in (M^-)^{n\times n}$.

Нетрудно заметить также,что из условий $g \in R$ и $G \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ следует, что $gG \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$.

2^0Пусть A регулярная м.-ф. в Ω^-. Ганкелев оператор $H_P^-(A^{-1})$ $(1 \le p \le \infty)$ с областью определения $\overset{0}{D}{}_p^-(A^{-1})$ определим по формуле: $H_P^-(A^{-1})\varphi = P_+(A^{-1}\varphi)$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.1.1*Пусть* $A \in \left(L_p^-\right)^{n\times n}$ $(1 \le p \le \infty)$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-)$. *Тогда*

$$N_{p,j}(A) = \tau_0^{j^-} \ker\left(H_p^+\left(\tau_0^{j^-} I_n\right)\Big|_{\operatorname{Im} H_p^-\left(\tau_0^{j^+} A^{-1}\right)} \right)$$

где $j^- = \frac{1}{2}\left(j - |j|\right)$, $j^+ = \frac{1}{2}\left(j + |j|\right)$ *(* $j \in Z$ *), а* I_n *единичная матрица порядка* $n \times n$.

Доказательство.

Пусть

$$\varphi_+ \in N_{p,j}(A).$$

Тогда существует $\varphi_- \in \left(\overset{o}{L}{}_p^-\right)^n$ такой, что

$$\tau_0^{-j} A\varphi_+ = \varphi_-,$$

т.е.

$$\tau_0^{j^+} A^{-1}\varphi_- = \tau_0^{-j^-}\varphi_+ \in \left(L_p^+\right)^n \qquad .$$

Отсюда

$$\tau_0^{-j^-}\varphi_+ = P_+\left(\tau_0^{j^+} A^{-1}\varphi_-\right) = H_p^-\left(\tau_0^{j^+} A^{-1}\right)\varphi_-.$$

С другой стороны

$$H_p^+\left(\tau_0^{j^-} I_n\right)\left(\tau_0^{-j^-}\varphi_+\right) = 0.$$

Докажем обратное.

Пусть

$$\varphi_+ \in \ker\left(H_p^+\left(\tau_0^{j^-} I_n\right)\Big|_{\operatorname{Im} H_p^-\left(\tau_0^{j^+} A^{-1}\right)} \right).$$

Тогда существуют в.-ф. $\psi_- \in \overset{0}{D}{}_p^-\left(\tau_0^{j^+} A^{-1}\right)$, $\varphi_- \in (\overset{o}{L}{}_1^-)^n$ такие, что

$$\tau_0^{j^+} A^{-1}\psi_- = \varphi_+ + \varphi_-.$$

Поскольку $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, то существует многочлен g такой, что

$$g\varphi_+ = g\tau_0^{j^+} A^{-1}\psi_- - g\varphi_- \in \left(L_1^+\right)^n \cap \left(M_1^-\right)^n,$$

где полюсы в.-ф. $g\varphi_+$ находятся в бесконечности, т.е. $g\varphi_+$ является векторным многочленом и следовательно, $\varphi_+ \in R_0^n$.

Поскольку

$$\varphi_+ \in R_0^n, \qquad A \in \left(L_p^-\right)^{n\times n},$$

а правая часть равенства

$$\tau_0^{-j^+} A\varphi_+ = \psi_- - \tau_0^{-j^+} A\varphi_-$$

аналитична в Ω^- и равна нулю в бесконечно удаленной точке, то $\tau_0^{-j^+} A\varphi_+ \in \left(\overset{o}{L_p^-}\right)^n$. С другой стороны $\tau_0^{j^-} \varphi_+ \in \left(L_p^+\right)^n$. Кроме того $A\tau_0^{j^-} \varphi_+ \in \mathcal{L}_p^n$, т.е. $\tau_0^{j^-} \varphi_+ \in D_p^+\left(A\right)$.

Отсюда

$$T_p\left(\tau_0^{-j} A\right)\tau_0^{j^-} \varphi_+ = P_+\left(\tau_0^{-j^+} A\varphi_+\right) = 0. \qquad \square$$

По аналогии с предложением 2.1.2. нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 3.1.2 *Если м.-ф. A допускает $I(r_+, p)$ факторизацию и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, то* $\det A^{\pm 1}$ *имеет конечное число нулей в* Ω^-.

Справедливо также утверждение.

Предложение 3.1.3 *Пусть $1 \le p \le \infty$.Тогда:*

1) Если $A \in \left(\tilde{M}_p^-\right)^{n\times n}$, то $\mu_p\left(A, +\infty\right) = 0$.

2) Если A регулярная м.-ф. в Ω^- такая, что $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, то $\mu_p\left(A, -\infty\right) = 0$.

Доказательство. Пусть $A \in \left(\tilde{M}_p^-\right)^{n\times n}$. Тогда существуют ненулевой многочлен q и число $i = Z$ $(i \ge 0)$, такие, что $\tau_0^{-i} qA \in \left(\overset{o}{L_p^-}\right)^{n\times n}$. Нетрудно заметить, что $qe_k \in D_p^+(A)$ $(k = 1,\ldots,n)$. Если $j \ge i$, то из представления $\tau_0^{-j} Aqe_k$ $(k = 1,\ldots,n)$ следует, что $qe_k \in N_{p,j}(A)$ $(k = 1,\ldots,n)$. Очевидно, что существует $z \in \Omega^+$, такое, что $\dim N_{p,j}(A,z) = n$. Таким образом утверждение 1) следует из предложений1.1.3.

Пусть $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. Если $\varphi_- \in \overset{o}{D_p^-}\left(A^{-1}\right)$, то существуют многочлен g и число $k \in Z$ $(k \ge 0)$ такие, что $\tau_0^{-k} gA^{-1}\varphi_- \in \left(\overset{o}{L_p^-}\right)^n$. Пусть $j \le -k$ и $\varphi_+ \in N_{p,j}(A)$. Тогда существует $f_- \in \left(\overset{o}{L_p^-}\right)^n$ такой, что $\tau_0^{-j} A\varphi_+ = f_-$.. Очевидно, что $f_- \in \overset{o}{D_p^-}\left(A^{-1}\right)$. Поскольку $g\varphi_+ = g\tau_0^j A^{-1} f_-$ и $j \le -k$,то $g\varphi_+ \in \left(\overset{o}{L_p^-}\right)^n \cap \left(L_p^+\right)^n$ т.е. $\varphi_+ = 0$. Таким образом $N_{p,j}(A) = \{0\}\,(j \le -k)$ и 2) следует из предложениий1.1.2. □

Доказанные предложения позволяют получить следующие критерий $I(r_+, p)$ факторизации для м.-ф. обратная которой принадлежит классу $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$.

Теорема.3.1.1 *Пусть* $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. *Для того, чтобы м.-ф. А допускала* $I(r_+, p)$ *факторизацию необходимо и достаточно, чтобы* $A \in \left(\tilde{M}_p^-\right)^{n\times n}$.

Доказательство. Пусть представление $A = A_-\Lambda A_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ факторизацией м.-ф. A. Так как $A^{-1}A_- = A_+\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_1^{n\times n}$, то в силу р- допустимости м.-ф. A^{-1} в Ω^- существуют многочлен g и число $m \in Z(m \ge 0)$ такие, что $\tau_0^{-m} gA^{-1}A_- \in \left(\overset{o}{L_1^-}\right)^{n\times n}$. Из равенства $gA^{-1}A_-\Lambda = gA_+$ следует, что $gA_+ \in \left(L_p^+\right)^{n\times n} \cap \left(M_p^-\right)^{n\times n}$, где м.-ф. gA^+ может иметь полюс лишь в бесконечности. Таким образом м.-ф. gA_+ является полиномиальной матрицей. Отсюда следует $A \in \left(\tilde{M}_p^-\right)^{n\times n}$.

Обратное утверждение следует из предложения 3.1.3 и теоремы1.1.6. □

Следствие3.1.1 *Если* $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, $A \in \left(M_p^-\right)^{n\times n}$ $(1 \le p \le \infty)$ *и представление* $A = A_-\Lambda A_+^{-1}$ *является* $I\left(r_+, p\right)$ *факторизацией м.-ф.* A*, то м.-ф.* $A_+ \in R_0^{n\times n}$ *и* $\det A_+\left(z\right) \ne 0$*, для* $z \in \Gamma$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 2.1.1. .

§2 О некоторых свойствах ганкелевых операторов

1^0 Пусть $A^{-1} \in (M_1^-)^{n\times n}$ и $P_+(A^{-1}) \ne 0$. Нетрудно заметить, что матрица - функция $P_+(A^{-1})$ допускает представление

$$P_+(A^{-1}) = \mathrm{P}_r Q_r^{-1},$$

где P_r, Q_r матричны е полином ы удовлетворяющие соотношениям: $Q_r(0) = I_n$, $\deg \mathrm{P}_r \le \deg Q_r \le \nu (\nu \in N)$.Очевидно,что такого типа представления неоднозначны. Нетрудно заметить, что возможность представления $P_+(A^{-1}) = \mathrm{P}_r Q_r^{-1}$ эквивалентна существованию матриц $Q_1^{(r)},...,Q_\nu^{(r)} \in C^{n\times n}$ удовлетворяющих соотношениям :

$$< A^{-1} >_{\nu+m} + \sum_{k=1}^{\nu} < A^{-1} >_{\nu+m-k} Q_k^{(r)} = 0 \qquad (m \in N) \qquad (3.2.1).$$

Наименьшее число ν, для которого существуют матрицы $Q_1^{(r)},...,Q_\nu^{(r)} \in C^{n\times n}$,удовлетворяющие соотношениям (3.2.1) будем обозначать через $\nu_r(A^{-1})$.

Аналогично, нетрудно заметить что матрица - функция $P_+(A^{-1})$ допускает представление

$$P_+(A^{-1}) = Q_l^{-1} \mathrm{P}_l,$$

где P_l, Q_r матричные полином ы удовлетворяющие соотношениям: $Q_l(0) = I_n$, $\deg \mathrm{P}_l \le \deg Q_l \le \nu (\nu \in N)$.Заметим также, что возможность представления

$$P_+(A^{-1}) = Q_l^{-1} \mathrm{P}_l$$

эквивалентно существованию матриц $Q_1^{(l)},...,Q_\nu^{(l)} \in C^{n\times n}$ удовлетворяющих соотношениям

$$< A^{-1} >_{\nu+m} + \sum_{k=0}^{\nu-1} Q_k^{(l)} < A^{-1} >_{\nu+m-k} = 0 \qquad (m \in N) \qquad (3.2.2).$$

Наименьшее число ν, для которого существуют матрицы $Q_1^{(l)},...,Q_\nu^{(l)} \in C^{n\times n}$,удовлетворяющие соотношениям (3.2.2) будем обозначать через $\nu_l(A^{-1})$. В случае, когда

$$P_+(A^{-1}) = 0$$

будем считать, что $\nu_r(A^{-1}) = \nu_l(A^{-1}) = 0$.

2^0 **Предложение**3.2.1 *Пусть* $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap (M_1^-)^{n\times n}$, $\nu_r = \nu_r(A^{-1})$, *тогда для* $\nu \ge \nu_r$ *справедливо равенство:*

$$\operatorname{Im} H_1^-(A^{-1}) = \operatorname{Im}(H_1^-(A^{-1})\big|_{J_{-\nu}}) \qquad (3.2.3)$$

При $\nu < \nu_r$ *равенство не имеет место.*

Доказательство. Пусть $V = P_+(A^{-1})$. Очевидно, что $V \in R_0^{n\times n}$. Обозначим через d наименьшее кратное знаменател ей всех ко мпонентов матрицы-фу нкции V.Тогда $V = \frac{1}{d}\mathrm{P}$, где P матричный полином.

Пусть $\nu_0 = \max\{\deg \mathrm{P}, \deg d\}$. Нетрудно заметить, что для $f \in \overset{0}{D}{}_1^-(A^{-1})$ имеет место представление

$$f(z) = r(z) + z^{-\nu_0} d(z) f_0(z) \quad ,$$

где $r \in J_{-\nu_0}$, а $f_0 \in (\overset{0}{L}{}_1^-)^n$. Отсюда, поскольку $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap (M_1^-)^{n\times n}$ то, следует, что

$$H_1^-(A^{-1})f = H_1^-(V)f = P_+(\frac{1}{d}\mathrm{P}r + z^{-\nu_0}\mathrm{P}f_0) = H_1^-(A^{-1})r\,,$$

т.е. равенство (3.2.3) справедливо при $\nu = \nu_0$.

Пусть $\nu > \nu_r$, $y = [y_{-1}^T,...,y_{-\nu}^T, y_{-(\nu+1)}^T]^T \in C^{n(\nu+1)}$ и матрицы $Q_1^{(r)}, Q_2^{(r)},...,Q_\nu^{(r)} \in C^{n\times n}$ удовлетворяют соотношениям (3.2.1) Определим $h = [h_{-1}^T, h_{-2}^T,...,h_{-\nu}^T]^T \in C^{n\nu}$ по формуле $h_k = y_k - Q_{\nu+k+1}^{(r)} y_{-(\nu+1)}$, $k = -1,-2,...,-\nu$. Нетрудно убедиться, что

$$H_1^-(A^{-1})\Psi_{-(\nu+1)}y = H_1^-(A^{-1})\Psi_{-\nu}h.$$

Отсюда следует равенство

$$\operatorname{Im}(H_1^-(A^{-1})\big|_{J_{-(\nu+1)}}) = \operatorname{Im}(H_1^-(A^{-1})\big|_{J_{-\nu}}),$$

а следовательно и справедливость равенства (3.2.3) при $\nu \geq \nu_r$.

Допустим теперь, что при некотором $\nu \in N$ имеет место равенство (3.2.3). Рассмотрим векторы $\mathrm{X}^{(k)} = [0,0,...,0,e_k^T]^T \in C^{n(\nu+1)}$, $k = 1,2,...,n,$ где $e_k = [0,...,1,...0]^T$ базисные векторы в C^n. В силу сделанного допущения существуют векторы

$$q^{(k)} = [(q_{-1}^k)^T, (q_{-2}^k)^T, ..., (q_{-\nu}^k)^T]^T \in C^{n\nu} \ \ (k = 1,2,...,n,\ q_{-j}^k \in C^n,\ j = 1,2,..,\nu)$$

такие, что

$$H_1^-(A^{-1})\Psi_{-\nu}q^{(k)} = H_1^-(A^{-1})\Psi_{-(\nu+1)}\mathrm{X}^{(k)}.$$

Разложив эти равенства в окрестности $z = 0$, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}(< A^{-1} >_m q_{-1}^k + < A^{-1} >_{m+1} q_{-2}^k + ... + < A^{-1} >_{m+\nu-1} q_{-\nu}^k)z^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty}(< A^{-1} >_{\nu+m} e_k)z^{m-1},$$

$k = 1,2,...,n$.

Следовательно

$$< A^{-1} >_{m+\nu} e_k =< A^{-1} >_m q_{-1}^k + < A^{-1} >_{m+1} q_{-2}^k + ... + < A^{-1} >_{m+\nu-1} q_{-\nu}^k,\ m \in N,\ k = 1,2,...,n.$$

Определим $Q_k^{(r)}$ $k = 1,2,...,\nu$ равенствами

$$Q_k^{(r)} = -[q_{k-1-\nu}^1, q_{k-1-\nu}^2, ..., q_{k-1-\nu}^n].$$

Очевидно, что для них имеют место соотношения (3.2.3) и потому $\nu \geq \nu_r$. □

Следствие3.2.1. *Пусть* $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap (M_1^-)^{n\times n}$ $\nu_r = \nu_r(A^{-1})$, $i \in N$. *Тогда*

$$\operatorname{Im} H_1^-(\tau_0^i A^{-1}) = \operatorname{Im}(H_1^-(\tau_0^i A^{-1})\big|_{J_{-(\nu_r+i)}}).$$

Доказательство. Пусть P и Q матричные полиномы такие, что $\max\{\deg \mathrm{P}, \deg Q\} = \nu_r$ и

$$P_+(A^{-1}) = \mathrm{P}Q^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что

$$P_+(\tau_0^i A^{-1})(z) = [z^i \mathrm{P}(z) + (\sum_{m=-i}^{-1} < A^{-1} >_m z^{m+i})Q(z)]Q^{-1}(z).$$

Отсюда следует неравенство

$$\nu_r(\tau_0^i A^{-1}) \le \nu_r + i.$$

Остается применить Предложение3.2.1.

Замечание.3.2.1 Из Следствия 3.2.1. очевидным образом следует, что

$$\operatorname{Im} H_p^-(\tau_0^i A^{-1}) = \operatorname{Im}(H_p^-(\tau_0^i A^{-1})\Big|_{J_{-(\nu_r(A^{-1})+i)}}) \qquad .$$

3^0 Для $A^{-1} \in (M_1^-)^{n\times n}$ через $\mathcal{H}_-^k(s,m,A^{-1})$ $(k \in Z; s,m \in N)$ будем обозначать ганкелеву матрицу.

$$\mathcal{H}_-^k(s,m,A^{-1}) = \begin{bmatrix} <A^{-1}>_k & <A^{-1}>_{k+1} & \dots & <A^{-1}>_{k+m-1} \\ <A^{-1}>_{k+1} & <A^{-1}>_{k+2} & \dots & <A^{-1}>_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ <A^{-1}>_{k+s-1} & <A^{-1}>_{k+s} & \dots & <A^{-1}>_{k+s+m-2} \end{bmatrix}$$

В частности через $\mathcal{H}_s^-$ $(-s \in N)$ будем обозначать следующую блочно ганкелеву матрицу:

$$\mathcal{H}_s^- = \mathcal{H}_-^1(-s,\nu_r(A^{-1}),A^{-1}) \ .$$

Число $h_s^-(s \in Z, s \le 0)$ и пространство $F_j(j \le 0)$ определим следующим образом: $h_s^- = rang\mathcal{H}_s^-$ при $s<0$ и $h_0^- = 0$, $F_j = \ker \mathcal{H}_s^-$ при $j<0$ и $F_0 = C^{n\nu_r(A^{-1})}$. Из (3.2.2), следует, что $h_s^- = h_{-\nu_l(A^{-1})}^-$ когда $s<\nu_l(A^{-1})$. Число h_s^- очевидным образом зависит от матрицы A^{-1} и контура интегрирования. Ниже во избежания двусмысленности мы это число будем обозначать также через $h_s^-(\Gamma, A^{-1})$.

Предложение3.2.2 *Пусть* $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap (M_1^-)^{n\times n}$, $\nu_r = \nu_r(A^{-1})$, $\nu_l = \nu_l(A^{-1})$, $j \ge 0$ *(* $j \in \mathrm{Z}$ *).* *Тогда имеет место равенство*

$$\dim \operatorname{Im} H_1^-(\tau_0^j A^{-1}) = rang\mathcal{H}_-^{1-j}(\nu_l + j, \nu_r + j, A^{-1}) \ .$$

Доказательство. Пусть $q \in J_{-(\nu_r+j)}$. В окрестности $z=0$ имеет место следующее разложение

$$(H_1^-(\tau_0^j A^{-1})q)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=-(\nu_r+j)}^{-1} <A^{-1}>_{m-k-j} <q>_k \qquad .$$

Отсюда следует, что $q \in ker(H_1^-(\tau_0^j A^{-1}))$ тогда и только т огда когда вектор $\Psi_{-(\nu_r+j)}^{-1} q$ удовлетворяет бесконечной системе уравнений:

$$\sum_{k=-(\nu_r+j)}^{-1} < A^{-1} >_{m-k-j} < q >_k = 0,\ \ m = 0,1,2... \quad .$$

Последние в силу равенств (3.2.2) имеют место тогда и только тогда, когда

$\Psi^{-1}_{-(\nu_r+j)} q \in ker\mathcal{H}_{-}^{1-j}(\nu_l + i, \nu_r + i, W)$. Для завершения доказатель ства ост ается при менить Следствие3.2.1. □

Предложение3.2.3 *Пусть* $A^{-1} \in (M_1^-)^{n\times n}$ $\nu_r = \nu_r(A^{-1})$, $\nu_l = \nu_l(A^{-1})$. *Тогда*

1) Числа ν_r, ν_l *отличны от нуля одновременно. Если* $\nu_l = \nu_r = 0$, *то* $rang\mathcal{H}_{-}^{1}(s,m,A^{-1}) = 0$ *для любых* $s, m \in \mathrm{N}$ *.*

2) Если $\nu_r \neq 0$ *,то* $rang\mathcal{H}_{-}^{1}(s,m,A^{-1}) = rang\mathcal{H}_{-}^{1}(\nu_l,\nu_r,A^{-1})$ *для люб ых целых* $s \geq \nu_l, m \geq \nu_r$ *и* $rang\mathcal{H}_{-}^{1}(s,m,A^{-1}) < rang\mathcal{H}_{-}^{1}(\nu_l,\nu_r,W)$ *если выполнен о хотя бы одно из неравенств* $s < \nu_l, m < \nu_r$ *(*$s, m \in \mathrm{N}$ *).*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докаже м второе утверждение. Е сли $s \geq \nu_l, m \geq \nu_r$ то из состношений (3.2.1) и (3.2.2) следует, что

$$rang\mathcal{H}_{-}^{1}(s,m,A^{-1}) = rang\mathcal{H}_{-}^{1}(\nu_l,\nu_r,A^{-1}).$$

Допустим $m < \nu_r$ и $rang\mathcal{H}_{-}^{1}(s_0,m,A^{-1}) = rang\mathcal{H}_{-}^{1}(\nu_l,\nu_r,A^{-1})$. при некотором $s_0 \in \mathrm{N}$. В случае $s_0 \geq \nu_l$ из соотношений (3.2.2) следует, что

$$rang\mathcal{H}_{-}^{1}(s_0,m,A^{-1}) = rang\mathcal{H}_{-}^{1}(\nu_l,m,A^{-1}).$$

Очевидно, что это равенство справедливо в случае $s_0 < \nu_l$. Отсюда, в частности следует, что

$$rang\mathcal{H}_{-}^{1}(\nu_l,\nu_r - 1,A^{-1}) = rang\mathcal{H}_{-}^{1}(\nu_l,\nu_r,A^{-1}).$$

Из теоремы Кронекера-Капелли следует существования матриц $Q_1, Q_2, ..., Q_{\nu_r - 1} \in C^{n\times n}$, для которых справедливы равенства

$$< A^{-1} >_{\nu_r+m-1} + \sum_{k=1}^{\nu_r-1} < A^{-1} >_{\nu_r+m-1-k} Q_k = 0,\ m = 1,2,...,\nu_l\ . \qquad (3.2.4)$$

Но из соотнашений (3.2.2) следует, что (3.2.4) справедл ивы также при $m \geq \nu_l + 1$.Последнее противоречит определению ν_r. Случай $s < \nu_l$ доказывается аналогичным образом. □

§3 Формулы для частных индексов.

1^0 Имеет место следующее предложение.

Предложение3.3.1 *Пусть* $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap \left(M_1^-\right)^{n\times n}$ *и* $v_l\left(A^{-1}\right) > 0$. *Тогда*

$$\dim\ker\left(H_p^+\left(\tau_0^j I_n\right)\Big|_{\operatorname{Im} H_p^-\left(A^{-1}\right)} \right) = h^-_{-v_l\left(A^{-1}\right)} - h_j^-, \textit{ при } \ j \le 0\left(j \in Z\right)\ (1 \le p \le \infty).$$

Доказательство. Пусть $j < 0$ и $f \in J_{-v_r\left(A^{-1}\right)}$.Нетрудно убедиться, что при достаточно малых $|z|$ справедливо равенство: (см.Предложение3.2.1.)

$$\left(H_p^-\left(A^{-1}\right)f\right)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=-v_r\left(A^{-1}\right)}^{-1} \left\langle A^{-1}\right\rangle_{m-k} \left\langle f\right\rangle_k .$$

Следовательно

$$\left(H_p^+\left(\tau_0^j I_n\right)H_p^-\left(A^{-1}\right)f\right)(z) = \sum_{m=0}^{-j-1} z^{m+j} \sum_{k=-v_r\left(A^{-1}\right)}^{-1} \left\langle A^{-1}\right\rangle_{m-k} \left\langle f\right\rangle_k .$$

Учитывая Замечание.3.2.1 получим, что

$$\ker\left(H_p^+\left(\tau_0^j I_n\right)\Big|_{\operatorname{Im} H_p^-\left(A^{-1}\right)} \right) = \left\{ H_p^-\left(A^{-1}\right)f ; \Psi^{-1}_{-v_r\left(A^{-1}\right)} f \in F_j \right\}.$$

Пусть $S_j = \Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)} F_j\left(j < 0\right)$. Поскольку

$$\operatorname{Im}\left(H_p^-\left(A^{-1}\right)\Big|_{S_j} \right) = \ker\left(H_p^+\left(\tau_0^j I_n\right)\Big|_{\operatorname{Im} H_p^-\left(A^{-1}\right)} \right),, \quad \ker\left(H_p^-\left(A^{-1}\right)\Big|_{S_j} \right) = \ker\left(H_p^-\left(A^{-1}\right)\Big|_{J_{-v_r\left(A^{-1}\right)}} \right)$$

то

$$\dim\ker\left(H_p^+\left(\tau_0^j I_n\right)\Big|_{\operatorname{Im} H_p^-\left(A^{-1}\right)} \right) = \dim S_j - \dim\ker\left(H_p^-\left(A^{-1}\right)\Big|_{J_{-v_r\left(A^{-1}\right)}} \right) \qquad (3.3.1)$$

Учитывая

$$\dim\ker\left(H_p^-\left(A^{-1}\right)\Big|_{J_{-v_r\left(A^{-1}\right)}} \right) = \dim F_{-v_l\left(A^{-1}\right)} \qquad (3.3.2)$$

а также $\dim S_j = \dim F_j = nv_r\left(A^{-1}\right) - h_j^-$, из (3.3.1) получим

$$\dim\ker\left(H_p^+\left(\tau_0^j I_n\right)\Big|_{\operatorname{Im} H_p^-\left(A^{-1}\right)}\right) = nv_r\left(A^{-1}\right) - h_j^- - \dim F_{-v_l\left(A^{-1}\right)} = h^-_{-v_l\left(A^{-1}\right)} - h_j^- .$$

В случае $j = 0$ доказательство предложения следует из (3.3.2). □

Приведем теперь явные формулы для $\left(r_+, p\right)$-частных $(1 \le p \le \infty)$ индексов м.-ф. A в случае, когда $A \in \left(L_p^-\right)^{n\times n}, A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap \left(M_1^-\right)^{n\times n}$.

Предложение3.3.2 *Пусть м.-ф.* $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ *и допускает* $I(r_+, p)$ *факторизацию. Тогда м.-ф.* A *имеет конечную* (r_+, p) *индексацию.*

*Доказательство.*Поскольку м.-ф. A регулярная м.-ф. в Ω^- то в силу предложении 3.1.3 имеет место равенство: $\mu_p\left(A, -\infty\right) = 0$. Остается воспользоваться теоремой 1.1.7 □

Теорема.3.3.1. *Пусть* $A \in \left(L_p^-\right)^{n\times n}, A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap \left(M_1^-\right)^{n\times n}$ $(1 \le p \le \infty)$. *Тогда м.-ф.* A *имеет конечную* (r_+, p) *индексацию. Кроме того* $\left(r_+, p\right)$ *частные индексы м.-ф.* A *в случае* $v_l\left(A^{-1}\right) > 0$ *могут быть определены по формулам:*

$$\kappa_i = -v_{l\left(A^{-1}\right)} + card\left\{ j \middle| h_{j-1}^- - h_j^- < i, j = -v_l\left(A^{-1}\right) + 1, \ldots, 0 \right\}$$

$\left(i = 1, \ldots, n\right)$. *Если* $v_l\left(A^{-1}\right) = 0$, *то* $\kappa_1 = \cdots = \kappa_n = 0$.

*Доказательство.*Поскольку $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap \left(M_1^-\right)^{n\times n}$ то очевидно , что $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$.

Первое утверждение теоремы следует из теоремы3.1.1. и предложение3.3.2 .

Доказательство теоремы в случае $v_l\left(A^{-1}\right) = 0$, очевидно. Доказательство остальных утверждений теоремы следует из предложений 3.1.1, 3.3.1 и формулы (1.1.2) из предложения 1.1.4. □

§ 4 Конструкция факторизации

1^0Перейдем теперь к построению факторизации м.-ф. A при условиях $A\in\left(L_p^-\right)^{n\times n}$ $(1\le p\le\infty)$, $A^{-1}\in\mathcal{MF}_1(\Omega^-)\cap\left(M_1^-\right)^{n\times n}$.

Пусть $v_r\left(A^{-1}\right)>0$. Тогда, в силу предложений 3.1.1 и 3.1.3 имеем

$$N_{p,j}\left(A\right)=\operatorname{Im}H_p^-\left(\tau_0^jA^{-1}\right)$$

при $j=0$ и

$$N_{p,j}(A)=\tau_0^jH_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}F_j$$

при $j<0$. Пусть $Q_1,Q_2,\dots,Q_{v_r\left(A^{-1}\right)}\in C^{n\times n}$ матрицы которые удовлетворяют соотношениям (3.2.1). Рассмотрим оператор $K_Q:C^{nv_r\left(A^{-1}\right)}\to C^{nv_r\left(A^{-1}\right)}$ действующий следующим образом:

$$K_Q\overline{y}=\left[\left(-Q_{v_r\left(A^{-1}\right)}y_{v_r\left(A^{-1}\right)}\right)^T,\left(-Q_{v_r\left(A^{-1}\right)-1}y_{v_r\left(A^{-1}\right)}+y_1\right)^T,...,\left(-Q_1y_{v_r\left(A^{-1}\right)}+y_{v_r\left(A^{-1}\right)-1}\right)^T\right]^T$$

где $\overline{y}=\left[y_1^T,y_2^T,\dots,y_{v_r\left(A^{-1}\right)}^T\right]^T$, $y_i\in C^n\left(i=1,\dots,v_r\left(A^{-1}\right)\right)$. Оператор K_Q допускает матричное представление:

$$K_Q=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-Q_{v_r\left(A^{-1}\right)}\\ I_n&0&\cdots&0&-Q_{v_r\left(A^{-1}\right)-1}\\ \vdots&&&&\\ 0&0&\cdots&I_n&-Q_1\end{pmatrix}$$

Заметим, что $K_QF_j\subset F_{j+1}\left(j\le-1\right)$. Нетрудно убедиться , что при достаточно малых $|z|$ имеет место равенство:(см.Предложение3.2.1.)

$$H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}K_Q\overline{y}=\sum_{m=0}^{\infty}z^m\sum_{k=-v_r\left(A^{-1}\right)}^{-1}\left\langle A^{-1}\right\rangle_{m-k}\left\langle\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}K_Q\overline{y}\right\rangle_k .$$

Используя соотношения (3.2.1), получим

$$H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}K_Q\overline{y}=\sum_{m=0}^{\infty}z^m\sum_{k=1}^{v_r\left(A^{-1}\right)}\left\langle A^{-1}\right\rangle_{m+k+1}y_k$$

Отсюда

$$\tau_0 H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}K_Q\overline{y}=H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}\overline{y}-\mathcal{H}_{-1}^-\overline{y} \qquad (3.4.1).$$

Поскольку $F_j\subset F_{-1}\left(j\le -2\right)$, то при $j\le -1$ имеет место равенство

$$H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}F_j=\tau_0 H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}K_Q F_j \qquad (3.4.2).$$

Пусть $\theta_j\left(j\le -1\right)$ некоторое прямое дополнение $F_j+K_QF_j$ в F_{j+1}, а θ_0 некоторое прямое дополнение $\operatorname{Im}\mathcal{H}_{-1}^-$ в C^n.

Предложение3.4.1 *Пусть* $A\in\left(L_p^-\right)^{n\times n}$ $(1\le p\le\infty)$, $A^{-1}\in\mathcal{MF}_1(\Omega^-)\cap\left(M_1^-\right)^{n\times n}$. *Если* $v_r\left(A^{-1}\right)\ne 0$ *и* $j<0$, *то пространства* $M_{p,j}=\tau_0^{j+1}H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}\theta_j$ *являются* $(p,j)_+$-*индексными подпространствами м.-ф.* A, *а если* $j=0$, *то* θ_0 *является* $(p;0)_+$ *индексным подпространством м.-ф.* A. *Кроме того,* $\dim M_{p,j}=\dim\theta_j\left(j<0\right)$.

Доказательство. Пусть $f\in H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}\left(F_j+K_QF_j\right)\cap H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}\theta_j$ и $j<0$.

Тогда существуют $y_1,y_2\in F_j$ и $\overline{y}\in\theta_j$ такие, что

$$f=H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}\overline{y}=H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}\left(y_1+K_Qy_2\right),$$

т.е.

$$H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}\left(\overline{y}-\left(y_1+K_Qy_2\right)\right)=0,$$

Тогда, учитывая (3.2.2), нетрудно заметить, что $\overline{y}-y_1-K_Qy_2\in F_{-v_l\left(A^{-1}\right)}$ и потому $\overline{y}-y_1-K_Qy_2\in F_j$. Отсюда получаем, что $\overline{y}\in\left(F_j+K_QF_j\right)\cap\theta_j$, т.е. $\overline{y}=0$ и потому $f=0$. С другой стороны, в силу предложений 3.1.1. и 3.3.1. имеем

$$N_{p,j+1}(A)=\tau_0^{j+1}H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}F_{j+1}=\tau_0^{j+1}H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}\left(F_j+K_QF_j\right)+$$

$$+\tau_0^{j+1}H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}\theta_j=\left(\tau_0^{j+1}H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}K_QF_j+\tau_0^{j+1}H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}F_j\right).$$

Поскольку в силу (3.4.2)

$$N_{p,j}(A)=\tau_0^{j+1}H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}K_QF_j$$

и

$$\tau_0N_{p,j}(A)=\tau_0^{j+1}H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}F_j,$$

то $M_{p,j}\left(j<0\right)$ являются $\left(p,j\right)_+$-индексным подпространством м.-ф. A.

Пусть $j=0$. Нетрудно видеть, что $C^n\subset N_{p,1}(A)$ и $\tau_0N_{p,0}(A)\subset N_{p,1}(A)$. С другой стороны $C^n\cap\tau_0N_{p,0}(A)=\{0\}$. Из равенства $\dim N_{p,k}(A)=\sum_{j<k}(k-j)\mu_p(G,j)(k,j\in Z)$ (см. [77]) имеем

$$\dim N_{p,1}(A)=n+\kappa\left(\kappa=\left|\kappa_1+\cdots+\kappa_n\right|\right)$$

и

$$\dim N_{p,0}(A)=\kappa.$$

Отсюда $N_{p,1}(A)=C^n\dot{+}\tau_0N_{p,0}(A)=C^n\dot{+}\tau_0\operatorname{Im}H_p^-\left(A^{-1}\right)$. В силу (3.4.1), пространства $\operatorname{Im}H_p^-\left(A^{-1}\right)+\tau_0\operatorname{Im}H_p^-\left(A^{-1}\right)$ и $\tau_0H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}\left(K_Qy+x\right)+\mathcal{H}_{-1}^-y$ (где y,x произвольные векторы из $C^{nv_r\left(A^{-1}\right)}$) совпадают. Взяв $x=-K_Qy$, получим $\operatorname{Im}\mathcal{H}_{-1}^-\subset\operatorname{Im}H_p^-\left(A^{-1}\right)+\tau_0\operatorname{Im}H_p^-\left(A^{-1}\right)$, т.е.

$$N_{p,0}(A)+\tau_0N_{p,0}(A)=\operatorname{Im}H_p^-\left(A^{-1}\right)+\tau_0\operatorname{Im}H_p^-\left(A^{-1}\right)=\operatorname{Im}\mathcal{H}_{-1}^-\dot{+}\tau_0N_{p,0}(A).$$

Из равенства $N_{p,1}(A)=C^n\dot{+}\tau_0\operatorname{Im}H_p^-\left(A^{-1}\right)$ следует, что $N_{p,1}(A)=\hat{N}_{p,0}(A)\dot{+}\theta_0$.

Пусть $\overline{y}\in\theta_j\left(j<0\right)$ и $H_p^-\left(A^{-1}\right)\Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)}\overline{y}=0$. Тогда $\overline{y}=0$, т.е $\dim M_{p,j}=\dim\theta_j$. □

Из предложения 3.4.1. и теоремы1.1.6 следует следующая теорема.

Теорема.3.4.1 *Пусть* $A \in \left(L_p^-\right)^{n\times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap \left(M_1^-\right)^{n\times n}$, $v_r\left(A^{-1}\right) \neq 0$ *и* $\eta_1 < \cdots < \eta_s$ *все возможные значения* $\kappa_1 \leq \cdots \leq \kappa_n - \left(r_+, p\right)$ *частных индексов м.-ф.* A. *Пусть* $\left\{ y_{\eta_i,1}, \dots y_{\eta_i,n_i} \right\}$ $\left(i = 1,\dots,s\right)$ *базисы пространств* θ_{η_i} $\left(i = 1,\dots,s\right)$, *а в.-ф.* $U_{\eta_i,j}$ $\left(i = 1,\dots,s; j = 1,\dots,n_i\right)$ *определены следующим образом.* $U_{\eta_i,j} = \tau_0^{\eta_i+1} H_p^-\left(A^{-1}\right) \Psi_{-v_r\left(A^{-1}\right)} y_{\eta_i,j}$, *если* $\eta_i < 0, i = 1,\dots s; j = 1,\dots,n_i$;

и $U_{0,j} = y_{0,j}$ *если* $\eta_s = 0$, $j = 1,\dots,n_s$.

Тогда, если $A_+ = \left[U_{\eta_1,1},\cdots,U_{\eta_1,n_1},U_{\eta_2,1},\cdots,U_{\eta_s,n_s}\right], \Lambda(t) = ding\left[t^{\kappa_1},\cdots,t^{\kappa_n}\right]$, $A_- = AA_+\Lambda^{-1}$, *то представление* $A = A_-\Lambda A_+^{-1}$ *является* $I\left(r_+, p\right)$ *факторизацией м.-ф.* A.

Если $v_r\left(A^{-1}\right) = 0$, *то представление* $A = AI_nI_n$ *является* $I\left(r_+, p\right)$ *факторизацией м.-ф.* A .

2^0 . Рассмотрим теперь случай, когда $A \in \left(M_p^-\left(\Gamma\right)\right)^{n\times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ $(1 < p < \infty)$.

Пусть $\Omega'_{\varepsilon,i}\left(i = 0,\dots,m\right)$ односвязные области с границей $\Gamma'_{\varepsilon,i} = \partial\Omega'_{\varepsilon,i}$ удовлетворяющие включениям: $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega'_{\varepsilon,0}$, $\Omega'_{\varepsilon,0} \subset \Omega_0 + U_\varepsilon$, $\bar{\Omega}'_{i,\varepsilon} \subset \Omega_i$, $\bar{\Omega}_i \subset \Omega'_{i,\varepsilon} + U_\varepsilon\left(i = 1,\dots,m\right)$. Будем предполагать, что $\Gamma'_{i,\varepsilon}\left(i = 0,\dots,m\right)$ являются замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми и контур $\Gamma'_\varepsilon = \bigcup_{j=0}^{m} \Gamma'_{\varepsilon,j}$ ориентирован таким образом, что при ее обходе внутренняя область $\Omega'^+_\varepsilon = \Omega'_{0,\varepsilon} \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \bar{\Omega}'_{\varepsilon,j}$ остается слева, а внешняя область $\Omega'^-_\varepsilon = \bar{C} \setminus \bar{\Omega}'^+_\varepsilon$ справа.

Следующая теорема позволяет восстановить $I\left(r_+, p\right)$ $(1 < p < \infty)$ факторизацию м.-ф. A на контуре Γ по ее факторизации на контуре Γ'_ε.

Теорема.3.4.2. *Пусть* $A \in \left(M_p^-\left(\Gamma\right)\right)^{n\times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, *а целое неотрицательное число* k *и многочлен* q *нули которого лежат в* Ω^-, *таковы, что* $\tau_0^{-k} qA \in \left(L_p^-\left(\Gamma\right)\right)^{n\times n}$. *Тогда при достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *м.-ф.* $\tau_0^{-k} qA$ *допускает* $WH\left(r, p\right)$ *факторизацию относительно контура* Γ'_ε. *Если представление* $\tau_0^{-k} qA = \tilde{A}_-\tilde{\Lambda}\tilde{A}_+^{-1}$ *является* $WH\left(r, p\right)$ *факторизацией м.-ф.*

$\tau_0^{-k}qA$ относительно контура Γ'_ε, то $\tilde{A}_+ \in R^{n\times n}$. Если $A_+ = \tilde{A}_+ q$, $\Lambda = \tilde{\Lambda}\tau_0^k$, $A_- = \tau_0^{-k}qA\tilde{A}_+\tilde{\Lambda}^{-1}$, то представление $A = A_-\Lambda A_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ факторизацией м.-ф. A на контуре Γ. В частности (r_+, p) частные индексы м.-ф. A в случае $v_l\left(\tau_0^{-k}q^{-1}A^{-1}\right) > 0$ могут быть вычислены по формулам

$$\kappa_i = -v_i\left(\tau_0^{-k}q^{-1}A^{-1}\right) + k + card\left\{ j \middle| h_{j-1}^-\left(\Gamma'_\varepsilon, \tau_0^{-k}q^{-1}A^{-1}\right) - h_j^-\left(\Gamma'_\varepsilon, \tau_0^{-k}q^{-1}A^{-1}\right) < i\right\}, i = 1,\ldots,n$$

Если $v_l\left(\tau_0^{-k}qA^{-1}\right) = 0$, то $\kappa_1 = \cdots = \kappa_n = k$.

Доказательство. Из условий $A \in \left(M_p^-(\Gamma)\right)^{n\times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ следует, что число $\varepsilon > 0$ может быть выбрано таким образом, что м.-ф. A аналитична и $\det A$ отлична от нуля в некоторой области, содержащей множество $\bar{\Omega}'^+_\varepsilon \setminus \bar{\Omega}^+$. Поскольку $\left(\tau_0^{-k}qA\right)^{\pm 1} \in M_\infty^-\left(\Gamma'_\varepsilon\right)$, то из теоремы 2.7 [44] следует, что м.-ф. $\tau_0^{-k}qA$ допускает $WH(r, p)$ факторизацию относительно контура Γ'_ε. В частности, из теоремы 1.1.9 эта факторизация одновременно является и $I(r_+, p)$ факторизацией относительно контура Γ'_ε. Утверждение относительно $\tilde{A}_+ \in R^{n\times n}$, по существу, содержится в доказательстве теоремы 2.4.1. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что факторы $A_\pm$ и Λ удовлетворяют условиям определения $I(r_+, p)$ факторизации м.-ф. относительно контура Γ. Формулы для частных индексов следуют из теоремы 3.3.1 и равенства $\Lambda = \tau_0^k\tilde{\Lambda}$. □

§5 Некоторые замечания

1^0Пользуясь доказательством теоремы 3.4.2. и повторяя рассуждения доказательства теоремы 2.4.1 нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема.3.5.1 *Пусть $A \in \left(M_p^-(\Gamma)\right)^{n\times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ $(1 < p < \infty)$. Тогда сумма (r_+, p) частных индексов м.-ф. A совпадает с разницей количества полюсов и нулей функции* $\det A$ *в области Ω^- с учетом их кратности.*

Замечание.3.5.1 Пусть $A \in \left(\tilde{M}_p^-\right)^{n\times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. В силу определения класса $\tilde{M}_p^-$, существует полином q_0, нули которого расположены на контуре Γ и $q_0 A \in \left(M_p^-\right)^{n\times n}$. Тогда $\left(q_0 A\right)^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. Теоремы 3.4.1 и 3.4.2 позволяют строить $I\left(r_+, p\right)$ факторизацию м.-ф. $q_0 A$. $I\left(r_+, p\right)$факторизация м.-ф. A может быть восстановлена из $I\left(r_+, p\right)$ факторизации $q_0 A$ с помощью схемы предложенной в главе I §2.

2^0Теоремы1.3.1 и 1.3.2 относительно задачи Римана для м.-ф. $(G^T)^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ ($1 < p < \infty$) можно сформулировать следующим образом.

Теорема3.5.2 *Пусть* $(G^T)^{-1} \in \mathcal{MF}_q(\Omega^-)$ *и* $G^T \in (\tilde{M}_q^-)^{n\times n}$ $(1 < p < \infty, q = p/(p-1))$.*Тогда утверждение теоремы1.3.1 справедливо.Кроме того, если* $(G^T)^{-1} \in \mathcal{MF}_q(\Omega^-)$, $G^T \in (M_q^-)^{n\times n}$ *то* $(G_+^T)^{-1} g \in (L_p^+)^n$.

Доказательство.Первое утверждение очевидным образом следует из теорем 3.1.1 и 1.3.1. Из следствии 3.1.1 имеем что $G_+^T \in R_0^{n\times n}$ *и* $\det G_+^T\left(z\right) \neq 0$, *для* $z \in \Gamma$.Отсюда следует что $(G_+^T)^{-1} \in R_0^{n\times n}$,и потому $(G_+^T)^{-1} g \in (L_p^+)^n$,что доказывает теоремы 3.5.2. □

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема3.5.3 *Пусть* $(G^T)^{-1} \in \mathcal{MF}_q(\Omega^-)$ *и* $G^T \in (\tilde{M}_q^-)^{n\times n}$.*Тогда справедливы утверждение теоремы1.3.2. Кроме того, если* $(G^T)^{-1} \in \mathcal{MF}_q(\Omega^-)$, $G^T \in (M_q^-)^{n\times n}$, *то условие b) теоремы1.3.2 выполняется автоматическим образом.*

Заключение

В диссертационной работе получены следующие результзты:

• Для произвольной рациональной функции g приводится схема построения индексной факторизации матрицы-функции gG по индексной факторизации матрицы-функции G.

• Векторная краевая задача Римана решена в терминах индексной факторизации.

• Введены классы $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ ($\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$) $(1 \le p \le \infty)$ мероморфных матриц-функций во внутренней(внешней) области контура.Для матриц-функций из класса $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и матриц-функций обратные к которым принадлежат $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, получены необходимые и достаточные условия существования индексной факторизуемости.

• Получены явные формулы частных индексов и суммарного индекса для матриц-функций из указанных классов.

• Построена индексная факторизация матриц-функций из указанных классов.

ЛИТЕРАТУРА

1 Новокшенов В. Ю. Уравнения в свертках на конечном отрезке и факторизация эллиптических матриц. Матем. заметки, 1980, 27, N.6, стр. 935-946.

2 Пальцев Б. В. Об одном методе построения канонической матрицы решений задачи Гильберта, возникающей при решении уравнений свертки на конечном итервале. Изв.АН СССР , сер.Матем.,1981,45,N.6, с.1332–1390.

3 Спитковский И. М. Факторизация некоторых классов полу – почти – периодических матриц – функций и ее приложение к системам уравнений типа свертки. Изв. вузов. Математика, 1983, N. 4, с. 88 – 94.

4 Камалян А. Г., Нерсесян А. Б. Интегральные операторы типа плавного перехода. Функ. анализ и его приложения, том.23, вып.2, Москва, 1989, стр. 32-39.

5 Малышев В. А. Уравнения Винера-Хопфа и их применения в теории верноятностей. В кн. Итоги науки и техники. Теория Вероятностей, Математическая статистика, Теоретическая кибернетика. М., 1976, 13, с. 5-35.

6 Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М. Наука, 1963.

7 Под ред. Новикова С.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М. Наука, 1980.

8 Захаров В. Е., Шабат А. Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. 2. Функ. анализ и его приложения, 1979, 13, N.3, с.13-22.

9 Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фадеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. Москва “Наука” главная редакция физ.-мат.литературы 1986.

10 Ворович И. И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические задачи теории упругости. М. Наука, 1974.

11 В.А.Бабешко.Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. Москва “Наука” главн. редакц. физ.-мат. лит.1984.

12 Храпков А. А. Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил. Прикл. Матем. и Мех., 1971, 35, N.4, с.677–689

13 Heins A. E. The Sommerfeld Half – plane Problem Revisited, I. The Solution of a Pair of Coupled Wiener – Hopf Integral equations. – Math. Meth. Appl. Sci., 1982, 4, N.1, p. 74 – 90.

14 Heins A. E. The Sommerfeld Half – plane Problem Revisited, II. The Factoring of a Matrix of Analitic Functions. – Math. Meth. Appl. Sci., 1983, 5, N.1, p. 14 – 21.

15 Daniele V. G. On the solution of Two coupled Wiener – Hopf Equations .Stam .J. Appl. Math.,vol.44,No 4,1984,p.667-680.

16 Daniele V. G. On the Factorization of Wiener – Hopf Matrices in Problems Solvable with Hurd`s Metod. IEEE. Trans. Antennas propag, AP – 26, 1978, p. 614 – 616.

17 Meister E. and Speck F. O. The Explicit Solution of Elastodynamical Difraction Problems by Symbol Factorization. Z. Anal. Anwendungen. 8(4), 1989, p. 307 – 328

18 Plemelj J.,Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodrom iegruppe,Monatsh.f *für* Math.und phys, X I X 1908, 211-245.

19 Carleman T.,Sur la resolution de cartaines equations integrales.Ark.math. .1922,16 No26,1-19.

20 Winer N.,Hopf E.,Uber eine Klasse singul*ä*arer integralgleichungen Sit-rungsber.Preuss.Akad.d.wiss,1931., 696-707.

21 Гахов Ф.Д. Линейные краевые задачи теории функций комплексной переменной,Изв.Казанск.Физ.-Матем.об-ва X,сер.3,1938,39-79.

22 Гахов Ф.Д.,Краввые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения, Изв.Казанск.Физ.-Матем.об-ва XIV,сер.3,1949,75-160.

23 Гахов Ф.Д.,Краевые задача Римана для системы n пар функций,УМН VII,вып.4(50),1952,3-54.

24 Мусхелишвили Н.И.,Векуа Н.П.,Краевая задача Римана для нескольких неизвестных функций и ее приложение к системам сингулярных интегральных уравнений.Тбилис.мат.ин-та.АН.Груз.СССР.1943.

25 Мусхелишвили Н.И., Сингулярные интегральные уравнения.-М.:Наука,1968.

26 Векуа Н.П.Системы сингулярных интегральных уравнений.-М.: Наука 1970.

27 Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром,зависящим от разности аргументов.-Успехи мат.наук,1953,13.вып.5,стр.3-120.

28 Гохберг И.Ц. Крейн М.Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами,зависящими от разности аргументов.-Успеи мат.наук,1958,13.вып.2,с.37-72.

29 Симоненко И.Б. Краевая задача Римана n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение исследованию сингулярных интегралов в пространстве L_p с весами.-Изв.АН.СССР.Сер.Мат.,1964,28, N 2,с.277-306.

30 Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных интегральных уравнений.-I.-Изв.АН.СССР.Сер.Мат.,1965,29, N 3,с.567-586.

31 Симоненко И.Б. Некоторые общие вопросы теории краевой задаче Римана.-Изв.АН.СССР,Сер.Мат.1968,32, N.5,с.1138-1146.

32 Хведелидзе Б. В. Линейные разрывные граничные задачи функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения. Тр. Тбилис. Мат. Ин-та АН Груз. ССР, 1956, 23, стр. 3-158.

33 Манджавадзе Г. Ф., Хведелидзе Б. В. О задаче Римана – Привалова с непрерывными коэффициентами. ДАН СССР, 1958, том. 123, N.5, стр. 791-794.

34 Симоненко И. Б. Краевая задача Римана для систем n пар функций с непрерывными коэффициентами. Изв. Вузов. Математика, 1961, N.1, стр. 140-145.

35 Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Сингулярные интегральные операторы с кусочно – непрерывными коэффициентами и их символы, Изв. АН СССР, сер. Матем., 1971, 35, N.4, стр. 940-964.

36 Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Кишинев, “Штиинца”, 1973 г.

37 Douglas R. G. Toeplitz and Wiener – Hopf Operators in $H^{\infty}+C$. Bull. Amer. Math. Soc. , 1968, 74, N.5, p. 895 – 899.

38 Sarason D. E. Toeplitz Operators with Piecewise Quasicontinuous Symbols. Indiana Univ. Math. J., 1977, 26, vol.5, p. 817 – 838.

39 Sarason D. E. Toeplitz Operators with Semi – almost – periodic Symbols. Duke Math. J., 1977, 44, vol.2, p. 357 – 364.

40 Heinig G., Silberman B., Factorization of Matrix Functions in Algebras of Bounded Functions. In: Spectral Theory of Linear Operators and Related Topics. Operator Theory: Advances and Appl. vol. 14, p. 157 – 177, Basel: Birkhauser, Verlag, 1984.

41 Спитковский И. М. Некоторые оценки для частных индексов измеримых матриц – функций. Матем. сб., 1980, 3, N.2, стр. 227-248.

42 Сагинашвили А. Н. Сингулярные интегральные уравнения с коэффициентами, имеющими разрывы полу-почти-периодического типа. Тр. Тбилис. Мат. Ин-та АН Груз. ССР, 1980, 66, стр. 84-95.

43 Clancey K., Gohberg I., "Factorization of matrix-functions and singular integral operators", Operator Theory: Advances and Appl., vol. 3, Birkhauser, Basel, 1981.

44 Litvinchuk G. S., Spitkovskii I. M., Factorization of matrix-functions, Akademie – Verlag, Berlin, 1987.

45 Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.Наука, 1971.

46 Bottcher A., Silberman B., Analysis of Toeplitz Operators. Akademie – Verlag, Berlin and Springer – Verlag, Heidelberg, 1983

47 Mikhlin S. G., Prossdorf S. Singular Integral Operators. Berlin, Springer, 1986, Berlin: Akademie – Verlag, 1986.

48 Speck F. O. General Wiener – Hopf Factorization Methods. London: Pitman, 1985.

49 Чеботарев Г. Н. К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций. Уч. Зап. Казанского Ун-та, 1956, 116, N.4, стр. 31-58.

50 Векуа Н. П. Краевая задача Гильберта с рациональными коэффициентами для нескольких неизвестных функций. Сообщ. АН Груз. ССР, 1946, 7, N.9-10, стр. 595-600.

51 Чеботарев Г. Н. Некоторые матричные уравнения и их применение к решению в замкнутой форме краевой задачи Римана. Тр. Всесоюзного Матем. Съезда, 1956, 1, стр. 3.

52 Гордиенко В. Н. Факторизация матриц – функций частного вида. Украинский Матем.ж., 1971, 23, N.1, стр. 81-88.

53 Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Об индексах кратных расширений матриц–функций. Изв. АН Молд. ССР, 1967, 8, с. 76 – 80.

54 Диденко В. Д., Чернецкий В. А. Краевая задача Римана с комплексной ортогональной матрицей. Матем. заметки, 1978, 23, вып.3, с. 405-416.

55 Черепанов Г. П. Решение одной краевой задачи для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам. Теории упругости. ПММ, 1962, 26, N.5, стр. 907-912.

56 Примачук Л. П. Об одном интегрируемом случае задачи Римана с подстановочной матрицей. ДАН СССР, 1978, 22, N.4, с. 310 – 313.

57 З. Пресдорф. Некоторые классы сингулярных уравнений.Изд.”Мир”Москва 1979.

58 Енгибарян Н.Б.Факторизация матриц-функций и нелинейные интегральные уравнения.-Изв.А.Н.Арм.ССР.Математика,1980,15, N.3.с.233-244.

59 Prossdorf S., Speck F. – O. A Factorization Procedure for Two by Two Matrix Functions on the Circle with Two Rationally Independent Entries. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 115, 1990, p.119 – 138.

60 Lebre A. B. Factorization in the Wiener Algebra of a Class of 2×2 Matrix Functions. Integral Equations and Operator Theory, 125, 1989, p. 408 – 423.

61 Моисеев Н. Г. О факторизации матриц–функций специального вида. ДАН СССР, 1980, 305, vol 1, с. 44 – 47.

62 I.Feldman, I.Gohberg, N.Krupnik, A method of Explicit Faktorization of Matrix Funktions and Applications,IEOT 18,277-302(1994).

63 I.Feldman,I.Gohberg,N.Krupnik, On Explicit Faktorization and Applications,IEOT 21,430-45(1995).

64 I.Feldman, I.Gohberg, N.Krupnik, An Explicit Faktorization Algorithm,IEOT 49,149-164(2004).

65 Камалян А. Г. Эффективная факторизация некоторых классов матриц – функций, ДАН Армении, 1992, том. 93, N.3, стр. 99-104.

66 А. Г .Камалян, В.А.Оганян, О факторизации f-циркулянтных матриц-функций,Изв.НАН Армении,Математика,28(5),44-62(1993).

67 А. Г .Камалян, В.А.Оганян,Метод конструктивного построения факторизации для одного класса матриц-функций,Изв.НАН Армении,Математика,28(3),44-62(1993).

68 Спитковский И. М., Факторизация измеримых матриц-функций, связанные с ней теории систем сингулярных интегральных уравнений и векторной краевой задачи Римана, I. – Дифференц. уравнения, 1981, No 4, с. 697–709.

69 Bart H., Gohberg I., Krashaek M. A., Explicit Wiener-Hopf factorization and Realization Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 21, Constructive Methods of Winer-Hopf Factorization, pp. 235–316.

70 Gohberg I., Lerer L., Rodman L. Factorization indices for Matrix Polynomials. Amer. Math. Soc., vol. 84, N.2, p. 275 – 277, 1978.

71 Gohberg I., Lerer L., Rodman L. On Factorization, Indices and Completely Decomposable Matrix Polynomials. Tel – Aviv Univ., technical report 80 – 47, Dec. 1980, p. 1 – 72.

72 Адуков В. М. Факторизация треугольных матриц – функций второго порядка. Деп. ВИНИТИ 01.12.82, N.5930-82, с.1-14.

73 Камалян А. Г., Обобщенная факторизация ограниченных голоморфных матриц-функций, Изв. НАН Армении, 1997, Т. 32, N 2, стр. 19–38.

74 Спитковский И. М., Обобщенная факторизация матриц-функций и краевая задача Римана с бесконечными частными индексами, ДАН СССР, 1986, Т. 286, No 13, с. 559–562.

75 Спитковский И. М., О векторной краевой задаче Римана с бесконечными дефектными числами и связанной с ней факторизации матриц-функций, Мат. сборник, 1988, Т. 135, вып. 4, с. 553–550.

76 Камалян А.Г., Некоторые свойства ядер теплицевых операторов, ДНАН Армении,2007,Т.107.Вып.4.стр.316-322.

77 Камалян А. Г., Индексная факторизация матриц-функций, ДНАН Армении, 2008, Т.108 Вып.1.стр.5-11.

78 Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций,- М.: ГИТЛ, 1950.

79 Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного,-М.:Наука, 1966.

80 Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я., К определению аналитических функций класса Е в многосвязных областях, - Успехи матем. наук, 1958, No 13, вып. 1, с. 201-206.

81 Хведелидзе Б. В., Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной, Современные проблемы математики, Т. 7 (Итоги науки и техники), М.: ВИНИТИ, 1975, с. 5-162.

82 Амирджанян Р.А., Камалян А.Г.,Факторизация мероморфных матриц-функций,Изв. НАН Армении,математика 2007,т 42, N.6, стр 30-49.

83 Амирджанян Р.А., О некоторых свойствах Ганкелева оператора с мероморфным символом, "Математика в высшей школе", 2007,Т. 3, N. 2 ,стр.25-29.

84 Амирджанян Р. А., О влиянии простейших сомножителей на факторизацию матрицы-функции, Вестник РАУ, сер. физ-мат. и естеств. науки, 2007, N.1,стр.12-21.

85 Амирджанян Р.А., Камалян А.Г., О векторной краевой задаче Римана с мероморфным коэффициентом, Вестник РАУ, сер. физ-мат. и естеств. науки, 2007, N.2, стр.41-47.