Министерство образования и науки Республики Армения

Ереванский Государственный Университет

Карен Ларикович Аветисян

Весовые пространства гармонических и голоморфных функций

Специальность 01.01 — математический анализ

Диссертация на соискание
ученой степени доктора
физико–математических наук

ЕРЕВАН — 2009

Оглавление

Введение

Диссертационная работа посвящена изучению весовых пространств гармонических и голоморфных функций, заданных в единичном поликруге и шаре из $\mathbb{C}^n$, а также в полупространстве и единичном шаре из $\mathbb{R}^n$. Все функциональные пространства, которые будут рассмотрены в настоящей работе, в принципе возникли и развились из классической теории классов Харди H^p. Основоположники этой теории — Харди и Ф. Рисс в 1910-20-х годах заметили, что если $f(z)$ — аналитическая функция в единичном круге $\mathbb{D}$, то ее интегральное среднее порядка $p>0$ на окружности $|z|=r$

$$M_p(f;r)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}, \qquad 0\le r<1, \tag{1}$$

обладает теми же свойствами, что максимум модуля

$$M_\infty(f;r)=\max_{|z|=r}|f(z)|, \qquad 0\le r<1,$$

они возрастающие функции по r. Ф. Рисс предложил ввести класс H^p аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций, для которых величина (1) ограничена. Относительно нормы

$$\|f\|_{H^p}=\sup_{0<r<1}M_p(f;r) \tag{2}$$

классы H^p становятся банаховыми пространствами при $1\le p\le\infty$, а при $0<p<1$ классы H^p являются полными линейными метрическими пространствами относительно инвариантной метрики $\|f-g\|_{H^p}$.

Основополагающие работы Харди, Литтлвуда, Ф. Рисса, М. Рисса, Сегё, Смирнова, Привалова, Бергмана, Неванлинны и их последователей выявили ту важную роль, какую играют классы Харди и их обобщения в различных вопросах гармонического анализа, граничных свойств функций, теории степенных рядов и рядов Фурье, линейных операторов, экстремальных и аппроксимационных задач.

В 1920-30-х годах в работах Бергмана [48], Харди, Литтлвуда, Пэли ([104]–[107], [147], [148]), Зигмунда [15] и других возникли аналоги и обобщения классов Харди, в которых равномерная норма в (2) заменяется интегральной нормой, обычно с некоторым весом. Возникают пространства Бергмана и пространства со смешанной нормой. В Армении исследование и развитие теории пространств Бергмана и других смежных функциональных классов началось с работ М.М. Джрбашяна (см. [10], [11], [12]), который, в частности, вывел интегральное представление для весовых пространств Бергмана.

В настоящее время теория пространств Харди понимается в широком смысле и объединяет ряд далеких друг от друга областей классического и современного анализа.

Говорят, что аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ принадлежит пространству $H(p,q,\alpha)$ $(0 < p,q \le \infty,\ \alpha > 0)$ со смешанной нормой, если для $f(z)$ конечна (квази)норма

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(f;r)dr\right)^{1/q}, \qquad q < \infty,$$
$$\|f\|_{p,\infty,\alpha} = \sup_{0<r<1} (1-r)^\alpha M_p(f;r).$$

В частном случае $p = q$ классы $H(p,p,\alpha)$ сводятся к весовым пространствам Бергмана, а при $q = \infty$ получающиеся классы $H(p,\infty,\alpha)$ называют весовыми пространствами Харди. Соответствующие пространства, содержащие гармонические функции, будем обозначать через $h(p,q,\alpha)$.

Пространства $H(p,q,\alpha), h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой и их аналоги в многомерных областях $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$ являются одними из основных объектов изучения в настоящей работе.

Настоящая работа лежит в русле классического направления теории пространств Харди и включает следующие основные темы:

1) неравенства Литтлвуда–Пэли;

2) лакунарные ряды в $H(p,q,\alpha)$ и смежных классах;

3) интегральные представления и проекции типа Бергмана в $h(p,q,\alpha)$;

4) максимальные теоремы типа Харди–Литтлвуда в классах Бергмана $h(p,p,\alpha)$;

5) интегральные операторы и производные в $h(p,q,\alpha)$ и смежных классах;

6) интегральные представления и гармоническое сопряжение в $h(p,q,\alpha)$, включая классы $h(p,q,\omega)$ с гораздо более общими весами, чем традиционные степенные весовые функции.

Все эти вопросы мы будем изучать не только в классах $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой, но в той или иной степени в таких пространствах, как весовые пространства Харди, Бергмана, Харди–Соболева, Липшица–Бесова, Лоренца, Блоха, BMO.

Отметим, что в послевоенное время весомый вклад в развитие указанных пространств внесли Джрбашян, Флетт, Тейблсон, Стейн, Форелли, Рудин, Хавинсон, Хавин, Дюрен, Шилдс, Вильямс, Столл и другие, см. их работы в Библиографии. В настоящее время несколько групп специалистов в мире активно работают в указанных направлениях, особенно в Испании, Сербии, США, Китае, Южной Корее, Германии, России, Финляндии. Отметим имена некоторых авторов, результаты которых существенно использовались в настоящей работе или очень близки к теме настоящей работы: Бласко, Ортега, Фабрега, Гирела, Пелаес, Павлович, Йевтич, Стевич, Койфман, Рохберг, Беатрус, Бурбеа, Люкинг, Акслер, Жу, Жао, Ши, Миао, Рен, Ли, Буи, Чой, Ким, Квон, Шпрёссиг, Гюрлебек, Бернштейн, Широков, Александров, Дьяконов, Шамоян, Ауласкари и другие.

Пусть
$$U^n = \{z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, 1 \le j \le n\}$$
— единичный поликруг пространства $\mathbb{C}^n$, и

$$T^n = \{w = (w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j| = 1, 1 \le j \le n\}$$

— n-мерный тор (остов поликруга). В поликруге U^n будем рассматривать n-гармонические функции, т.е. функции, гармонические по каждой переменной z_j в отдельности.

Пусть

$$I^n = [0,1)^n, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad r \in I^n, \quad dr = dr_1 \cdots dr_n, \quad r\zeta = (r_1\zeta_1, \ldots, r_n\zeta_n).$$

Через $\mathbb{Z}_+^n$ обозначим множество всех мультииндексов $m = (m_1, \ldots, m_n)$ с неотрицательными целыми координатами $m_j \in \mathbb{Z}_+$. Считая также, что $q \in \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, положим

$$(1-r)^\alpha = \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j}, \qquad r^\alpha = \prod_{j=1}^n r_j^{\alpha_j}, \qquad \Gamma(\alpha) = \prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial r_n}\right)^{m_n}, \qquad \alpha q + 1 = (\alpha_1 q + 1, \ldots, \alpha_n q + 1).$$

Для функции $f(z) = f(rw), r \in I^n, w \in T^n$, заданной в U^n, введем в рассмотрение оператор $D^\alpha \equiv D_r^\alpha$ дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля относительно переменной $r \in I^n$:

$$D^{-\alpha} f(z) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha-1} f(\eta z) d\eta, \qquad D^\alpha f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m D^{-(m-\alpha)} f(z),$$

$$\mathcal{D}^{-\alpha} f(z) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} f(z), \qquad \mathcal{D}^\alpha f(z) = D^\alpha \big\{ r^\alpha f(z) \big\}, \qquad z = rw \in U^n,$$

где $\alpha_j > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_j - 1 < \alpha_j \le m_j$, $1 \le j \le n$.

Обозначим через $h(U^n)$ (и $H(U^n)$) множество всех n-гармонических (соотв. голоморфных) функций в U^n. Для измеримой в U^n функции $f(z) = f(rw)$ ее интегральные средние запишем как

$$M_p(f; r) = \big\| f(r\cdot) \big\|_{L^p(T^n; dm_n)}, \quad r = (r_1, \ldots, r_n) \in I^n, \quad 0 < p \le \infty,$$

где $I^n = [0,1)^n, dm_n$ — мера Лебега на T^n, нормированная так, чтобы $m_n(T^n) = 1$. Класс n-гармонических (голоморфных) функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{h^p} = \sup_{r \in I^n} M_p(f; r) < +\infty,$$

есть обычное пространство Харди h^p (соотв. H^p).

Квазинормированное пространство $L(p,q,\alpha)\big(0 < p, q \le \infty, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big)$ — это множество тех функций $f(z)$, измеримых в поликруге U^n, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{I^n} \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j q - 1} M_p^q(f; r) \prod_{j=1}^n dr_j \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{r \in I^n} \displaystyle\prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j} M_p(f; r), & q = \infty. \end{cases}$$

Если для каждого $j \in [1, n]$,

$$(1-r)^\alpha M_p(u; r) = o(1) \quad \text{при} \quad r_j \to 1^-,$$

то скажем, что n-гармоническая функция $u(z)$ принадлежит малому пространству $h_0(p, \infty, \alpha)$.

Обозначим подпространства $L(p, q, \alpha)$, состоящие из n-гармонических или голоморфных функций,

$$\begin{aligned} h(p, q, \alpha) &= h(U^n) \cap L(p, q, \alpha), \\ H(p, q, \alpha) &= H(U^n) \cap L(p, q, \alpha), \\ H_0(p, \infty, \alpha) &= H(U^n) \cap h_0(p, \infty, \alpha). \end{aligned}$$

Для $p = q < \infty$ пространства $h(p, q, \alpha)$ и $H(p, q, \alpha)$ совпадают с известными весовыми пространствами Бергмана, а при $q = \infty$ получаем весовые пространства Харди.

В **Главе 1** мы обобщаем классические L^p–неравенства Литтлвуда–Пэли

$$\|g(f)\|_{L^p} \approx \|f\|_{L^p}, \qquad 1 < p < \infty, \tag{3}$$

где

$$g(f)(\theta) = \left(\int_0^1 (1-r)|f'(re^{i\theta})|^2 dr \right)^{1/2}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi), \tag{4}$$

$f(z)$ — голоморфная функция в единичном круге $\mathbb{D}$, см. [148], [15, Гл. XIV].

Литтлвуд [146, Проблема 28, с.43] высказал предположение о справедливости L^p-неравенств (3) для g-функции (4) в случае двух комплексных переменных и выразил желание обойтись без "плоских" комплексных методов.

Для заданной в U^n функции $f(z)$ и параметров $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, $0 < q \le \infty$ определим g-функцию типа Литтлвуда–Пэли:

$$g_{q,\alpha}(f)(w) = \begin{cases} \left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q - 1} |\mathcal{D}^\alpha f(rw)|^q dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{r \in I^n} (1-r)^\alpha |\mathcal{D}^\alpha f(rw)|, & q = \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $q = 2$ и $\alpha = (1, 1, \ldots, 1)$ эта функция соответствуют классической g-функции (4).

Теорема 0.1. *Пусть $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$, $2 \le q < \infty$, и $u(z)$ — интеграл Пуассона функции $f \in L^p(T^n)$. Тогда*

$$\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n)\|f\|_{L^p}.$$

Если, к тому же, функция $u(z)$ голоморфна в U^n, то для любого $p > 0$ справедливо неравенство

$$\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n)\|u\|_{H^p}.$$

Теорема 0.2. *Пусть $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$, $0 < q \le 2$, $u(z)$ — n-гармоническая функция в U^n такая, что $g_{q,\alpha}(u) \in L^p(T^n)$. Тогда $u(z)$ является* *интегралом Пуассона своей граничной функции $f \in L^p(T^n)$, причем имеет место неравенство*

$$\|f\|_{L^p} \le C(p,q,\alpha,n)\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.$$

При $n=2, q=2, \alpha=(1,1)$ Теоремы 0.1 и 0.2 дают утвердительный ответ на вопрос Литтлвуда [146, Проблема 28, с.39,43]. Важно, что наше доказательство свободно от комплексных методов и может быть успешно распространено на другие случаи. В Главе 1 получены также другие разновидности Теорем 0.1 и 0.2.

В **Главе 2** характеризованы лакунарные степенные ряды в различных пространствах голоморфных функций в поликруге.

Последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется лакунарной (по Адамару), если существует постоянная $\lambda>1$ такая, что $\frac{m_{k+1}}{m_k} \ge \lambda$ для всех $k=0,1,2,\ldots$. Соответствующий степенной ряд называется лакунарным. Классическая теорема Пэли (см. [15, Гл.5, Теор.8.20]) характеризует лакунарные ряды в пространствах Харди и утверждает, что голоморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$, принадлежит классу Харди H^p для любого p, $0<p<\infty$, тогда и только тогда, когда $\{a_k\}\in \ell^2$. Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|f\|_{H^p} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k\right|^2\right)^{1/2}.$$

Мы распространили результат Пэли на случай поликруга и затем обобщили его, получив характеризации более общих весовых пространств голоморфных в поликруге функций.

Теорема 0.3. *Пусть $\left\{m_{j,k_j}\right\}_{k_j=0}^{\infty}$ $(j=1,2,\ldots,n)$ — произвольные лакунарные последовательности, и $f(z)$ — голоморфная в U^n функция, заданная сходящимся лакунарным рядом*

$$f(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} a_{k_1\ldots k_n} z_1^{m_{1,k_1}}\cdots z_n^{m_{n,k_n}}, \qquad z\in U^n.$$

Тогда для любого p, $0<p<\infty$, функция f принадлежит классу Харди H^p тогда и только тогда, когда $\{a_k\}\in\ell^2$. Более того, соответсвующие нормы эквивалентны:

$$C_1\|f\|_{H^p} \le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} \left|a_{k_1\ldots k_n}\right|^2\right)^{1/2} \le C_2\|f\|_{H^p},$$

где постоянные $C_1, C_2>0$ независимы от f.

Теорема 0.4. *Пусть $\left\{m_{j,k_j}\right\}_{k_j=1}^{\infty}$ $(j=1,2,\ldots,n)$ — произвольные лакунарные последовательности, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_j>0$, и $f(z)$ — голоморфная функция в U^n, заданная сходящимся лакунарным рядом*

$$f(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} a_{k_1\ldots k_n} z_1^{m_{1,k_1}}\cdots z_n^{m_{n,k_n}}, \qquad z\in U^n. \tag{5}$$

Тогда следующие утверждения равносильны:

(a)	$f(z) \in H(\infty, \infty, \alpha)$;		
(b)	$f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$	*для некоторого*	$p \in (0, \infty)$;
(c)	$f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$	*для всех*	$p \in (0, \infty)$;
(d)	$\sup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \dfrac{\lvert a_k \rvert}{m_{1,k_1}^{\alpha_1} \cdots m_{n,k_n}^{\alpha_n}} < +\infty.$		

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|f\|_{\infty,\infty,\alpha} \approx \|f\|_{p,\infty,\alpha} \approx \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|a_k|}{m_{1,k_1}^{\alpha_1} \cdots m_{n,k_n}^{\alpha_n}}.$$

Следующая теорема дает характеристику лакунарных рядов в пространствах со смешанной нормой, классах Бесова и ряда других.

Теорема 0.5. *Пусть* $\left\{m_{j,k_j}\right\}_{k_j=0}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *— произвольные лакунарные последовательности,* $0 < q < \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, *и* $f(z)$ *— голоморфная функция в* U^n, *заданная сходящимся лакунарным рядом* (5). *Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a)	$\mathcal{D}^\beta f(z) \in H(\infty, q, \alpha)$;		
(b)	$\mathcal{D}^\beta f(z) \in H(p, q, \alpha)$	*для некоторого*	$p \in (0, \infty)$;
(c)	$\mathcal{D}^\beta f(z) \in H(p, q, \alpha)$	*для всех*	$p \in (0, \infty)$;
(d)	$\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \dfrac{\left\lvert a_{k_1 \ldots k_n} \right\rvert^q}{m_{k_1}^{(\alpha_1 - \beta_1)q} \cdots m_{k_n}^{(\alpha_n - \beta_n)q}} < +\infty.$		

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|\mathcal{D}^\beta f\|_{\infty,q,\alpha} \approx \|\mathcal{D}^\beta f\|_{p,q,\alpha} \approx \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\left|a_{k_1 \ldots k_n}\right|^q}{m_{k_1}^{(\alpha_1 - \beta_1)q} \cdots m_{k_n}^{(\alpha_n - \beta_n)q}} \right)^{1/q}.$$

В **Главе 3** мы исследуем в основном операторы типа Бергмана и воспроизводящие интегральные формулы n-гармонических функций в единичном поликруге $U^n \subset \mathbb{C}^n$. Ограниченность проекторов и других операторов типа Бергмана получена в пространствах $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой и пространствах Бесова.

Изучается также необычное явление, присущее только (n-)гармоническим классам $h(p, q, \alpha)$. В отличие от голоморфных пространств $H(p, q, \alpha)$, при $0 < p < 1$ пространства $h(p, q, \alpha)$ не являются тривиальными при некоторых мультииндексах $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с неположительными $\alpha_j \le 0$. Получены точные условия на индексы, при которых пространства $h(p, q, \alpha)$ являются нетривиальными. Ядро Пуассона в поликруге

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n} P(z_j) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - |z_j|^2}{|1 - z_j|^2}$$

является хорошим примером нетривиальной функции из $h(p, q, \alpha)$ с $\alpha_j \le 0$.

Для поликруга U^n определим ядра P_α типа Пуассона и "сопряженные" ядра Q_α типа Пуассона

$$P_\alpha(z,\zeta)=\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\alpha_j+1)\left[\operatorname{Re}\frac{2}{(1-z_j\bar{\zeta}_j)^{\alpha_j+1}}-1\right],\qquad \alpha_j\geq 0,\quad z,\zeta\in U^n, \tag{6}$$

$$Q_\alpha(z,\zeta)=\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\alpha_j+1)\operatorname{Im}\frac{2}{(1-z_j\bar{\zeta}_j)^{\alpha_j+1}}\qquad \alpha_j\geq 0,\quad z,\zeta\in U^n. \tag{7}$$

При $\alpha_j=0$ эти ядра сводятся к обычным ядру и сопряженному ядру Пуассона. Более того, можно распространить определение ядер P_α и Q_α на отрицательные $\alpha_j<0$, полагая $P_\alpha=\mathcal{D}^\alpha P_0$ и $Q_\alpha=\mathcal{D}^\alpha Q_0$ для всех $\alpha_j\in\mathbb{R}$.

Доказана воспроизводящая интегральная формула типа Пуассона–Бергмана в $h(p,q,\alpha)$.

Теорема 0.6. *Пусть $\alpha_j>0$, $u\in h(p,q,\alpha)$. Если $0<p,q\leq\infty$, $\beta_j>\max\{\alpha_j+1/p-1,\ \alpha_j\}$, либо $1\leq p\leq\infty$, $0<q\leq 1$, $\beta_j\geq\alpha_j\quad(1\leq j\leq n)$, то*

$$u(z)=\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\beta_j)}\int_{U^n}\prod_{j=1}^{n}(1-|\zeta_j|^2)^{\beta_j-1}P_\beta(z,\zeta)\,u(\zeta)\,dm_{2n}(\zeta),\qquad z\in U^n. \tag{8}$$

где $P_\beta(z,\zeta)$ — ядра типа Пуассона (6).

Представление (8) порождает линейные интегральные операторы типа Бергмана:

$$T_{\beta,\lambda}(f)(z)=\frac{(1-|z|^2)^\lambda}{\Gamma(\beta+\lambda)}\int_{U^n}(1-|\zeta|^2)^{\beta-1}P_{\beta+\lambda}(z,\zeta)\,f(\zeta)\,dm_{2n}(\zeta),$$

$$S_{\beta,\lambda}(f)(z)=\frac{(1-|z|^2)^\lambda}{\Gamma(\beta+\lambda)}\int_{U^n}(1-|\zeta|^2)^{\beta-1}|P_{\beta+\lambda}(z,\zeta)|\,f(\zeta)\,dm_{2n}(\zeta),$$

где $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Также, мы определим схожие интегральные операторы с "сопряженным" ядром Q_β типа Пуассона:

$$\widetilde{T}_{\beta,\lambda}(f)(z)=\frac{(1-|z|^2)^\lambda}{\Gamma(\beta+\lambda)}\int_{U^n}(1-|\zeta|^2)^{\beta-1}Q_{\beta+\lambda}(z,\zeta)\,f(\zeta)\,dm_{2n}(\zeta),$$

$$\widetilde{S}_{\beta,\lambda}(f)(z)=\frac{(1-|z|^2)^\lambda}{\Gamma(\beta+\lambda)}\int_{U^n}(1-|\zeta|^2)^{\beta-1}|Q_{\beta+\lambda}(z,\zeta)|\,f(\zeta)\,dm_{2n}(\zeta).$$

Естественно поставить вопрос об ограниченности этих операторов на пространствах со смешанной нормой. Следующая теорема типа Форелли–Рудина дает частичный ответ на этот вопрос.

Теорема 0.7. *(i) Пусть $1\leq p,q\leq\infty$, $\beta_j>\alpha_j>-\lambda_j\,(1\leq j\leq n)$. Тогда каждый из операторов $T_{\beta,\lambda},\widetilde{T}_{\beta,\lambda},S_{\beta,\lambda},\widetilde{S}_{\beta,\lambda}$ непрерывно отображает пространство $L(p,q,\alpha)$ в себя. Более того, оператор $T_{\beta,0}\,(\lambda_j=0)$ проектирует $L(p,q,\alpha)$ на $h(p,q,\alpha)$.*

(ii) Пусть $1\leq p,q<\infty$, $\alpha_j,\beta_j,\lambda_j\in\mathbb{R}$. Тогда каждый из операторов $T_{\beta,\lambda},S_{\beta,\lambda}$ ограничен в $L(p,q,\alpha)$ в том и только в том случае, если $\beta_j>\alpha_j>-\lambda_j\,(1\leq j\leq n)$.

Далее, возникает вопрос: что является образом пространства $L(p,q,\alpha)$ с отрицательными α_j при отображениях $T_{\beta,\lambda}$ и $\widetilde{T}_{\beta,\lambda}$? Оказывается, что образом пространства

$L(p,q,\alpha)$ с $\alpha_j \le 0$ при действии операторов $T_{\beta,0}$ и $\widetilde{T}_{\beta,0}$ является пространство Бесова $h\Lambda^{p,q}_\alpha$ n-гармонических функций.

Определение. Скажем, что функция $f(z)$, заданная в U^n, принадлежит пространству Бесова $\Lambda^{p,q}_\alpha$ $(0 < p,q \le \infty, \alpha_j \ge 0)$, если $\mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}} f(z) \in L(p,q,\widetilde{\alpha}-\alpha)$, где $\widetilde{\alpha} = (\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_n)$, $\widetilde{\alpha}_j$ — наименьшее целое число, превосходящее α_j, и $\mathcal{D}^\alpha$ — оператор интегродифференцирования Римана–Лиувилля.

Пространство Бесова $\Lambda^{p,q}_\alpha$ снабжено (квази)нормой $\|f\|_{\Lambda^{p,q}_\alpha} = \|\mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}} f\|_{p,q,\widetilde{\alpha}-\alpha}$.

Пусть $h\Lambda^{p,q}_\alpha$ — подпространство $\Lambda^{p,q}_\alpha$, содержащее n-гармонические функции. Для функции $f \in h\Lambda^{p,q}_\alpha$ мультииндекс $\widetilde{\alpha}$ может быть заменен на любой мультииндекс $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, $\gamma_j > \alpha_j$, при этом получаются эквивалентные нормы: $\|f\|_{h\Lambda^{p,q}_\alpha} \approx \|\mathcal{D}^\gamma f\|_{p,q,\gamma-\alpha}$.

Теорема 0.8. *При $1 \le p,q \le \infty$, $\alpha_j \ge 0$, $\beta_j > 0\,(1 \le j \le n)$ операторы*

$$T_{\beta,0} : L(p,q,-\alpha) \longrightarrow h\Lambda^{p,q}_\alpha, \tag{9}$$

$$\widetilde{T}_{\beta,0} : L(p,q,-\alpha) \longrightarrow h\Lambda^{p,q}_\alpha, \tag{10}$$

ограничены. Более того, отображение (9) *сюръективно.*

Далее, как выяснил Стейн [187], проекция Бергмана сохраняет классы Липшица в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$ и в строго псевдовыпуклых областях из $\mathbb{C}^n$ (см. также [142], [77]). Естественно поставить вопрос: верно ли это свойство для более общих пространств Бесова? В следующей теореме мы обобщаем это свойство сохранения на пространства Бесова при действии оператора типа Бергмана, который ограниченно проектирует пространство Бесова $\Lambda^{p,q}_\alpha$ на его n-гармоническое подпространство $h\Lambda^{p,q}_\alpha$.

Теорема 0.9. *При $1 \le p,q \le \infty$, $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$ оператор типа Бергмана*

$$\Phi_{\widetilde{\alpha}}(f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\widetilde{\alpha})} \int_{U^n} (1-|\zeta|^2)^{\widetilde{\alpha}-1}\, P(z,\zeta)\, \mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}} f(\zeta)\, dm_{2n}(\zeta),$$

непрерывно проектирует $\Lambda^{p,q}_\alpha$ на $h\Lambda^{p,q}_\alpha$.

В качестве приложения проекционных теорем мы находим в Теореме 47 сопряженные пространства к $h(p,q,\alpha)$. Аналогичные результаты получены также в верхнем полупространстве из $\mathbb{R}^{n+1}$.

В **Главе 4** мы доказываем максимальные теоремы типа Харди–Литтлвуда в весовых пространствах Бергмана на единичном шаре из $\mathbb{R}^n$ и на верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Максимальные неравенства Харди и Литтлвуда являются важнейшими инструментами в гармоническом анализе, см. монографии [4], [15], [18], [23], [24].

Пусть $n \ge 2$ — целое число, и $B = B_n$— открытый единичный шар в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, и $S = \partial B$ — его граница, единичная сфера. Обозначим через $h(B_n,\mathbb{R})$, $h(B_n,\mathbb{C})$ соответственно, множества вещественнозначных и комплекснозначных гармонических функций, заданных в единичном шаре. Для вещественнозначной или векторнозначной функции $f(x) = f(r\zeta)$ в B_n $(0 \le r < 1, \zeta \in S)$, ее интегральные средние определяются как

$$M_p(f;r) = \|f(r\cdot)\|_{L^p(S,d\sigma)}, \qquad 0 \le r < 1, \quad 0 < p \le \infty,$$

где $d\sigma$ — нормированная мера Лебега на сфере S. Норма Бергмана измеримой функции в B_n определяется как

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{B_n} (1-|x|)^\alpha |f(x)|^p dV_n(x)\right)^{1/p}, \qquad 0 < p < \infty,\ \alpha > -1,$$

где dV_n — мера Лебега на шаре B_n, нормированная так, чтобы $V_n(B_n) = 1$. В полярных координатах имеем $dV_n(x) = nr^{n-1}dr d\sigma(\zeta)$ ([42, с.6]). Определим соответствующие весовые пространства Бергмана h^p_α гармонических функций

$$h^p_\alpha = \Big\{u \in h(B_n, \mathbb{R}) \text{ или } u \in h(B_n, \mathbb{C}) : \|u\|_{p,\alpha} < +\infty\Big\}.$$

Общую теорию гармонических пространств Бергмана можно найти в [42], [121], [153].

Теорема 0.10. *Пусть $u(x) : B_n \longrightarrow \mathbb{R}$ — вещественнозначная гармоническая функция из пространства Бергмана h^p_α в единичном шаре B_n для некоторых $\alpha > -1$ и $0 < p < 1$. Тогда радиальные максимальные функции*

$$u_+(x) = \sup_{0<t<1} \big|u(tx)\big| = \sup_{0<\rho<r} \big|u(\rho\zeta)\big|, \qquad x = r\zeta,$$

$$g(x) = \sup_{0<t<1} \big|\nabla u(y)|_{y=tx}\big| = \sup_{0<\rho<r} \big|(\nabla u)(\rho\zeta)\big|, \quad x = r\zeta,$$

удовлетворяют неравенствам

$$\|u_+\|_{p,\alpha} \le C(p,\alpha,n)\|u\|_{p,\alpha}.$$

$$\|g\|_{p+\alpha,\alpha} \le C(p,\alpha,n)\|u\|_{p,\alpha}.$$

Аналогичные результаты получены также в верхнем полупространстве из $\mathbb{R}^{n+1}$. Эти максимальные теоремы применяются в дальнейшем для оценок интегралов и производных функций из пространств $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой.

Отметим, что условие малости параметра $0 < p < 1$ в максимальных теоремах имеет принципиальное значение, поскольку функция $|u|^p$ при $0 < p < 1$ уже не является субгармонической функцией, а ее интегральные средние $M_p(u;r)$, вообще говоря, не монотонны по r. Именно это обстоятельство выявляет ценность Теоремы 0.10 для достижения наших целей в последующих главах.

Глава 5 — одна из основных в настоящей работе. В Разделах 5.1 и 5.2 мы изучаем следующий вопрос: если n-гармоническая функция $u(z)$ принадлежит пространству $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой, что можно сказать о производной или первообразной этой функции. Здесь мы вновь приходим к очень неприятному обстоятельству, а именно, что функция $|u|^p$ $(0 < p < 1)$ не обязательно n-субгармоническая, а интегральные средние $M_p(u;r)$, вообще говоря, не монотонны по r. Переход от n-гармонических функций к голоморфным невозможен, поскольку n-гармонические функции, вообще говоря, не являются вещественными частями голоморфных функций. Поэтому нам нужна независимая теория n-гармонических пространств $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой.

Большую часть соотношений с (дробным) интегродифференцированием в пространствах $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой можно представить в виде единой упорядоченной таблицы.

Теорема 0.11. *Пусть* $0 < p, q \leq \infty, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \alpha_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, $p_0 = \min\limits_{1\leq j\leq n} 1/(\alpha_j + 1/p - \beta_j)$. *Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{array}{rlll}
(i) & \mathcal{D}^{\beta} : h^p \longrightarrow h(p, q, \beta), & \beta_j > 0, 1 < p \leq q \leq \infty, q \geq 2, & (11)\\
(ii) & \mathcal{D}^{\beta} : h^p \longrightarrow h(p, \infty, \beta), & \beta_j \geq 0, & (12)\\
(iii) & \mathcal{D}^{\beta} : h^p \longrightarrow h\left(p_1, q, \beta + 1/p - 1/p_1\right), & \beta_j > 0,\ 1 < p \leq q \leq \infty, & \\
 & & \qquad q \geq 2,\ p \leq p_1 \leq \infty, & (13)\\
(iv) & \mathcal{D}^{\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h(p, q, \alpha + \beta), & \beta_j \geq 0,\ 0 < p < \infty, & (14)\\
(v) & \mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h(p, q, \alpha - \beta), & -\infty < \beta_j < \alpha_j,\ \alpha_j > 0, & (15)\\
(vi) & \mathcal{D}^{-\alpha} : h(p, \infty, \alpha) \longrightarrow h\big(p, \log(1/p)\big), & 0 < p \leq 2,\ \alpha_j > 0, & (16)\\
(vii) & \mathcal{D}^{-\alpha} : h(p, \infty, \alpha) \longrightarrow h\big(p, \log(1/2)\big), & 2 \leq p < \infty,\ \alpha_j > 0, & (17)\\
(viii) & \mathcal{D}^{-\alpha} : h(p, \infty, \alpha) \longrightarrow h(\infty, \infty, 1/p), & 0 < p < \infty,\ \alpha_j > 0, & (18)\\
(ix) & \mathcal{D}^{-\alpha} : h(\infty, \infty, \alpha) \longrightarrow h\big(p, \log(1/2)\big), & 0 < p < \infty,\ \alpha_j > 0, & (19)\\
(x) & \mathcal{D}^{-\alpha} : h(\infty, \infty, \alpha) \longrightarrow h\big(\infty, \log(1)\big), & \alpha_j > 0, & (20)\\
(xi) & \mathcal{D}^{-\alpha} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h^p, & \alpha_j > 0,\ 0 < p < \infty, & \\
 & & \qquad 0 < q \leq \min\{2, p\}, & (21)\\
(xii) & \mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h^p, & \beta_j > \alpha_j > 0, & (22)\\
(xiii) & \mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h^s, & \beta_j > 0,\ \alpha_j < \beta_j < \alpha_j + 1/p, & \\
 & & \qquad 0 < p < \infty,\ 0 < s < p_0, & (23)\\
(xiv) & \mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h^{p_0}, & \beta_j > 0,\ \alpha_j < \beta_j < \alpha_j + 1/p, & \\
 & & \qquad 0 < p < \infty,\ 0 < q \leq p_0, & (24)\\
(xv) & \mathcal{D}^{-\alpha} : h(\infty, q, \alpha) \longrightarrow \mathcal{B}h, & \alpha_j > 0, & (25)\\
(xvi) & \mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow BMOh, & \beta_j = \alpha_j + 1/p > 0,\ 0 < p < \infty, & (26)\\
(xvii) & \mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h^{\infty}, & \beta_j = \alpha_j + 1/p > 0,\ 0 < q \leq 1, & (27)\\
(xviii) & \mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h\Lambda_{\beta-\alpha-1/p}, & \beta_j > 0,\ \beta_j > \alpha_j + 1/p, & (28)\\
(xix) & \mathcal{D}^{-\alpha} : h(\infty, q, \alpha) \longrightarrow hF_0^{\infty,q}, & \alpha_j > 0, & (29)\\
(xx) & \mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h(s, q, \alpha), & 0 < \beta_j \leq 1/p,\ \alpha_j > 0,\ 0 < p < \infty, & \\
 & & \qquad 0 < s \leq \min\limits_{1\leq j\leq n} \dfrac{p}{1 - \beta_j p}, & (30)
\end{array}$$

При этом все соотношения (i)–(xx) наилучшие в определенном смысле.

Здесь $BMOh$ — класс n-гармонических функций с ограниченной средней осцилляцией, $\mathcal{B}h$ — класс Блоха n-гармонических функций, $h\Lambda_\gamma$ — класс Липшица (порядка γ) n-гармонических функций, hF_α^{pq} — пространство Трибеля–Лизоркина, $h(p, \alpha) = h(p, \infty, \alpha)$, $h\big(p, \log(\alpha)\big)$ — логарифмически весовые классы Харди, см. Раздел 5.1.

Для $n = 1$ и функций, голоморфных в единичном круге соотношения (i), (iii), (v), (xi), (xvii) установлены в работах Флетта (см. [91]). Ряд других ссылок можно найти в основном тексте Главы 5.

В Разделе 5.3 мы изучаем тот же вопрос о действии оператора дробного интегродифференцирования в пространствах $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой на верхнем полупространстве.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, и $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, |x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$, $dx=dx_1\cdots dx_n$. Пусть $\mathbb{R}^{n+1}_+$ обозначает верхнее полупространство $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$. Точки этого полупространства представим в виде $(x,y)=(x_1,\ldots,x_n,y), x\in\mathbb{R}^n$, $y>0$. Иногда удобно будет положить $x_0=y$. Для измеримой в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функции $f(x,y)$ ее интегральные средние обозначим через

$$M_p(f;y)=\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,dx)},\qquad y>0,\quad 0<p\le\infty.$$

Класс (комплекснозначных) гармонических функций $u(x,y)$, для которых

$$\|u\|_{h^p}=\sup_{y>0}M_p(u;y)<+\infty,$$

есть класс Харди $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Квазинормированное пространство $L(p,q,\alpha)\quad(0<p,q\le\infty,\alpha>0)$ — это множество тех функций $f(x,y)$, измеримых в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p,q,\alpha}=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}y^{\alpha q-1}M_p^q(f;y)dy\right)^{1/q}, & 0<q<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{y>0}\ y^{\alpha}M_p(f;y), & q=\infty.\end{cases}$$

Пусть $h(p,q,\alpha)$ — подпространство $L(p,q,\alpha)$, содержащее гармонические функции. При $p=q<\infty$ пространства со смешанной нормой сводятся к весовым пространствам Бергмана. Гармонические пространства $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой и гармонические пространства Бергмана $h(p,p,\alpha)$ в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ были изучены несколькими авторами, см. [225], [89], [90], [61], [175], [8], [169].

Для функции $f(x,y)$, измеримой и комплекснозначной в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, введем в рассмотрение оператор дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля $\mathcal{D}^{-\alpha}\equiv\mathcal{D}_y^{-\alpha}$ (потенциал Рисса) относительно переменной y:

$$\mathcal{D}^{-\alpha}f(x,y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\sigma^{\alpha-1}f(x,y+\sigma)d\sigma,$$
$$\mathcal{D}^0f=f,\quad \mathcal{D}^{\alpha}f(x,y)=(-1)^m\mathcal{D}^{-(m-\alpha)}\frac{\partial^m}{\partial y^m}f(x,y),$$

где $\alpha>0$, а m — целое, определенное из условия $m-1<\alpha\le m$.

Для измеримой функции f на $\mathbb{R}^n$ через λ_f обозначим ее функцию распределения, т.е.

$$\lambda_f(t)=|\{x\in\mathbb{R}^n;|f(x)|>t\}|,\qquad t>0,$$

где $|E|=\operatorname{mes}E$ — мера Лебега множества $E\subset\mathbb{R}^n$. Функция

$$f^*(s)=\inf\{t>0;\lambda_f(t)\le s\}$$

называется убывающей перестановкой функции f.

Пространство Лоренца $L(p,q)$ определяется как множество всех измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций f, для которых $\|f\|_{L(p,q)} < +\infty$, где

$$\|f\|_{L(p,q)} = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} \left[t^{1/p} f^*(t) \right]^q \dfrac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p, q < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \, t^{1/p} f^*(t), & 0 < p \le \infty, \; q = \infty. \end{cases}$$

Хорошо известно, что

$$L(p,q_1) \subset L(p,p) = L^p \subset L(p,q_2) \subset L(p,\infty) \subset L^1 \left(\frac{dt}{1+|t|^{n+1}} \right)$$

при $1 \le p \le \infty, 0 < q_1 \le p \le q_2 \le \infty$.

Гармоническое пространство Лоренца $h(p,q), \; 1 < p \le \infty, 1 \le q \le \infty$ (см. [90], [61]) определяется как множество гармонических в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функций $u(x,y)$ с конечной нормой Лоренца $\|u\|_{h(p,q)} = \sup_{y>0} \|u(x,y)\|_{L(p,q)}$. Поэтому $h(p,p) = h^p, \; 1 < p < \infty$. Все соотношения с дробным интегродифференцированием в пространствах $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой можно представить в виде единой упорядоченной таблицы.

Теорема 0.12. *Пусть $0 < p, q \le \infty, \; \alpha > 0, \; \beta \in \mathbb{R}$. Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{D}^{\alpha} : h^p \longrightarrow h(p,q,\alpha), & 1 < p \le q \le \infty, \, 2 \le q \le \infty, \\
\mathcal{D}^{\alpha} : h^p \longrightarrow h(p_1,q,\alpha + n/p - n/p_1), & 1 < p \le q \le \infty, \, 2 \le q \le \infty, \, p < p_1 \le \infty, \\
\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h(p,q,\alpha - \beta), & -\infty < \beta < \alpha, \, 0 < p, q \le \infty, \\
\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h^p, & \beta = \alpha, \, 0 < p < \infty, \, 0 < q \le \min\{2,p\}, \\
\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h^{p_0}, & \alpha < \beta < \alpha + n/p, \, 0 < p < \infty, \, q \le p_0, \\
\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h(p_0,q_0), & \alpha < \beta < \alpha + n/p, \, 1 \le p < \infty, \\
 & \qquad 0 < q \le q_0 \le \infty, \, 1 < q_0 \le \infty, \\
\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow \mathcal{B}, & \beta = \alpha + n/p, \, p = \infty, \, 0 < q \le \infty, \\
\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow BMOh, & \beta = \alpha + n/p, \, 0 < p < \infty, \, 0 < q \le \infty, \\
\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h^{\infty}, & \beta = \alpha + n/p, \, 0 < p \le \infty, \, 0 < q \le 1.
\end{array}$$

Здесь $p_0 = \frac{n}{\alpha + n/p - \beta}$, $h(p,q)$ обозначает гармоническое пространство Лоренца, $\mathcal{B}$ — гармоническое пространство Блоха, и $BMOh$ — пространство гармонических в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функций с граничными значениями из $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Глава 6 целиком посвящена интегральным представлениям в пространствах со смешанной нормой и пространствах Бергмана.

В Разделе 6.1 мы строим интегральные представления типа Пуассона классов $h(p,q,\alpha)$ в виде свертки с использованием функций пространств Бесова. В отличие от широко известных бергмановских представлений, интеграл распространен не по всему поликругу, а лишь на части его границы — по тору T^n.

Теорема 0.13. *Пусть $0 < p, q \le \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, $1 \le j \le n$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) Пространство $h(p,q,\alpha)$ совпадает с множеством всех функций $u(z)$, представимых в виде

$$u(z) = \int_{T^n} P_\beta(z,\zeta)\,\varphi_1(\zeta)\,dm_n(\zeta), \qquad z \in U^n, \tag{31}$$

где $\beta_j > \max\{\alpha_j,\, \alpha_j + 1/p - 1\}$, φ_1 — функция класса Бесова $h\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}$, и P_β— ядро типа Пуассона–Бергмана (6).

(ii) Пространство $H(p,q,\alpha)$ совпадает с множеством всех функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z) = \int_{T^n} P_\beta(z,\zeta)\,\varphi_2(\zeta)\,dm_n(\zeta), \qquad z \in U^n, \tag{32}$$

где $\beta_j > \max\{\alpha_j,\, \alpha_j + 1/p - 1\}$, φ_2 — функция класса Бесова $\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}$, которую можно голоморфно продолжить в U^n.

(iii) Оператор $\varphi_1 \mapsto u$ является изоморфизмом, действующим из $h\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}$ на $h(p,q,\alpha)$, а оператор $\varphi_2 \mapsto f$ является изоморфизмом, действующим из $H\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}$ на $H(p,q,\alpha)$.

(iv) Функции φ_1, φ_2 из (31)– (32) *могут быть выведены из формул обращения*

$$\varphi_1(\zeta) = \lim_{r\to(1,\dots,1)} \mathcal{D}^{-\beta} u(r\zeta), \qquad \text{п.в.} \quad \zeta \in T^n,$$

$$\varphi_2(\zeta) = \lim_{r\to(1,\dots,1)} \mathcal{D}^{-\beta} f(r\zeta), \qquad \text{п.в.} \quad \zeta \in T^n,$$

где $\beta_j > \max\{\alpha_j,\, \alpha_j + 1/p - 1\}$ $(1 \le j \le n)$.

В Разделе 6.2 аналогичные интегральные представления получены для пространств $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой в верхнем полупространстве.

В Разделе 6.3 мы отказываемся от традиционных степенных весовых функций в определении нормы пространства Бергмана и рассматриваем гораздо более общие весовые функции ω. Мы строим интегральные представления для весовых пространств Бергмана $H^p_\omega(\mathbb{R}^2_+)$ в верхней полуплоскости. С этой целью определим "дробное" ω-интегродифференцирование для голоморфных функций в верхней полуплоскости. Затем строим и оцениваем семейство ядер типа Коши–Бергмана, ассоциированных с весовыми функциями ω. Все это даст возможность установить воспроизводящие интегральные формулы для пространств Бергмана с общими весами, которые могут убывать сколь угодно быстро в начале координат. Соответствующие функции Бергмана могут иметь произвольно быстрый рост вблизи вещественной оси.

Пусть $\mathbb{R}^2_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость комплексной плоскости, и $H(\mathbb{R}^2_+)$ — множество всех голоморфных функций на $\mathbb{R}^2_+$. При $0 < p < \infty$ обозначим через $H^p = H^p(\mathbb{R}^2_+)$ обычное пространство Харди на $\mathbb{R}^2_+$. Обозначим через L^p_ω множество тех функций $f(z)$, измеримых на $\mathbb{R}^2_+$, для которых конечна (квази)норма

$$\|f\|_{p,\omega} = \left(\iint_{\mathbb{R}^2_+} |f(x+iy)|^p \omega(2y)\,dxdy \right)^{1/p}.$$

где $0 < p < \infty$, ω — некоторая радиальная весовая функция, зависящая только переменной $y > 0$. Для подпространства L^p_ω, состоящего из голоморфных функций, обозначим $H^p_\omega = H(\mathbb{R}^2_+) \cap L^p_\omega$.

Пространства Бергмана с общими весами изучались многими авторами, см., например, [36], [53], [99], [3], [108], [174], [29], [31], [181], [192] и др. в контексте единичного круга, единичного шара и поликруга из $\mathbb{C}^n$, в то время как пространства Бергмана с общими весами в полуплоскости изучались гораздо реже. Следуя Шилдсу и Вильямсу [181], все эти авторы рассматривали "регулярные" весовые функции, удовлетворяющие некоторым ограничениям на рост вблизи границы области. Поэтому их техника была близкой к случаю стандартных весовых функций $\omega(r) = (1-r)^{\alpha-1}$ для единичного круга, шара или поликруга и $\omega(y) = y^{\alpha-1}$ $(\alpha > 0)$ для верхней полуплоскости (полупространства). Более общие весовые функции изучались в работах А. Карапетяна [16], [17], в рамках пространств со смешанной нормой в трубчатых областях $\mathbb{C}^n$ при $1 \le p \le 2$. В то же время в работах [16], [17] применялась в основном техника Фурье–Ераншереля, которая строго зависела от ограничения $1 \le p \le 2$.

В отличие от работ А. Карапетяна [16], [17], наши доказательства опираются на технику "дробного" интегродифференцирования, ассоциированного с весовой функцией ω, а также на оценки ядер типа Коши–Бергмана K_ω. Это дало нам возможность достичь результатов для всех $p, 1 \le p < \infty$.

Определение. Скажем, что положительная и непрерывная на $(0,\infty)$ функция $\omega(x)$ принадлежит классу $W(= W_{\delta,\alpha})$, если существуют $\delta, \alpha > 0$ такие, что $\omega(x) = O(x^{\delta-1})$ при $x \to +0$, и $\omega(x) \approx x^{\alpha-1}$ при $x \to +\infty$.

Последнее условие на бесконечности можно ослабить, однако это не принципиально, и главным для $\omega(x)$ условием является свобода убывать сколь угодно быстро при $x \to +0$.

Следующие типичные весовые функции принадлежат классу W:

$$x^{\alpha-1}, \quad e^{-1/x}, \quad x^{\alpha-1}e^{-\beta/x}, \quad \exp\big(-e^{1/x}\big), \quad \exp\big(-\exp(e^{1/x})\big) \qquad \text{и т. д.},$$

где $\alpha, \beta > 0$.

Для весовых функций $\omega \in W$ рассмотрим их преобразования Лапласа

$$\mathcal{L}_\omega(t) = \int_0^\infty \omega(x) e^{-tx} dx, \qquad t > 0.$$

Введем оператор ω-интегрирования

$$\mathfrak{I}^\omega f(z) = \int_0^\infty \omega(\eta) f(z + i\eta) d\eta, \qquad z \in \mathbb{R}^2_+.$$

В специальном случае $\omega(\eta) = \frac{1}{\Gamma(a)}\eta^{\alpha-1}$ $(\alpha > 0)$ оператор $\mathfrak{I}^\omega$ сводится к хорошо известному оператору дробного интегрирования Римана–Лиувилля.

Для того чтобы определить обратный оператор, предположим, что функция $f(z)$ представима сходящимся интегралом

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{itz} F(t) dt, \qquad z \in \mathbb{R}^2_+, \tag{33}$$

с некоторой функцией $F(t)$, не обязательно принадлежащей L^2. Тогда определим

$$\mathcal{D}^\omega f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{itz} F(t)}{\mathcal{L}_\omega(t)} dt, \qquad z \in \mathbb{R}^2_+.$$

Пусть $\omega \in W$ и $K(z) = \dfrac{-1}{iz} = \displaystyle\int_0^\infty e^{itz} dt$ — обычное ядро Коши в $\mathbb{R}^2_+$. Определим ω-ядро типа Коши–Бергмана формулой

$$K_\omega(z) = \mathcal{D}^\omega K(z), \qquad z \in \mathbb{R}^2_+.$$

В интегральной форме

$$K_\omega(z) = \int_0^\infty \frac{e^{itz}}{\mathcal{L}_\omega(t)} dt$$

эти ядра были введены А. Карапетяном [16], [17]. Также определим модификации

$$K_\omega(z, \zeta) = K_\omega(z - \bar{\zeta}), \qquad z, \zeta \in \mathbb{R}^2_+.$$

Легко видеть, что для стандартных весов $\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} (\alpha > 0)$ имеем

$$K_\omega(z, \zeta) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\big(i(\bar{\zeta} - z)\big)^{\alpha+1}},$$

т.е. эти ядра сводятся к обычным ядрам Бергмана в полуплоскости.

Теорема 0.14. *Если $1 \le p < \infty, \omega \in W$, то любая функция $f \in H^p_\omega$ представима в виде*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2_+} f(\zeta)\, K_\omega(z, \zeta)\, \omega(2\eta)\, d\xi d\eta, \qquad z \in \mathbb{R}^2_+, \tag{34}$$

где интеграл сходится абсолютно и равномерно в каждой полуплоскости $\mathbb{R} \times (\rho, \infty)$, $\rho > 0$.

Для трубчатых областей в $\mathbb{C}^n$ и $1 \le p \le 2$ представление (34) доказано А. Карапетяном [16], [17] другим методом.

Теорема 0.15. *Пространство H^2_ω $(\omega \in W)$ совпадает с множеством всех функций $f(z)$, представимых в виде*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} K_{\omega_1}(z, t)\, \varphi(t)\, dt, \qquad z \in \mathbb{R}^2_+, \tag{35}$$

где $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, и ω_1 — весовая функция, определяемая интегральным уравнением

$$\omega(x) = \int_0^x \omega_1(x - \xi)\, \omega_1(\xi) d\xi$$

и явно выраженная в виде

$$\omega_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\xi x} \mathcal{L}_{\omega_1}(\xi) d\xi = \frac{e^{ax}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\eta x} \sqrt{\mathcal{L}_\omega(a + i\eta)} d\eta, \qquad x > 0.$$

Оператор $\varphi \mapsto f$, заданный формулой (35), *доставляет изометрический изоморфизм из* $L^2(\mathbb{R})$ *на* H^2_ω.

Глава 7 посвящена вопросу об ограниченности гармонического и плюригармонического сопряжения в пространствах со смешанной нормой и пространствах Бергмана.

Тот факт, что оператор плюригармонического сопряжения сохраняет пространства $h(p,q,\alpha)$ в поликруге (и даже более общих ограниченных симметрических областях) для всех $0 < p, q \leq \infty, \quad \alpha_j > 0$, известен, см., например, [29], [118], [154], [179], [180], [222].

Этот факт у нас легко вытекает в качестве простого следствия из оценок норм в $h(p,q,\alpha)$, которые доказаны в Главе 5. Более того, в Разделе 7.2 ограниченность плюригармонического сопряжения в пространствах со смешанной нормой доказаны для гораздо более общих весовых функций ω.

Пусть $\omega(x)$ — весовая функция, положительная и интегрируемая на интервале (0,1). Будем рассматривать радиальные весовые функции, полагая $\omega(z) = \omega(|z|)$ и $\vec{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ на поликруге U^n.

Обозначим через $\mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}} = \mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n), 0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty$, пространство со смешанной нормой, состоящее из измеримых на U^n функций таких, что

$$\|f\|^q_{p,q,\vec{\omega}} = \int_{(0,1)^n} M^q_p(f,r) \prod_{j=1}^n \omega_j(r_j) dr_j < \infty,$$

и $\mathcal{A}^{p,q}_{\vec{\omega}} = \mathcal{A}^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$ определим как пересечение $\mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}}$ с $H(U^n)$. Также определим $Ph^{p,q}_{\vec{\omega}} = Ph^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$ как пересечение $\mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}}$ с множеством всех плюригармонических функций в U^n. При $p = q$ мы приходим к весовым пространствам Бергмана $\mathcal{A}^{p,p}_{\vec{\omega}} = \mathcal{A}^{p}_{\vec{\omega}}$ с общими весами $\vec{\omega}$.

Следуя Сискакису [185], для заданной весовой функции ω на единичном круге $\mathbb{D}$ определим ее функцию искажения (distortion function)

$$\psi(r) = \psi_\omega(r) = \frac{1}{\omega(r)} \int_r^1 \omega(t) dt, \qquad 0 \leq r < 1.$$

Положим $\psi(z) = \psi(|z|)$ для $z \in \mathbb{D}$.

Не приводя определения Сискакиса [185] допустимых весов (см. Раздел 7.2), приведем несколько типичных допустимых весов со своими функциями искажения:

$$
\begin{array}{llll}
1) & \omega(r) = (1-r)^{\alpha}\left(\log\dfrac{e}{1-r}\right)^{\beta}, & \psi(r) \sim 1-r, & \alpha > -1,\ \beta \in \mathbb{R}, \\
2) & \omega(r) = \left(\log\log\dfrac{e}{1-r}\right)^{\alpha}, & \psi(r) \sim 1-r, & \alpha > 0, \\
3) & \omega(r) = \exp\left[-\beta\left(\log\dfrac{e}{1-r}\right)^{\alpha}\right], & \psi(r) \sim 1-r, & 0 < \alpha \le 1,\ \beta > 0, \\
4) & \omega(r) = (1-r)^{\beta}\exp\left(\dfrac{-\gamma}{(1-r)^{\alpha}}\right), & \psi(r) \sim (1-r)^{\alpha+1}, & \alpha, \gamma > 0,\ \beta \in \mathbb{R}, \\
5) & \omega(r) = \exp\left[-\gamma\exp\left(\dfrac{\beta}{(1-r)^{\alpha}}\right)\right], & \psi(r) \sim (1-r)^{\alpha+1}\exp\dfrac{-\beta}{(1-r)^{\alpha}}, & \alpha, \beta, \gamma > 0, \\
6) & \omega(r) = \exp\left[-\beta\left(\log\dfrac{e}{1-r}\right)^{\alpha}\right], & \psi(r) \sim \dfrac{1-r}{\left(\log\frac{e}{1-r}\right)^{\alpha-1}}, & \alpha > 1,\ \beta > 0.
\end{array}
$$

Как видим, класс допустимых весовых функций достаточно широк.

Имеется другое менее ограничительное условие Павловича–Пелаеса [166] на дифференцируемую весовую функцию ω на $\mathbb{D}$

$$\frac{\omega'(r)}{\omega^2(r)}\int_r^1 \omega(s)ds \le L < \infty, \qquad r \in (0,1), \tag{36}$$

для некоторой постоянной $L > 0$.

В Разделе 7.2 получены эквивалентные нормы в пространствах $\mathcal{A}^{p,q}_{\vec{\omega}}$, что обобщает аналогичный одномерный результат из [166].

Теорема 0.16. *Пусть $f \in H(U^n), 0 < p \le \infty, 0 < q < \infty$, и весовые функции $\omega_j(z_j)$, $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условию (36) с функциями искажения $\psi_j(z_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда $f \in \mathcal{A}^{p,q}_{\vec{\omega}}$ в том и только в том случае, если $\psi_j(z_j)\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \in \mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}}$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Более того,*

$$\|f\|_{p,q,\vec{\omega}} \asymp |f(0)| + \sum_{j=1}^{n}\left\|\psi_j\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_{p,q,\vec{\omega}}.$$

В работе [166] авторы определяют также несколько более узкий (по сравнению с (36)) класс весовых функций, но который все еще довольно широк настолько, что содержит весовую функцию вида

$$\omega(r) = \left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{\gamma}(1-r)^{\beta}\exp\left(\frac{-c}{(1-r)^{\alpha}}\right), \quad \alpha > 0, c > 0, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{37}$$

Для весовых функций, удовлетворяющих условиям (36) или (37), мы доказали ограниченность плюригармонического сопряжения в пространствах со смешанной нормой в поликруге.

Теорема 0.17. *Пусть $1 \le p \le \infty, 0 < q < \infty$, и каждая из весовых функций $\omega_j(z_j)$, $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяет условию (36). Тогда оператор плюригармонического сопряжения сохраняет пространство $Ph^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$. Более того, если $f \in H(U^n), f =$*

$u+iv$, $u \in Ph^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$, и $v(z)$ — плюригармоническое сопряженное функции $u(z)$, нормированное так, что $v(0)=0$, то

$$\|f\|_{p,q,\vec{\omega}} \leq C(p,q,\vec{\omega},n)\|u\|_{p,q,\vec{\omega}}.$$

Естественно возникает вопрос: остается ли верной Теорема 0.17 при $0<p<1$. В этом случае мы в состоянии доказать чуть более слабый результат.

Теорема 0.18. *Пусть $0<p\leq\infty, 0<q<\infty$, и весовые функции $\omega_j(z_j)$, $j=1,\dots,n$, типа (37). Тогда оператор плюригармонического сопряжения сохраняет пространство $Ph^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$. Более того, если $f\in H(U^n), f=u+iv$, $u\in Ph^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$, и $v(z)$ — плюригармоническое сопряженное функции $u(z)$, нормированное так, что $v(0)=0$, то*

$$\|f\|_{p,q,\vec{\omega}} \leq C(p,q,\vec{\omega},n)\|u\|_{p,q,\vec{\omega}}.$$

Теоремы 0.16–0.18 и результаты Раздела 7.2 получены в совместной со С. Стевичем статье [270].

В Разделе 7.4 мы изучаем проблему гармонического сопряжения в весовых пространствах Бергмана кватернионнозначных функций на единичном шаре из $\mathbb{R}^4$. Для скалярнозначной гармонической функции из пространства Бергмана мы находим гармонически сопряженное из того же пространства Бергмана.

Харди и Литтлвуд [105, Теор.5] были первыми, кто изучал проблему гармонического сопряжения в пространствах Бергмана на единичном круге комплексной плоскости. Среди многочисленных обобщений отметим важную систему гармонически сопряженных функций в $\mathbb{R}^n$, введенную Стейном и Вейсом (см. [23]), которая сыграла решающую роль в характеризации пространств Харди на верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Проблема гармонического сопряжения в рамках анализа Клиффорда уже изучалась несколькими авторами. В 1979 году для гармонической в $\mathbb{R}^4$ функции Садбери [224, Теор.4] нашел сопряженные гармонические функции такие, что определяют кватернионнозначную моногенную функцию. Подобную формулу для произвольных размерностей можно найти в монографии [57]. В некоторых работах авторы решали проблему построения гармонически сопряженного ядра Пуассона, см. [55], [73], [233].

Во всех указанных работах один вопрос оставался неизученным: если заданная гармоническая функция принадлежит определенному функциональному пространству, куда попадают сопряженные гармонические функции и построенная этим моногенная функция?

Нашей целью будет изучение гармонического сопряжения в весовых пространствах Бергмана в рамках кватернионного анализа. В основном мы будем использовать формулу Садбери [224] для построения гармонически сопряженных и изучать их свойства.

Пусть $n\geq 2$ — целое число, $B=B_n$— открытый единичный шар n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, и $S=\partial B$ — его граница, единичная сфера. Помимо общего пространства $\mathbb{R}^n$, будем работать в $\mathbb{H}\cong\mathbb{R}^4$, несимметрическом поле вещественных кватернионов. Каждый элемент из $\mathbb{H}$ можно записать в виде

$$x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \qquad (x_0,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R})$$

где система $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ образует базис в $\mathbb{H}$, и $\mathbf{Sc}\, x = x_0$, $\mathbf{Vec}\, x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$. Соответствующие правила умножения задаются формулами

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \qquad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

Сопряженный к $x \in \mathbb{H}$ элемент определяется как

$$\bar{x} = x_0 - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k},$$

и поэтому

$$x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Пусть $\mathbb{Z}_+$ обозначает множество всех неотрицательных целых чисел. Для мультииндекса $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}_+^4$ пусть $\partial^\lambda = \partial_x^\lambda$ обозначает оператор частного дифференцирования порядка $|\lambda| = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ относительно x_0, x_1, x_2, x_3.

Через D обозначим оператор Коши–Римана–Фютера

$$D = \frac{\partial}{\partial x_0} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_3} = \partial_0 + \mathbf{i}\partial_1 + \mathbf{j}\partial_2 + \mathbf{k}\partial_3,$$

и через $\overline{D}$ — его сопряженный оператор

$$\overline{D} = \frac{\partial}{\partial x_0} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_3} = \partial_0 - \mathbf{i}\partial_1 - \mathbf{j}\partial_2 - \mathbf{k}\partial_3.$$

Скажем, что вещественно дифференцируемая функция $f = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, моногенна (слева), если $Df = 0$. Общую теорию кватернионного анализа и анализа Клиффорда можно найти в монографиях [57], [101], [102].

Обозначим через $\mathcal{M}(B_4, \mathbb{H})$, $h(B_4, \mathbb{H})$, $h(B_n, \mathbb{R})$, $h(B_n, \mathbb{C})$, соответственно, множества моногенных, кватернионнозначных гармонических, вещественнозначных гармонических и комплекснозначных гармонических функций, заданных в единичном шаре.

Для вещественнозначной или векторнозначной функции $f(x) = f(r\zeta)$ в шаре B_n $(0 \le r < 1, \zeta \in S)$ ее интегральные средние (p-го порядка) определяются как

$$M_p(f; r) = \|f(r\cdot)\|_{L^p(S, d\sigma)}, \qquad 0 \le r < 1, \quad 0 < p \le \infty,$$

где $d\sigma$ — нормированная поверхностная мера Лебега на сфере S. Бергмановская норма измеримой функции на B_n (или кватернионнозначной функции на B_4) определяется через

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{B_n} (1 - |x|)^\alpha |f(x)|^p dV_n(x) \right)^{1/p}, \qquad 0 < p < \infty,\ \alpha > -1,$$

где dV_n — мера Лебега на B_n, нормированная так, чтобы $V_n(B_n) = 1$. В полярных координатах имеем $dV_n(x) = nr^{n-1} dr d\sigma(\zeta)$. Соответствующие весовые пространства Бергмана $\mathcal{M}_\alpha^p$ моногенных в B_4 функций и пространства h_α^p и $\mathbf{h}_\alpha^p$ (скалярнозначных или кватернионнозначных) гармонических функций определяются через

$$\mathcal{M}_\alpha^p = \Big\{ f \in \mathcal{M}(B_4, \mathbb{H}) : \|f\|_{p,\alpha} < +\infty \Big\},$$
$$h_\alpha^p = \Big\{ u \in h(B_n, \mathbb{R}) \text{ or } u \in h(B_n, \mathbb{C}) : \|u\|_{p,\alpha} < +\infty \Big\},$$
$$\mathbf{h}_\alpha^p = \Big\{ u \in h(B_4, \mathbb{H}) : \|u\|_{p,\alpha} < +\infty \Big\}.$$

Основы теории гармонических пространств Бергмана можно найти в работах [42], [121], [153]. Пространства Бергмана и другие близкие пространства клиффордозначных и кватернионнозначных функций в B_n рассмотрены в [50].

В следующей теореме мы исследуем вопрос о (частных) производных кватернионнозначных функций, в духе аналогичных теорем из Разделов 5.1–5.3 для скалярнозначных функций.

Теорема 0.19. *Пусть $1 \le p < \infty$, $\alpha > -1$, m — натуральное число, и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^4$. Тогда для всех кватернионнозначных моногенных (или гармонических) функций f справедливы следующие соотношения:*

$$\|f\|_{p,\alpha} \approx \sum_{|\lambda|<m} \left|\partial^\lambda f(0)\right| + \sum_{|\lambda|=m} \left\|\partial^\lambda f\right\|_{p,\alpha+pm},$$
$$\|f\|_{p,\alpha} \approx |f(0)| + \left\|\nabla f\right\|_{p,\alpha+p},$$

где ∇ обозначает градиент. Участвующие постоянные зависят только от p, α, m.

Эта теорема позволяет нам при $1 \le p < \infty$ находить моногенную функцию из пространства Бергмана с заданной скалярной частью.

Теорема 0.20. *Пусть $u(x) = u_0(x) : B_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ — вещественнозначная гармоническая функция в единичном шаре B_4. Если $u \in h^p_\alpha$ для некоторых $\alpha > -1$ и $1 \le p < \infty$, то существует моногенная функция $f(x) : B_4 \longrightarrow \mathbb{H}$ такая, что $f \in \mathcal{M}^p_\alpha$ и $\mathbf{Sc}\, f = u$ в B_4, при этом*

$$\|f\|_{p,\alpha} \le C(p,\alpha)\|u\|_{p,\alpha}.$$

Однако вопрос восстановления моногенной функции по ее известной скалярной части в случае малых $0 < p < 1$ требует привлечения более сильных средств таких, как максимальные теоремы, полученные в Главе 4.

Теорема 0.21. *Пусть $u(x) = u_0(x) : B_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ — вещественнозначная гармоническая функция в единичном шаре B_4. Если $u \in h^p_\alpha$ для некоторых $\alpha > -1$ и $0 < p < 1$, то существует моногенная функция $f(x) : B_4 \longrightarrow \mathbb{H}$ такая, что $f \in \mathcal{M}^p_\alpha$ и $\mathbf{Sc}\, f = u$ в B_4, при этом*

$$\|f\|_{p,\alpha} \le C(p,\alpha)\|u\|_{p,\alpha}.$$

Есть другой подход, когда пространство вещественных кватернионов $\mathbb{H}$ отождествляют с комплексным пространством $\mathbb{C}^2$ через отображение, связывающее пару $(z,w) = (x_0 + x_1\mathbf{i}, x_2 + x_3\mathbf{i})$ с кватернионом $x = z + w\mathbf{j}$, где $z = x_0 + x_1\mathbf{i}$, $w = x_2 + x_3\mathbf{i}$. Заметим, что $z\mathbf{j} = \mathbf{j}\bar{z}$ для каждого $z \in \mathbb{C}$. Кватернионнозначную функцию f можно записать через ее комплексные компоненты:

$$f(x) = f(z,w) = (u_0 + u_1\mathbf{i}) + (u_2 + u_3\mathbf{i})\mathbf{j} = U(x) + V(x)\mathbf{j},$$

где $U(x) = u_0(x) + u_1(x)\mathbf{i}$, $V(x) = u_2(x) + u_3(x)\mathbf{i}$ — комплекснозначные функции двух комплексных переменных z и w. На этих комплекснозначных функциях будем рассматривать дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_3}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_3}\right).$$

Тогда оператор Коши–Римана–Фютера можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
Df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} - \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \\
&= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_0} + \mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x_0} + \mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)\mathbf{j}\right] + \mathbf{j}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_2} - \mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} - \mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)\mathbf{j}\right] \\
&= 2\left(\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{w}}\right) + 2\left(\frac{\partial V}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{w}}\right)\mathbf{j}.
\end{aligned}
$$

Поэтому уравнения Коши–Римана могут быть записаны в комплексной форме

$$
\frac{\partial V}{\partial w} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{w}}.
$$

Теорема 0.22. *Пусть $U : B_4 \longrightarrow \mathbb{C}$ — гармоническая функция в единичном шаре B_4, и $U \in h^p_\alpha$ для некоторых $\alpha > -1$ и $0 < p < \infty$. Тогда существует гармоническая функция $V : B_4 \longrightarrow \mathbb{C}$ такая, что функция $f = U + V\mathbf{j}$ принадлежит моногенному пространству Бергмана $\mathcal{M}^p_\alpha$, причем*

$$
\|f\|_{p,\alpha} \le C(p,\alpha)\|U\|_{p,\alpha}.
$$

Теоремы 0.19–0.22 и результаты Раздела 7.4 получены в совместной с К. Гюрлебеком и В. Шпрёссигом статье [273].

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в [247]–[282].

Список часто используемых обозначений

Символы $C(\alpha, \beta, \dots), c_\alpha$ и т.п. всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно различные в разных местах и зависящие только от указанных индексов $\alpha, \beta, \dots$.

Символ $A \approx B$ означает, что существуют положительные постоянные C_1 и C_2 (несущественные по своим значениям и независимые от участвующих функций и переменных) такие, что $C_1|A| \le |B| \le C_2|A|$.

Для любого p, $1 \le p \le \infty$, через $p' = p/(p-1)$ обозначим сопряженный индекс (полагая также $1/\infty = 0$ и $1/0 = +\infty$).

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство;

$\mathbb{R}^{n+1}_+$ — верхнее полупространство пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е. $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$;

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2,\ dx = dx_1 \cdots dx_n$;

$(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+,\ (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y),\ x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0$;

$\mathbb{N}^n$ — множество всех мультииндексов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ с натуральными координатами $\lambda_j \in \mathbb{N}$;

$\mathbb{Z}^n$ — множество всех мультииндексов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ с целыми координатами $\lambda_j \in \mathbb{Z}$;

$\mathbb{Z}^n_+$ — множество всех мультииндексов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ с неотрицательными целыми координатами $\lambda_j \in \mathbb{Z}_+$;

$|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ для каждого $\lambda \in \mathbb{Z}^n_+$;

$\partial^\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\lambda_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\lambda_n}$ — оператор частного дифференцирования по $x \in \mathbb{R}^n$;

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в $\mathbb{C}$;

$U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, 1 \le j \le n\}$ — единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$;

$T^n = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j| = 1, 1 \le j \le n\}$ — n-мерный тор (остов поликруга);

$I^n = [0, 1)^n, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad r \in I^n, \quad dr = dr_1 \cdots dr_n, \quad r\zeta = (r_1\zeta_1, \dots, r_n\zeta_n)$

$(1-r)^\alpha = \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j}, \qquad r^\alpha = \prod_{j=1}^n r_j^{\alpha_j}, \qquad \Gamma(\alpha) = \prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)$,

$\alpha q + 1 = (\alpha_1 q + 1, \dots, \alpha_n q + 1), \qquad q \in \mathbb{R},\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,

$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)^{\lambda_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial r_n}\right)^{\lambda_n}$ — оператор частного дифференцирования по $r \in I^n$ $(\lambda \in \mathbb{Z}^n_+)$;

dA обозначает меру Лебега на плоскости, нормированную так, чтобы $A(\mathbb{D}) = 1$;

dm_n — мера Лебега вещественной размерности n. В случае, когда мера m_n задана на торе T^n, то нормируем $m_n(T^n) = 1$.

dV или dm_{2n} в $\mathbb{C}^n$ обозначает меру Лебега в $\mathbb{C}^n$;

$H(\mathbb{D})$ — множество всех голоморфных функций в единичном круге $\mathbb{D}$;

$h(\mathbb{D})$ — множество всех гармонических функций в единичном круге $\mathbb{D}$;

$h(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ — множество всех гармонических функций в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$;

$H(B)$ — множество всех голоморфных функций в единичном шаре $B \subset \mathbb{C}^n$;

$H(U^n)$ — множество всех голоморфных функций в поликруге $U^n \subset \mathbb{C}^n$;

$h(U^n)$ — множество всех n-гармонических функций в поликруге $U^n \subset \mathbb{C}^n$;

D^α, $\mathcal{D}^\alpha$ — операторы дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля;

$\mathcal{F}^\alpha$ — оператор дробного интегродифференцирования Адамара.

Глава 1

Неравенства Литтлвуда–Пэли

1.1 Неравенства Литтлвуда–Пэли в верхнем полупространстве

В этом разделе определены функции типа Литтлвуда–Пэли и установлены связанные с ними L^p-неравенства на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Основные Теоремы 1 и 2 обобщают на дробные производные произвольного порядка $\alpha > 0$ некоторые результаты Стейна и Флетта и применяются в последующих разделах в теории весовых функциональных классов в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Результаты этого раздела опубликованы в [253], [254].

Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, и пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, $dx = dx_1 \cdots dx_n$. Обозначим через $\mathbb{R}^{n+1}_+$ верхнее полупространство пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е. $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Точки этого полупространства будем представлять как $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$.

В монографии [23] И. Стейн распространил классическую g-функцию Литтлвуда–Пэли [15] для единичного круга на случай полупространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и привел ряд приложений к ней. Для интеграла Пуассона $f(x, y)$ функции $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, g-функция Литтлвуда–Пэли в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ определяется как нелинейный оператор следующего вида

$$g(f)(x) = \left(\int_0^{+\infty} y |\nabla f(x, y)|^2 dy \right)^{1/2}, \tag{1.1.1}$$

где ∇ — градиент.

Теорема Стейна ([23, Гл. IV]) *Пусть $1 < p < \infty$, $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда $g(f)(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, причем существуют положительные постоянные C_1 и C_2, не зависящие от f, такие, что*

$$C_1 \|f\|_{L^p} \leq \|g(f)\|_{L^p} \leq C_2 \|f\|_{L^p}. \tag{1.1.2}$$

Кроме того, Стейн [23] отмечает, что g-функция и неравенства (1.1.2) могут быть обобщены на градиенты более высокого k-го порядка (k — целое, $k > 1$). С другой стороны, изучение различных весовых пространств голоморфных и гармонических функций приводит к необходимости обобщения g-функции и Теоремы Стейна на производные произвольного (дробного) порядка $\alpha > 0$. Такое обобщение дал Флетт [88] для голоморфных в единичном круге функций.

В этом разделе на полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и посредством дробных производных произвольного порядка $\alpha > 0$ введены функции $g_{q,\alpha}(f)$ типа Литтлвуда–Пэли и обобщена Теорема Стейна.

Для функции $f(x,y)$, измеримой и комплекснозначной в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, введем в рассмотрение оператор дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля $\mathcal{D}^{-\alpha} \equiv \mathcal{D}^{-\alpha}_y$ (потенциал Рисса) относительно переменной y:

$$\begin{gathered}\mathcal{D}^{-\alpha} f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} f(x, y+\sigma) d\sigma, \\ \mathcal{D}^0 f = f, \quad \mathcal{D}^{\alpha} f(x,y) = (-1)^m \mathcal{D}^{-(m-\alpha)} \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x,y),\end{gathered} \tag{1.1.3}$$

где $\alpha > 0$, а m — целое, определенное из условия $m - 1 < \alpha \le m$.

Ядро Пуассона в верхнем полупространстве дается формулой

$$P(x,y) = k_n \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}}, \qquad k_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}. \tag{1.1.4}$$

Символы $C(\alpha, \beta, \dots), c_\alpha$ и т.п. повсюду будут обозначать положительные постоянные, возможно различные в разных местах и зависящие только от указанных индексов $\alpha, \beta, \dots$. Для любого p, $1 \le p \le \infty$, через $p' = p/(p-1)$ обозначим сопряженный индекс (мы полагаем $1/\infty = 0$ и $1/0 = +\infty$). Пусть $\mathbb{Z}^{n+1}_+$ — множество всех мультииндексов с неотрицательными целыми координатами $\lambda_j \in \mathbb{Z}_+$, и для каждого $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}_+$ пусть $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1}$ и $\partial^\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\lambda_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\lambda_n} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\lambda_{n+1}}$. Когда функция $f(x,y)$ комплекснозначна, мы используем $\mathbb{C}^{n+1}$-норму для вычисления $|\nabla f|$.

Для $\alpha > 0$, $0 < q \le \infty$ и функции $f(x,y)$, заданной в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, введем g-функцию типа Литтлвуда–Пэли (ср.[15],[23],[88]):

$$g_{q,\alpha}(x) \equiv g_{q,\alpha}(f)(x) := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} y^{\alpha q - 1} |\mathcal{D}^\alpha f(x,y)|^q dy \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{y>0} y^\alpha |\mathcal{D}^\alpha f(x,y)|, & q = \infty. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Легко видеть, что при $q = 2$ и $\alpha = 1$ функция $g_{q,\alpha}(f)$ соответствует классической g-функции (1.1.1) (с производной по y вместо градиента).

Для формулировки основного результата нам понадобятся несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1 *Если $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}^{n+1}_+$, то справедливы оценки*

$$|\mathcal{D}^\alpha P(x,y)| \le C(\alpha, n) \frac{1}{(|x| + y)^{\alpha+n}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ y > 0,$$

$$|\partial^\lambda P(x,y)| \le C(\lambda,n)\frac{1}{(|x|+y)^{|\lambda|+n}}, \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ y>0.$$

В частности, если $\alpha \ge 1$, *то*

$$|\mathcal{D}^\alpha P(x,y)| \le C(\alpha,n)\frac{P(x,y)}{y^\alpha}, \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ y>0.$$

Доказательство осуществляется прямыми вычислениями и оценками, и поэтому мы его опускаем.

Лемма 2 *Пусть* $f(x,y)$ *— гармоническая функция в* $\mathbb{R}^{n+1}_+$, *и* $0<p,q\le\infty$, $\alpha>0$. *Тогда*

$$|\mathcal{D}^\alpha f(x,y)| \le C(p,q,\alpha,n)\frac{\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}}{y^{\alpha+n/p}} \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ y>0.$$

Доказательство мы опускаем, поскольку оно довольно стандартно и сводится к неравенству Гельдера и субгармоническому поведению функции $|u|^p$ — неравенству Харди–Литтлвуда–Феффермана–Стейна (см. [85])

$$|u(x,y)|^p \le \frac{C_p}{|B|}\iint\limits_B |u(\xi,\eta)|^p d\xi d\eta, \tag{1.1.6}$$

где полагаем, что $u(x,y)$ гармонично, $p>0$, B — шар с центром в (x,y), а $|B|$ обозначает его объем.

Следующая лемма, в частности, показывает, что функция $g_{q,\alpha}(f)(x)$ "существенно" возрастающая по α.

Лемма 3 *Пусть* $\beta>0$, *и* $f(x,y)$ *— гармоническая функция в* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *такая, что* $\mathcal{D}^\beta f(x,y)=o(1)$ *равномерно в* $\mathbb{R}^n$ *при* $y\to+\infty$. *Если* $1\le p\le q<\infty$, $\alpha>1/p-1/q$ *либо* $1<p\le q<\infty$, $\alpha=1/p-1/q$, *то*

$$g_{q,\beta}(f)(x) \le C(\alpha,\beta,p,q)\, g_{p,\beta+\alpha}(f)(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n. \tag{1.1.7}$$

Неравенство (1.1.7) аналогично известному неравенству Харди (см., например, [23]) и позволяет свести оценки функции $g_{q,\alpha}(f)$ к случаю целых α. Доказательство Леммы 3 получается заменой переменных из [88, Теорема B]. Отметим, что условие в Лемме 3, наложенное на $\mathcal{D}^\beta f(x,y)$ обеспечивает обратимость оператора $\mathcal{D}^\alpha$.

Лемма 4 *Пусть* $\alpha>0,\delta>0$, *и* $f(x,y)$ *— гармоническая функция в* $\mathbb{R}^{n+1}_+$, *и пусть*

$$f^*_\delta(x)=\sup\big\{|f(\xi,\eta)|;\ (\xi,\eta)\in\Gamma_\delta(x)\big\}$$

— ее некасательная максимальная функция, где

$$\Gamma_\delta(x)=\big\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}_+;\ |\xi-x|<\delta\eta\big\}$$

— конус Лузина с вершиной в точке $x\in\mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$|\mathcal{D}^\alpha f(x,y)| \le C(\alpha,\delta)\frac{f^*_\delta(x)}{y^\alpha}, \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ y>0. \tag{1.1.8}$$

Доказательство. Зафиксируем точку $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ и заметим, что расстояние от нее до границы конуса $\Gamma_\delta(x)$ равно $\delta y/\sqrt{1+\delta^2}$. Рассмотрим интеграл Пуассона от f в шаре $B = B_R$ с центром (x,y) и радиусом $R = \delta y/2\sqrt{1+\delta^2}$:

$$f(x,y) = \int_{\partial B} P_B(x,y,\zeta) f(\zeta) dm_n(\zeta),$$

где P_B — ядро Пуассона в шаре B, а m_n — поверхностная меры Лебега на сфере ∂B. Дифференцируя с порядком α и используя оценки ядра Пуассона, получаем требуемое неравенство (1.1.8). ■

Следующая лемма известна (см. [23]).

Лемма 5 *Пусть* $\delta > 0, 1 < p < \infty$ *и* $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$\|f^*_\delta\|_{L^p} \le C(\delta,p)\|f\|_{L^p}.$$

Далее, определим вариант интеграла площадей Лузина:

$$S_\delta(f)(x) = \left(\iint\limits_{\Gamma_\delta(x)} \eta^{1-n} \left| \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right|^2 d\xi d\eta \right)^{1/2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

где интеграл распространен по всему конусу Лузина $\Gamma_\delta(x), \delta > 0$, а $u(x,y)$ обозначает интеграл Пуассона функции $f(x)$. Нам понадобится еще одна функция

$$g^*_\lambda(f)(x) = \left[\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\eta}{|\xi|+\eta} \right)^{\lambda n} |\nabla u(x+\xi,\eta)|^2 \eta^{1-n} d\xi d\eta \right]^{1/2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Следующая лемма в случае $k = \delta = 1$ доказана в [23].

Лемма 6 *При любых* $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\lambda > 0$, $1 < p < \infty$ *справедливы оценки*

$$g_{2,k}(f)(x) \le C(n,k,\delta)\, S_\delta(f)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1.9}$$
$$S_\delta(f)(x) \le C(\lambda,\delta)\, g^*_\lambda(f)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1.10}$$
$$\|S_\delta(f)\|_{L^p} \le C(n,\delta,p)\, \|f\|_{L^p}, \tag{1.1.11}$$
$$\|g_{2,k}(f)\|_{L^p} \le C(n,k,p)\, \|f\|_{L^p}. \tag{1.1.12}$$

Доказательство. Как и выше зафиксируем точку $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ и рассмотрим шар $B = B_R$ с центром (x,y) и радиусом $R = \delta/2\sqrt{1+\delta^2}$. Следующее неравенство является следствием неравенства Харди–Литтлвуда–Феффермана–Стейна (1.1.6), хотя может быть выведено напрямую (см. [23]):

$$|\partial^k u(x,y)|^2 \le \frac{C(n,k,\delta)}{y^{n+2k-1}} \iint\limits_{B_R} |\partial^1 u(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta, \quad x \in \mathbb{R}^n, y > 0.$$

Здесь положено, что $\partial^1 = \partial/\partial\xi$ или $\partial^1 = \partial/\partial\eta$. Отсюда

$$y^{2k-1}|\partial^k u(x,y)|^2 \le C(n,k,\delta) \iint\limits_{\substack{|\xi-x|<R\\|\eta-y|<R}} |\partial^1 u(\xi,\eta)|^2 \frac{d\xi d\eta}{\eta^n}.$$

Интегрируя по y, получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} y^{2k-1}|\partial^k u(x,y)|^2 dy \le$$

$$\le C(n,k,\delta) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{X}_{|\xi|<R}(\xi)\ \mathcal{X}_{|\eta-y|<R}(\eta) dy \right) |\partial^1 u(x+\xi,\eta)|^2 \frac{d\xi d\eta}{\eta^n},$$

где через $\mathcal{X}$ обозначена характеристическая функция множества, указанного в индексе. Оценка внутреннего интеграла показывает, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{X}_{|\xi|<R}(\xi)\ \mathcal{X}_{|\eta-y|<R}(\eta) dy \le \begin{cases} C(\delta)\,\eta, & \text{если} \quad |\xi| < \dfrac{\delta\eta}{2\sqrt{1+\delta^2}-\delta}, \\ 0, & \text{если} \quad |\xi| \ge \dfrac{\delta\eta}{2\sqrt{1+\delta^2}-\delta}. \end{cases} \tag{1.1.13}$$

Далее, поскольку

$$\frac{\delta\eta}{2\sqrt{1+\delta^2}-\delta} < \delta\eta,$$

то

$$\int\limits_0^{+\infty} y^{2k-1}|\partial^k u(x,y)|^2 dy \le C(n,k,\delta) \iint\limits_{|\xi|<\delta\eta} \eta^{1-n} |\partial^1 u(x+\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta,$$

откуда и следует требуемое неравенство (1.1.9).

Неравенство (1.1.10) очевидно ввиду

$$\frac{\eta}{|\xi|+\eta} \ge \frac{1}{\delta+1} \qquad \text{при} \quad (\xi,\eta) \in \Gamma_\delta(0).$$

С учетом [23] неравенства (1.1.11)–(1.1.12) получаются из (1.1.9)–(1.1.10) и

$$\|g^*_\lambda(f)\|_{L^p} \le C(\lambda,p)\,\|f\|_{L^p}, \qquad \lambda > 1, \quad p > 2/\lambda.$$

Этим завершается доказательство Леммы 6. ■

Теоремы типа Литтлвуда–Пэли на $\mathbb{R}^n$

Теорема 1 *Если $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $2 \le q < \infty$, и $f(x,y)$ — интеграл Пуассона функции $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, то*

$$\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p} \le C(p,q,\alpha,n)\|f\|_{L^p}. \tag{1.1.14}$$

Доказательство. Ввиду Леммы 3 достаточно доказать теорему лишь для $\alpha \geq 1$. Дифференцирование функции $f(x,y)$ посредством оператора $\mathcal{D}^\alpha$ и оценка с помощью Леммы 1 приводят к

$$|\mathcal{D}^\alpha f(x,y)| \leq \frac{C}{y^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} P(x-t,y)|f(t)|dt.$$

Используя хорошо известные теоремы об интеграле Пуассона и максимальной функции Харди и Литтлвуда

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{|\xi-x|<r} |f(\xi)|d\xi,$$

где ω_n — объем единичного n-мерного шара, получаем (см., например, [23], Главы I и III)

$$\|g_{\infty,\alpha}(f)\|_{L^p} \leq C\|Mf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}. \tag{1.1.15}$$

С другой стороны, согласно Лемме 6 неравенство

$$\|g_{2,\alpha}(f)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p} \tag{1.1.16}$$

справедливо для целых α, и следовательно по Лемме 3 справедливо для всех $\alpha \geq 1$. Согласно одному варианту интерполяционной теоремы Рисса–Торина для пространств со смешанной нормой (см.[46, с.316]) неравенства (1.1.15) и (1.1.16) влекут (1.1.14) для всех $q\,(2 \leq q \leq \infty)$ и $\alpha \geq 1$, что доказывает теорему. ■

Как легко видеть из приведенного доказательства, (1.1.14) выполняется также при $\alpha \geq 1$, $q = \infty$.

Теорема 2 *Пусть $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, и $0 < q \leq 2$. Если $f(x,y)$ — гармоническая в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функция, равномерно стремящаяся к нулю при $y \to +\infty$, и $g_{q,\alpha}(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, то $f(x,y)$ является интегралом Пуассона некоторой функции $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, причем*

$$\|f\|_{L^p} \leq C(p,q,\alpha,n)\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}. \tag{1.1.17}$$

Доказательство. Вначале положим $1 < q \leq 2$. Для произвольного фиксированного $y > 0$ рассмотрим линейный функционал на $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, порожденный функцией $f(x,y)$:

$$T_f(v) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)v(x)dx, \qquad v(x) \in L^{p'}(\mathbb{R}^n).$$

Если $v(x,y)$ — интеграл Пуассона функции $v(x)$, и γ — произвольное положительное число, то

$$T_f(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha+\gamma-1}\mathcal{D}^{\alpha+\gamma} f(x,y+\sigma)d\sigma\right] v(x)dx. \tag{1.1.18}$$

После применения теоремы Фубини преобразование внутреннего интеграла приводит к

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\,\mathcal{D}^{\alpha+\gamma} f(x,y+\sigma)dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} v(x)\left[\mathcal{D}^{\gamma}\int_{\mathbb{R}^n} P(x-t,y+\sigma/2)\,\mathcal{D}^{\alpha} f(t,\sigma/2)\,dt\right]dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}^{\alpha} f(t,\sigma/2)\left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}^{\gamma} P(x-t,y+\sigma/2) v(x)\,dx\right]dt =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}^{\alpha} f(t,\sigma/2)\,\mathcal{D}^{\gamma} v(t,y+\sigma/2)\,dt.$$

Подставляя полученное в (1.1.18), приходим к

$$T_f(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha+\gamma-1}\mathcal{D}^{\alpha} f(x,\sigma/2)\,\mathcal{D}^{\gamma} v(x,y+\sigma/2)d\sigma\right]dx.$$

Обозначая

$$h_{q',\gamma}(x,y) = \left(\int_0^{+\infty} \sigma^{\gamma q'-1}\left|\mathcal{D}^{\gamma} v(x,y+\sigma/2)\right|^{q'} d\sigma\right)^{1/q'},$$

и дважды применяя неравенство Гельдера, а затем — Теорему 1, получаем

$$|T_f(v)| \le C\int_{\mathbb{R}^n} g_{q,\alpha}(f)(x)\,h_{q',\gamma}(x,y)dx \le$$
$$\le C\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}\,\|h_{q',\gamma}(x,y)\|_{L^{p'}(dx)} \le$$
$$\le C\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}\,\|v\|_{L^{p'}}.$$

В силу двойственности $(L^{p'})^* = L^p$

$$\|f(x,y)\|_{L^p(dx)} = \sup\left\{\,|T_f(v)|; \|v\|_{L^{p'}} = 1\right\} \le C\,\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}.$$

Теперь положим $0 < q < 1$ (при $q = 1$ теорема очевидна). По Лемме 4

$$|f(x,y)| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1}|\mathcal{D}^{\alpha} f(x,y+\sigma)|d\sigma \le$$
$$\le C\big(f_\delta^*(x)\big)^{1-q}\int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\alpha-1}}{(y+\sigma)^{\alpha(1-q)}}\left|\mathcal{D}^{\alpha} f(x,y+\sigma)\right|^q d\sigma,$$

где $f_\delta^*(x)$ — некасательная максимальная функция. Применяя неравенство Гельдера с индексами $1/q$ и $1/(1-q)$, получаем

$$\|f(x,y)\|_{L^p(dx)}^p \le C\|f_\delta^*\|_{L^p}^{p(1-q)}\,\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}^{pq}.$$

Следовательно, по Лемме 5

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|f_\delta^*\|_{L^p}^{1-q}\,\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}^q \le C\|f\|_{L^p}^{1-q}\,\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}^q,$$

что завершает доказательство Теоремы 2. ■

1.2 Неравенства Литтлвуда–Пэли в поликруге и решение одной задачи Литтлвуда

Для n-гармонических функций в единичном поликруге пространства $\mathbb{C}^n$ определены g-функции типа Литтлвуда–Пэли и установлены связанные с ними L^p-неравенства. Основные теоремы этого раздела распространяют на поликруг и обобщают на дробные производные произвольного порядка некоторые результаты Литтлвуда, Пэли, Флетта. Этим, в частности, дается ответ на один вопрос, поставленный Литтлвудом [146] в 1968 году.

Результаты этого раздела опубликованы в [260], [261].

Пусть

$$U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, 1 \le j \le n\}$$

— единичный поликруг пространства $\mathbb{C}^n$, и

$$T^n = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j| = 1, 1 \le j \le n\}$$

— n-мерный тор (остов поликруга). В поликруге U^n будем рассматривать n-гармонические функции, т.е. функции, гармонические по каждой переменной z_j в отдельности.

Исследования в теории рядов Фурье в 30-х годах привели Литтлвуда и Пэли ([147], [148]) к так называемой g-функции, носящей их имя:

$$g(f)(\theta) = \left(\int_0^1 (1-r)|f'(re^{i\theta})|^2 dr\right)^{1/2}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi), \tag{1.2.1}$$

где $f(z)$ — голоморфная функция в единичном круге $\mathbb{D} = U^1$. Один из основных результатов Литтлвуда и Пэли в связи с g-функцией — это эквивалентность норм $\|g(f)\|_{L^p}$ и $\|f\|_{L^p}$ на единичной окружности при $p > 1$ (см. [148], [15, Гл. XIV]). Аналогичный результат в верхнем полупространстве пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ установлен Стейном [23, Гл. IV]. Ряд исследователей, в частности Флетт [88], значительно расширил определение g-функции в единичном круге с помощью дробной производной и применил это в теоремах о мультипликаторах. Литтлвуд [146, Проблема 28, с.43] высказал предположение о справедливости L^p-неравенств для g-функции в случае двух комплексных переменных и выразил желание обойтись без "плоских" комплексных методов.

В этом разделе с помощью дробных производных D^α (α — произвольный положительный мультииндекс) определены g-функции типа Литтлвуда–Пэли и установлены связанные с ними L^p-неравенства для n-гармонических функций в поликруге. Хотя примененный ниже в доказательстве Теоремы 3 метод интерполяции операторов хорошо известен и применялся еще Зигмундом [15], но, тем не менее, в отличие от [147], [148], [15], [88], наши доказательства независимы от комплексных методов и, тем самым, пригодны для распространения на другие области в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$. С другой стороны, распространение вещественных методов [23] (таких, как формула Грина, методы гильбертовых пространств) на дробные производные произвольного порядка и значения параметров $1 < p < \infty, 0 < q \le \infty$ проблематично.

Пусть

$$I^n=[0,1)^n,\quad \zeta\in\mathbb{C}^n,\quad r\in I^n,\quad dr=dr_1\cdots dr_n,\quad r\zeta=(r_1\zeta_1,\dots,r_n\zeta_n). \tag{1.2.2}$$

Через $\mathbb{Z}_+^n$ обозначим множество всех мультииндексов $m=(m_1,\dots,m_n)$ с неотрицательными целыми координатами $m_j\in\mathbb{Z}_+$. Считая также, что $q\in\mathbb{R}$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, положим

$$(1-r)^\alpha=\prod_{j=1}^n(1-r_j)^{\alpha_j},\qquad r^\alpha=\prod_{j=1}^n r_j^{\alpha_j},\qquad \Gamma(\alpha)=\prod_{j=1}^n\Gamma(\alpha_j), \tag{1.2.3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m=\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)^{m_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial r_n}\right)^{m_n},\qquad \alpha q+1=(\alpha_1q+1,\dots,\alpha_nq+1). \tag{1.2.4}$$

Для функции $f(z)=f(rw), r\in I^n, w\in T^n$, заданной в U^n, введем в рассмотрение оператор $D^\alpha\equiv D_r^\alpha$ дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля относительно переменной $r\in I^n$:

$$D^{-\alpha}f(z)=\frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_{I^n}(1-\eta)^{\alpha-1}f(\eta z)d\eta,\qquad D^\alpha f(z)=\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m D^{-(m-\alpha)}f(z), \tag{1.2.5}$$

где $\alpha_j>0$, $m\in\mathbb{Z}_+^n$, $m_j-1<\alpha_j\le m_j$, $1\le j\le n$. Вместо D^α иногда будем писать $D^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$. Некоторые из координат α_j мультииндекса α могут быть равны нулю, например, оператор $D^{(0,-\alpha_2,\dots,-\alpha_n)}$ будем понимать как

$$D^{(0,-\alpha_2,\dots,-\alpha_n)}f(z)=\frac{\prod_{j=2}^n r_j^{\alpha_j}}{\prod_{j=2}^n\Gamma(\alpha_j)}\int_{I^{n-1}}\prod_{j=2}^n(1-\eta_j)^{\alpha_j-1}f(\eta z)d\eta_2\cdots d\eta_n.$$

Из определения оператора D^α ясно, что для любого $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_j\ge0$

$$D^{\pm\alpha}f=D_{r_1}^{\pm\alpha_1}D_{r_2}^{\pm\alpha_2}\dots D_{r_n}^{\pm\alpha_n}f, \tag{1.2.6}$$

где $D_{r_j}^{\alpha_j}$ обозначает тот же оператор, действующий лишь по переменной r_j. В частности

$$D^1f\equiv D^{(1,1,\dots,1)}f=D_{r_1}^1D_{r_2}^1\dots D_{r_n}^1f.$$

Символы $C(\alpha,\beta,\dots), c_\alpha$ и т.п. всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно различные в разных местах и зависящие только от указанных параметров $\alpha,\beta,\dots$. Для любого p, $1\le p\le\infty$, число p' означает сопряженный индекс, т.е. $p'=p/(p-1)$ (мы полагаем $1/\infty=0$ и $1/0=+\infty$). Все неравенства $A\le B$ в формулировках следует понимать в следующем смысле: если B конечно, то и A конечно и $A\le B$.

Для заданной в U^n функции $f(z)$ и параметров $\alpha_j>0\,(1\le j\le n)$, $0<q\le\infty$ определим g-функцию типа Литтлвуда–Пэли (ср. [88]):

$$g_{q,\alpha}(f)(w)\equiv g_q(D^\alpha f)(w):=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_{I^n}(1-r)^{\alpha q-1}|D^\alpha f(rw)|^q dr\right)^{1/q}, & 0<q<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{r\in I^n}\,(1-r)^\alpha|D^\alpha f(rw)|, & q=\infty.\end{cases} \tag{1.2.7}$$

Легко видеть, что при $q = 2$ и $\alpha = (1, 1, \ldots, 1)$ функция $g_{q,\alpha}(f)$ соответствует классической g-функции (1.2.1).

Основными результатами этого раздела являются следующие две теоремы.

Теорема 3 *Пусть $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$, $2 \le q < \infty$, и $u(z)$ —интеграл Пуассона функции $f \in L^p(T^n)$. Тогда функция*

$$g_q(r^\alpha D^\alpha u)(w) := \left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q-1} |r^\alpha D^\alpha u(rw)|^q dr\right)^{1/q}, \qquad w \in T^n,$$

удовлетворяет неравенству

$$\|g_q(r^\alpha D^\alpha u)\|_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n)\|f\|_{L^p}. \tag{1.2.8}$$

Если, к тому же, α_j — целые либо $0 < \alpha_j < 1\,(1 \le j \le n)$, то имеет место более сильное неравенство

$$\|g_q(D^\alpha u)\|_{L^p} \equiv \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n)\|f\|_{L^p}. \tag{1.2.9}$$

Для произвольных $\alpha_j > 0$ неравенство (1.2.9) имеет место при дополнительном предположении

$$\begin{gathered} D^{(k_1,\ldots,k_n)} u(rw) = 0 \\ \text{при всех} \quad r = (r_1, \ldots, r_n), \prod_{j=1}^n r_j = 0, \quad k_j \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \le k_j \le [\alpha_j] - 1. \end{gathered} \tag{1.2.10}$$

Теорема 4 *Пусть $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$, $0 < q \le 2$, $u(z)$ — n-гармоническая функция в U^n, удовлетворяющая условию (1.2.10) и $g_{q,\alpha}(u) \in L^p(T^n)$. Тогда $u(z)$ является интегралом Пуассона своей граничной функции $f \in L^p(T^n)$, причем*

$$\|f\|_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n)\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.$$

В случае $0 < \alpha_j < 1\,(1 \le j \le n)$ предположение (1.2.10) становится излишним.

Замечание. При $n = 2, q = 2, \alpha = (1, 1)$ Теоремы 3 и 4 дают утвердительный ответ на вопрос Литтлвуда [146, Проблема 28, с.39,43].

Для доказательства основных Теорем 3 и 4 нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Ядро Пуассона в поликруге U^n задается формулой

$$P(z, \zeta) = \prod_{j=1}^n P(z_j, \zeta_j) = \prod_{j=1}^n \frac{1 - |z_j|^2}{|\zeta_j - z_j|^2}, \qquad z \in U^n, \quad \zeta \in T^n. \tag{1.2.11}$$

Лемма 7 *Если $\alpha_j \ge 0$, $1 \le j \le n$, то*

$$|r^\alpha D^\alpha P(z, \zeta)| \le C(\alpha, n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{|\zeta_j - z_j|^{\alpha_j+1}}, \qquad z \in U^n, \quad \zeta \in T^n. \tag{1.2.12}$$

А если, к тому же, α_j — целые, то сомножитель r^α в левой части (1.2.12) можно удалить.

Доказательство получается прямой оценкой.

Лемма 8 *Пусть* $f(z)$ — n*-гармоническая функция в* U^n, *и* $0 < p, q \leq \infty$, $\alpha_j > 0\,(1 \leq j \leq n)$. *Тогда*

$$|r^\alpha D^\alpha f(z)| \leq C(p,q,\alpha,n)\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-|z_j|)^{\alpha_j+1/p}}, \qquad z \in U^n.$$

Доказательство мы опускаем, поскольку оно довольно стандартно и сводится к неравенству Гельдера и n-субгармоническому поведению функции $|r^\alpha D^\alpha f|^p\,(p > 0)$.

Следующая лемма, в частности, показывает, что функция $g_{q,\alpha}(f)$ "существенно" возрастающая по α.

Лемма 9 *Пусть* $f(z)$ — n*-гармоническая функция в* U^n, $1 \leq q < \infty$, $\alpha_j, \beta_j > 0\,(1 \leq j \leq n)$, $D^{-\alpha}D^{\alpha+\beta}f = D^\beta f$. *Тогда*

$$g_{q,\beta}(f)(w) \leq C(\alpha,\beta,q,n)\, g_{q,\beta+\alpha}(f)(w), \qquad w \in T^n.$$

Доказательство получается n-кратным повторением одномерного варианта этого же неравенства (см. [88]). Заметим, что если $0 < \alpha_j + \beta_j < 1$, то тождество $D^{-\alpha}D^{\alpha+\beta}f = D^\beta f$ заведомо выполнимо.

Далее, при фиксированных δ, $0 < \delta < 1$ и $\zeta = e^{i\theta} \in T^1$ будем рассматривать стандартную область $\Gamma_\delta(\zeta) \equiv \Gamma_\delta(\theta)$ в единичном круге U^1, ограниченную двумя касательными к окружности $|z| = \delta$, проведенными из точки $\zeta = e^{i\theta}$, и наибольшей дугой окружности $|z| = \delta$. При фиксированных δ_j, $0 < \delta_j < 1\,(1 \leq j \leq n)$ и $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in T^n$ определим $\Gamma_\delta(\zeta)$ как $\Gamma_\delta(\zeta) = \Gamma_{\delta_1}(\zeta_1) \times \cdots \times \Gamma_{\delta_n}(\zeta_n)$.

Лемма 10 *Пусть* $\alpha_j > 0$, $\delta_j > 0$, $1 \leq j \leq n$, *и* $f(z)$ — n*-гармоническая функция в* U^n. *Тогда для ее некасательной максимальной функции*

$$f^*_\delta(\zeta) = \sup\big\{|f(z)|;\ z \in \Gamma_\delta(\zeta)\big\}$$

справедлива оценка

$$|r^\alpha D^\alpha f(rw)| \leq C(\alpha,\delta,n)\frac{f^*_\delta(w)}{(1-r)^\alpha}, \qquad z = rw \in U^n. \tag{1.2.13}$$

А если, к тому же, α_j *— целые, то сомножитель* r^α *в левой части* (1.2.13) *можно удалить.*

Доказательство. Зафиксируем точку $z = rw \in U^n$. Обозначим через $B = B_z$ поликруг с центром в этой точке и радиусом $\big(\delta_1(1-r_1)/2, \ldots, \delta_n(1-r_n)/2\big)$ и заметим, что $B \subset \Gamma_\delta(w)$. Запишем представление Пуассона функции f в B:

$$f(z) = \int_{T_B} P_B(z,\zeta) f(\zeta)\, dm_n(\zeta),$$

где P_B — ядро Пуассона в поликруге B, T_B — остов поликруга B, m_n —поверхностная мера Лебега на T_B. Дифференцируя посредством оператора D^α и используя оценки ядра Пуассона, получаем требуемое неравенство (1.2.13). ■

Для n-гармонической в U^n функции $u(z)$ и посредством области $\Gamma_\delta(\zeta)$ определим вариант интеграла площадей Лузина:

$$S_\delta(u)(\zeta) = \left(\int_{\Gamma_\delta(\zeta)} |D^1 u(z)|^2 dm_{2n}(z) \right)^{1/2}, \qquad \zeta \in T^n,$$

где m_{2n} — мера Лебега на поликруге U^n. Нам понадобится следующая лемма, доказанная Марцинкевичем и Зигмундом [15, Гл. XIV] в единичном круге для $k = 1$ и классической g-функции (1.2.1).

Лемма 11 *Пусть $u(z)$ — n-гармоническая функция в U^n, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $k_j \geq 1$, $0 < \delta_j < 1\,(1 \leq j \leq n)$. Тогда*

$$g_{2,k}(u)(\zeta) \leq C(n,k,\delta)\, S_\delta(u)(\zeta), \qquad \zeta \in T^n. \tag{1.2.14}$$

Доказательство. Вначале докажем лемму при $n = 1$, т.е. для единичного круга U^1. Зафиксируем точку $z = re^{i\theta} \in U^1$ и рассмотрим круг

$$B = \big\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| < \delta(1-r)/2\big\} \subset \Gamma_\delta(e^{i\theta}) \equiv \Gamma_\delta(\theta).$$

Из интегральной формулы Пуассона в круге B нетрудно получить неравенство

$$|D^k u(re^{i\theta})|^2 \leq \frac{C(k)}{|B|(1-r)^{2(k-1)}} \iint\limits_B |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt,$$

где $|B|$ — площадь круга B. При $\rho e^{it} \in B$ имеем $C'_\delta(1-r) < 1-\rho < C''_\delta(1-r)$, и поэтому

$$(1-r)^{2k-1} |D^k u(re^{i\theta})|^2 \leq C(k,\delta) \iint\limits_B |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho d\rho dt}{1-\rho}. \tag{1.2.15}$$

Теперь рассмотрим два случая. Вначале положим $0 \leq r \leq \delta/(2+\delta)$. Тогда расширим область интегрирования в (1.2.15) до круга

$$E \equiv E(r,\delta) = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < r_2 \equiv r + \delta(1-r)/2\}.$$

Легко видеть, что $E(r,\delta) \subset \Gamma_\delta(\theta)$, и поэтому

$$(1-r)^{2k-1} |D^k u(re^{i\theta})|^2 \leq C(k,\delta) \iint\limits_{\Gamma_\delta(\theta)} \mathcal{X}_{(0,r_2)}(\rho) |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho d\rho dt}{1-\rho},$$

где через $\mathcal{X}$ обозначена характеристическая функция интервала, указанного в индексе. Интегрирование по r и оценка внутреннего интеграла приводят к

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1} |D^k u(re^{i\theta})|^2 dr \leq C(k,\delta) \iint\limits_{\Gamma_\delta(\theta)} \left(\int_0^1 \mathcal{X}_{(0,r_2)}(\rho)\, dr \right) |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho d\rho dt}{1-\rho}$$

$$\leq C(k,\delta) \iint\limits_{\Gamma_\delta(\theta)} |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt.$$

Теперь положим $\delta/(2+\delta) < r < 1$. Тогда расширим область интегрирования в (1.2.15) до кольцевого сектора, стороны которого касаются круга B:

$$(1-r)^{2k-1}|D^k u(re^{i\theta})|^2 \le C(k,\delta)\int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}|D^1 u(\rho e^{it})|^2\,\frac{\rho d\rho dt}{1-\rho}, \tag{1.2.16}$$

где обозначено

$$r_{1,2} = r \mp \frac{\delta(1-r)}{2}, \qquad \theta_{1,2} = \theta \mp \arcsin\frac{\delta(1-r)}{2r}.$$

Интегрирование неравенства (1.2.16) по r приводит к оценке

$$\begin{aligned}\int_0^1 &(1-r)^{2k-1}|D^k u(re^{i\theta})|^2 dr \\ &\le C(k,\delta)\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \mathcal{X}_{(r_1,r_2)}(\rho)\mathcal{X}_{(\theta_1,\theta_2)}(t)dr\right)|D^1u(\rho e^{it})|^2\,\frac{\rho d\rho dt}{1-\rho}.\end{aligned} \tag{1.2.17}$$

Остается должным образом оценить внутренний интеграл. Имеем

$$\mathcal{X}_{(r_1,r_2)}(\rho)\,\mathcal{X}_{(\theta_1,\theta_2)}(t) = \begin{cases}1, & \text{если} \quad r_1<\rho<r_2,\ \theta_1<t<\theta_2,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Условие $r_1<\rho<r_2$ равносильно условию $\rho_1<r<\rho_2$, где $\rho_{1,2} = \big(\rho\mp\delta/2\big)/\big(1\mp\delta/2\big)$. Кроме того, $\theta_1<t<\theta_2$ равносильно условию

$$r < r_0 \equiv \frac{1}{1+(2/\delta)\sin|t-\theta|}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \mathcal{X}_{(r_1,r_2)}(\rho)\,\mathcal{X}_{(\theta_1,\theta_2)}(t)\,dr = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\mathcal{X}_{(0,r_0)}(r)\,dr \le \begin{cases}\rho_2-\rho_1, & \text{если} \quad \rho_1<r_0<1,\\ 0, & \text{если} \quad 0<r_0\le\rho_1.\end{cases}$$

Определим множество $G_\delta = \big\{\xi=\rho e^{it}\in U^1 : \rho_1<r_0\big\}$ и посчитаем $\rho_2-\rho_1 = C_\delta(1-\rho)$. После подстановки в (1.2.17) получаем

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1}|D^k u(re^{i\theta})|^2 dr \le C(k,\delta)\iint_{G_\delta}|D^1u(\rho e^{it})|^2\rho d\rho dt. \tag{1.2.18}$$

Теперь остается доказать вложение $G_\delta\subset\Gamma_\delta(\theta)$. Пусть $\xi=\rho e^{it}\in G_\delta$ и $\delta\le\rho<1$. Множество $\Gamma_\delta(\theta)\backslash\{|\xi|<\delta\}$ характеризуется тремя условиями:

$$\delta\le\rho<1, \quad |t| = |\arg\xi| < \arccos\delta, \quad |\arg(1-\xi)| < \arcsin\delta. \tag{1.2.19}$$

В то же время, множество G_δ определяется условием $\rho_1<r_0$ или

$$\sin|t| < \frac{\delta}{2}\,\frac{1-\rho}{\rho-\delta/2}.$$

Из двух справедливых оценок

$$\sin|t| < \frac{\delta}{2}\ \frac{1-\rho}{\rho-\delta/2} \le 1-\delta < \sqrt{1-\delta^2},$$
$$\sin|t| < \frac{\delta}{2}\ \frac{1-\rho}{\rho-\delta/2} \le \frac{\delta}{\rho}\sqrt{1-2\rho\cos t+\rho^2}$$

вытекают два последних условия в (1.2.19), что доказывает вложение $G_\delta \subset \Gamma_\delta(\theta)$. Таким образом, из (1.2.18) получаем требуемое неравенство

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1}|D^k u(re^{i\theta})|^2 dr \le C(k,\delta)\iint_{\Gamma_\delta(\theta)} |D^1 u(\xi)|^2 dm_2(\xi). \qquad (1.2.20)$$

Случай $n=1$ доказан. Общий случай $n>1$ получается n-кратным применением (1.2.20) с использованием разложения (1.2.6). Лемма 11 доказана. ■

Доказательство Теоремы 3. Сначала докажем теорему для целых значений $\alpha_j \ge 1$. Дифференцирование функции u посредством оператора D^α и оценка с помощью Леммы 7 приводят к

$$|D^\alpha u(z)| \le \int_{T^n} |D^\alpha P(z,\zeta)|\,|f(\zeta)|dm_n(\zeta) \le \frac{C(\alpha,n)}{(1-|z|)^\alpha}\int_{T^n} P(z,\zeta)\,|f(\zeta)|dm_n(\zeta).$$

Отсюда получаем поточечную оценку через некасательную максимальную функцию u_δ^*:

$$g_{\infty,\alpha}(u)(w) \le C(\alpha,n)\sup_{r\in I^n}\int_{T^n} P(rw,\zeta)\,|f(\zeta)|dm_n(\zeta) \le C(\alpha,n)\,u_\delta^*(w), \qquad w\in T^n,$$

где $0<\delta_j<1\,(1\le j\le n)$ фиксированы. Используя максимальную теорему Зигмунда [246]

$$\|u_\delta^*\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p}, \qquad (1.2.21)$$

имеем

$$\|g_{\infty,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p}. \qquad (1.2.22)$$

С другой стороны, последовательно применяя Лемму 11, теорему Ганди-Стейна [100] об эквивалентности L^p-норм функций $S_\delta(u)$ и u_δ^*, а затем вновь неравенство (1.2.21), получаем оценку

$$\|g_{2,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C\|S_\delta(u)\|_{L^p} \le C\|u_\delta^*\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p}. \qquad (1.2.23)$$

Согласно одному варианту интерполяционной теоремы Рисса–Торина для пространств со смешанной нормой (см. [46, с.316]) неравенства (1.2.22) и (1.2.23) влекут (1.2.9) для всех q $(2\le q\le\infty)$ и целых $\alpha_j \ge 1$.

В общем случае $m_j-1<\alpha_j\le m_j$, $m_j\in\mathbb{Z}_+\,(1\le j\le n)$ докажем теорему сначала при $n=1$. Производную D^α представим в виде (см., например, [22, с.52])

$$D^\alpha u = D^{-(m-\alpha)}D^m u + \sum_{k=1}^m D^{m-k}u(0)\frac{r^{m-\alpha-k}}{\Gamma(1+m-\alpha-k)}, \qquad (1.2.24)$$

$$|r^\alpha D^\alpha u| \le D^{-(m-\alpha)}|D^m u| + C_\alpha \sum_{k=1}^{m} |D^{m-k}u(0)|, \tag{1.2.25}$$

что ввиду Леммы 9 позволяет свести оценку к рассмотренному случаю целых α. Интегрирование неравенства (1.2.25) с q-ой степенью и мерой $(1-r)^{\alpha q-1}dr$ на $(0,1)$, а затем на окружности T^1 с p-ой степенью приводит к (1.2.8). При $0<\alpha<1$ получаем более сильное неравенство (1.2.8), так как расходимости интеграла в нуле не возникает и можно оценить (1.2.24) без умножения на r^α.

При $n=2$ представление (1.2.24) приобретает вид

$$\begin{aligned}
D^{(\alpha_1,\alpha_2)}u(z_1,z_2) =& D^{(-(m_1-\alpha_1),-(m_2-\alpha_2))}D^{(m_1,m_2)}u(z_1,z_2)\\
&+\sum_{k_1=1}^{m_1} D_{r_1}^{m_1-k_1}D_{r_2}^{\alpha_2}u(0,z_2)\frac{r_1^{m_1-\alpha_1-k_1}}{\Gamma(1+m_1-\alpha_1-k_1)}\\
&+\sum_{k_2=1}^{m_2} D_{r_1}^{\alpha_1}D_{r_2}^{m_2-k_2}u(z_1,0)\frac{r_2^{m_2-\alpha_2-k_2}}{\Gamma(1+m_2-\alpha_2-k_2)}\\
&-\sum_{k_1=1}^{m_1}\sum_{k_2=1}^{m_2} D^{(m_1-k_1,m_2-k_2)}u(0,0)\frac{r^{m-\alpha-k}}{\Gamma(1+m-\alpha-k)}.
\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения с использованием оценки одномерного случая ведут к (1.2.8) и (1.2.9). Ясно, что процедуру можно распространить на все $n\ge 1$. ■

Доказательство Теоремы 4. Ввиду Леммы 9 и условий (1.2.10) достаточно доказать теорему лишь для $0<\alpha_j<1$. Вначале положим $1<q\le 2$. Для произвольного фиксированного $r\in I^n$ рассмотрим линейный функционал на $L^{p'}(T^n)$, порожденный функцией $u(z)$:

$$F_u(v) = \int_{T^n} u(rw)v(w)dm_n(w), \qquad v(w)\in L^{p'}(T^n). \tag{1.2.26}$$

Считая, что $v(rw)$ — интеграл Пуассона функции $v(w)$, и $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ — малый положительный мультииндекс такой, что $0<\alpha_j+\gamma_j<1$, и воспользовавшись тождеством $r^\alpha D_r^\alpha = \eta^\alpha D_\eta^\alpha$, будем иметь

$$\begin{aligned}
F_u(v) &= \int_{T^n} D_r^{-\alpha-\gamma}\, D_r^{\alpha+\gamma}u(rw)v(w)dm_n(w)\\
&= \frac{r^\gamma}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j+\gamma_j)}\int_{I^n}(1-\eta)^{\alpha+\gamma-1}\eta^\alpha\left[\int_{T^n} v(w)\, D_\eta^\alpha\, D_r^\gamma u(\eta r w)dm_n(w)\right]d\eta.
\end{aligned} \tag{1.2.27}$$

Преобразуем внутренний интеграл:

$$\begin{aligned}
&\int_{T^n} v(w)\, D_\eta^\alpha\, D_r^\gamma u(\eta r w) dm_n(w) \\
&\quad = \int_{T^n} v(w)\, D_r^\gamma \left[\int_{T^n} P(\sqrt{\eta}\, rw, \zeta)\, D_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta}\, \zeta)\, dm_n(\zeta) \right] dm_n(w) \\
&\quad = \int_{T^n} D_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta}\, \zeta) \left[\int_{T^n} D_r^\gamma P(\sqrt{\eta}\, rw, \zeta)\, v(w)\, dm_n(w) \right] dm_n(\zeta) \\
&\quad = \int_{T^n} D_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta}\, \zeta)\, D_r^\gamma v(\sqrt{\eta}\, r\zeta)\, dm_n(\zeta).
\end{aligned}$$

Подставляя полученное в (1.2.27) и меняя порядок интегрирования, приходим к

$$F_u(v) = C(\alpha, \gamma, n)\, r^\gamma \int_{T^n} \left[\int_{I^n} \eta^\alpha (1-\eta)^{\alpha+\gamma-1} D_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta}\, \zeta)\, D_r^\gamma v(\sqrt{\eta}\, r\zeta)\, d\eta \right] dm_n(\zeta).$$

Обозначая

$$h_{q',\gamma}(r\zeta) = \left(\int_{I^n} (1-\eta)^{\gamma q'-1} \left| D_r^\gamma v(\sqrt{\eta}\, r\zeta) \right|^{q'} d\eta \right)^{1/q'}$$

и дважды применяя неравенство Гельдера, а затем — Теорему 3, получаем

$$\begin{aligned}
|F_u(v)| &\le C \int_{T^n} g_{q,\alpha}(u)(\zeta)\, h_{q',\gamma}(r\zeta)\, dm_n(\zeta) \\
&\le C \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}\, \|h_{q',\gamma}(r\zeta)\|_{L^{p'}(T^n)} \\
&\le C(p, q, \alpha, \gamma, n) \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}\, \|v\|_{L^{p'}(T^n)}.
\end{aligned}$$

В силу двойственности $(L^{p'})^* = L^p$ будем иметь

$$\|u(rw)\|_{L^p(T^n)} = \sup\big\{ |F_u(v)|;\ \|v\|_{L^{p'}} = 1 \big\} \le C\, \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.$$

Теперь положим $0 < q < 1$ (при $q = 1$ теорема очевидна). По Лемме 10

$$\begin{aligned}
|u(rw)| &\le \frac{1}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha-1} |D^\alpha u(\eta r w)| d\eta \\
&\le C(\alpha, \delta, n) \big(u_\delta^*(w)\big)^{1-q} \int_{I^n} \frac{(1-\eta)^{\alpha-1}}{(1-\eta r)^{\alpha(1-q)}} \big| D^\alpha u(\eta r w) \big|^q d\eta \\
&\le C(\alpha, \delta, n) \big(u_\delta^*(w)\big)^{1-q} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha q-1} \big| D^\alpha u(\eta r w) \big|^q d\eta,
\end{aligned}$$

где $u_\delta^*(w)$ — некасательная максимальная функция. Далее, применяя неравенство Гельдера с индексами $1/q$ и $1/(1-q)$, получаем

$$\|u(rw)\|_{L^p(T^n)}^p \le C \|u_\delta^*\|_{L^p}^{p(1-q)}\, \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}^{pq}.$$

Следовательно, в силу неравенства (1.2.21)

$$\|f\|_{L^p} = \|u(rw)\|_{L^p(T^n)} \le C \|u_\delta^*\|_{L^p}^{1-q}\, \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}^q \le C \|f\|_{L^p}^{1-q}\, \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}^q,$$

что завершает доказательство Теоремы 4. ■

Итак, в Теоремах 3 и 4 этого раздела с помощью дробных производных Римана–Лиувилля D^α (содержащих также случай обычных частных производных) определены g-функции типа Литтлвуда–Пэли и установлены связанные с ними L^p-неравенства для n-гармонических функций в поликруге. Этим дан положительный ответ на вопрос Литтлвуда [146].

Однако, вместе с тем, для некоторых L^p-неравенств с производными D^α пришлось довольствоваться малыми или целыми α, либо возникали дополнительные предположения на значения производных. Это снижает применимость полученных L^p-неравенств. Чтобы эффективно применить L^p-неравенства, в частности, в теории весовых функциональных пространств, ниже построено новое семейство g-функций типа Литтлвуда–Пэли с помощью дробных производных Адамара $\mathcal{F}^\alpha$, а также Римана–Лиувилля $\mathcal{D}^\alpha$. Соответствующие L^p-неравенства с произвольными значениями мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ доказаны для n-гармонических функций в поликруге с $p > 1$, а также для голоморфных функций с $p > 0$.

Для функции $f(z) = f(rw), r \in I^n, w \in T^n$, заданной в U^n, определим оператор $\mathcal{F}^\alpha \equiv \mathcal{F}_r^\alpha$ дробного интегродифференцирования Адамара относительно переменной $r \in I^n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-\alpha} f(z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} \prod_{j=1}^n \left(\log \frac{1}{\eta_j}\right)^{\alpha_j - 1} f(\eta z)\, d\eta, \\ \mathcal{F}^m f(z) &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot r\right)^m f(z), \qquad \mathcal{F}^\alpha f(z) = \mathcal{F}^{-(m-\alpha)} \mathcal{F}^m f(z), \end{aligned} \tag{1.2.28}$$

где $\alpha_j > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_j - 1 < \alpha_j \le m_j$, $1 \le j \le n$. Свойства и эквивалентные определения одномерного варианта оператора $\mathcal{F}^\alpha$ можно найти, например, в [22], [88]. Если функция $u(z)$ n-гармонична (голоморфна), то таковой является также и функция $\mathcal{F}^\alpha u(z)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Из определения оператора $\mathcal{F}^\alpha$ ясно, что для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$\mathcal{F}^\alpha f = \mathcal{F}_{r_1}^{\alpha_1} \mathcal{F}_{r_2}^{\alpha_2} \ldots \mathcal{F}_{r_n}^{\alpha_n} f, \tag{1.2.29}$$

где $\mathcal{F}_{r_j}^{\alpha_j}$ обозначает тот же оператор, действующий лишь по переменной r_j.

Напомним определение оператора $\mathcal{D}^\alpha$ дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля:

$$D^{-\alpha} f(z) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha - 1} f(\eta z) d\eta, \qquad D^\alpha f(z) = D^{-(m-\alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m f(z), \tag{1.2.30}$$

$$\mathcal{D}^{-\alpha} f(z) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} f(z), \qquad \mathcal{D}^\alpha f(z) = D^\alpha \{r^\alpha f(z)\}, \qquad z = rw \in U^n, \tag{1.2.31}$$

где $\alpha_j > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_j - 1 < \alpha_j \le m_j$, $1 \le j \le n$.

Для заданной в U^n функции $f(z)$ и параметров $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, $0 < q \le \infty$ определим две разновидности g-функции типа Литтлвуда–Пэли (ср. (1.2.7) и [88]):

$$\mathcal{G}_{q,\alpha}(f)(w) = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q - 1} |\mathcal{F}^\alpha f(rw)|^q dr\right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{r \in I^n} (1-r)^\alpha |\mathcal{F}^\alpha f(rw)|, & q = \infty, \end{cases} \tag{1.2.32}$$

$$
g_{q,\alpha}(f)(w) = \begin{cases} \left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q - 1} |\mathcal{D}^\alpha f(rw)|^q dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{r \in I^n} (1-r)^\alpha |\mathcal{D}^\alpha f(rw)|, & q = \infty. \end{cases} \tag{1.2.33}
$$

Легко видеть, что при $q = 2$ и $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ функции (1.2.32) и (1.2.33) соответствуют классической g-функции (1.2.1).

Ниже приведем некоторые аналоги Теорем 3 и 4.

Теорема 5 *Пусть $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$, $2 \le q < \infty$, и $u(z)$ — интеграл Пуассона функции $f \in L^p(T^n)$. Тогда*

$$
\|\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n) \|f\|_{L^p}.
$$

Если, к тому же, функция $u(z)$ голоморфна в U^n, то для любого $p > 0$ справедливо неравенство

$$
\|\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n) \|u\|_{H^p},
$$

где H^p — голоморфный класс Харди в поликруге.

Теорема 6 *Пусть $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$, $0 < q \le 2$, $u(z)$ — n-гармоническая функция в U^n такая, что $\mathcal{G}_{q,\alpha}(u) \in L^p(T^n)$. Тогда $u(z)$ является интегралом Пуассона своей граничной функции $f \in L^p(T^n)$, причем имеет место неравенство*

$$
\|f\|_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n) \|\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.
$$

Доказательство Теорем 5 и 6 вполне аналогично доказательству Теорем 3 и 4, и поэтому их подробного доказательства приводить не будем. Приведем лишь необходимые леммы.

Лемма 12 *Если $\alpha_j \ge 0\,(1 \le j \le n)$, то*

$$
|\mathcal{F}^\alpha P(z, \zeta)| \le C(\alpha, n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{|\zeta_j - z_j|^{\alpha_j + 1}}, \qquad z \in U^n, \quad \zeta \in T^n.
$$

Лемма 13 *Пусть $f(z)$ — n-гармоническая функция в U^n, и $0 < p, q \le \infty$, $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$. Тогда*

$$
|\mathcal{F}^\alpha f(z)| \le C(p, q, \alpha, n) \|\mathcal{G}_{q,\alpha}(f)\|_{L^p} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1 - |z_j|)^{\alpha_j + 1/p}}, \qquad z \in U^n.
$$

Лемма 14 *Пусть $f(z)$ — n-гармоническая функция в U^n, $1 \le q < \infty$, $\alpha_j, \beta_j > 0\,(1 \le j \le n)$. Тогда*

$$
\mathcal{G}_{q,\beta}(f)(w) \le C(\alpha, \beta, q, n)\, \mathcal{G}_{q,\beta+\alpha}(f)(w), \qquad w \in T^n.
$$

Отметим, что в таком виде Лемма 14 перестает быть верной в случае замены функции $\mathcal{G}_{q,\beta}$ на $g_{q,\beta}$.

Лемма 15 *Пусть* $\alpha_j > 0,\ \delta_j > 0,\ 1 \le j \le n,$ *и* $f(z)$ — *n-гармоническая функция в* U^n. *Тогда для ее некасательной максимальной функции*

$$f_\delta^*(\zeta) = \sup\bigl\{|f(z)|;\ z \in \Gamma_\delta(\zeta)\bigr\}, \qquad \zeta \in T^n,$$

справедлива оценка

$$|\mathcal{F}^\alpha f(rw)| \le C(\alpha, \delta, n)\frac{f_\delta^*(w)}{(1-r)^\alpha}, \qquad z = rw \in U^n.$$

Для n-гармонической в U^n функции $u(z)$ и посредством области $\Gamma_\delta(\zeta)$ определим вариант интеграла площадей Лузина :

$$S_\delta(u)(\zeta) = \left(\int_{\Gamma_\delta(\zeta)} |\mathcal{F}^1 u(z)|^2 dm_{2n}(z) \right)^{1/2}, \qquad \zeta \in T^n,$$

где m_{2n} — мера Лебега на поликруге U^n.

Следующая лемма обобщает результат Марцинкевича и Зигмунда [15, с.315], доказанный ими в единичном круге для $k = 1$ и классической g-функции (1.2.1).

Лемма 16 *Пусть* $u(z)$ — *n-гармоническая функция в* U^n, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $k_j \ge 1$, $0 < \delta_j < 1\,(1 \le j \le n)$. *Тогда*

$$\mathcal{G}_{2,k}(u)(\zeta) \le C(n, k, \delta)\, S_\delta(u)(\zeta), \qquad \zeta \in T^n.$$

Теоремы 4 и 6 допускают небольшое, но важное усиление.

Теорема 7 *Пусть* $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$, $0 < q \le 2$, $u(z)$ — *n-гармоническая функция в* U^n. *Тогда*

$$\bigl\|\mathcal{F}^{-\alpha}|u|\bigr\|_{h^p} \le C(p, q, \alpha, n)\Bigl\|\bigl\|(1-r)^\alpha u\bigr\|_{L^q(dr/(1-r))}\Bigr\|_{L^p(T^n)}. \tag{1.2.34}$$

Доказательство Теоремы 7 проводится аналогично доказательству Теоремы 4 с той лишь разницей, что вместо функционала F_u (см. (1.2.26)) следует рассмотреть функционал

$$\Phi_u(v) = \int_{T^n} \mathcal{F}^{-\alpha}|u(rw)|\, v(w) dm_n(w), \qquad v(w) \in L^{p'}(T^n).$$

Теорема 8 *Пусть* $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$, $2 \le q < \infty$, *и* $u(z)$ — *интеграл Пуассона функции* $f \in L^p(T^n)$. *Тогда*

$$\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n)\|f\|_{L^p}.$$

Если, к тому же, функция $u(z)$ *голоморфна в* U^n, *то для любого* $p > 0$ *справедливо неравенство*

$$\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n)\|u\|_{H^p}.$$

Теорема 9 *Пусть $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$, $0 < q \le 2$, $u(z)$ — n-гармоническая функция в U^n такая, что $g_{q,\alpha}(u) \in L^p(T^n)$. Тогда $u(z)$ является интегралом Пуассона своей граничной функции $f \in L^p(T^n)$, причем имеет место неравенство*

$$\|f\|_{L^p} \le C(p,q,\alpha,n)\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.$$

Другие аналоги Теорем 3–9 для функций, голоморфных в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ содержатся в [156]. Следует отметить, что несмотря на очевидное сходство Теорем 5–6 и 8–9, имеются немаловажные различия в доказательствах. Это, в частности, объясняется наличием полугрупповой формулы $\mathcal{F}^{\alpha+\beta} = \mathcal{F}^\alpha\mathcal{F}^\beta$ у оператора Адамара и отсутствием таковой у оператора $\mathcal{D}^\alpha$ Римана–Лиувилля.

Поскольку общая схема доказательства Теорем 5–9 такая же как и в Теоремах 3–4, то подробного доказательства приводить не будем, а будем лишь отмечать некоторые важные различия.

Схема доказательства Теоремы 8. Пусть n-гармоническая (голоморфная) функция $u(z)$ принадлежит классу h^p (соотв. H^p). Пусть $\alpha_j > 0$, $m \in \mathbb{Z}^n_+$, $m_j - 1 < \alpha_j \le m_j$, $1 \le j \le n$. Тогда каждого $j \in [1,n]$ имеем

$$\mathcal{D}^{\alpha_j}_{r_j} u = D^{\alpha_j}_{r_j}\{r_j^{\alpha_j}u\} = D^{-(m_j-\alpha_j)}_{r_j}\left(\frac{\partial}{\partial r_j}\right)^{m_j}\{r_j^{\alpha_j}u\} =$$

$$= r_j^{m_j-\alpha_j}\mathcal{D}^{-(m_j-\alpha_j)}_{r_j}\left\{r_j^{\alpha_j}\frac{\partial^{m_j}u}{\partial r_j^{m_j}} + \text{L.O.T. (слагаемые низшего порядка)}\right\}.$$

Старший член суммы преобразуется в

$$r_j^{m_j}\mathcal{D}^{-(m_j-\alpha_j)}_{r_j} D^{m_j}_{r_j} u = r_j^{\alpha_j} D^{\alpha_j}_{r_j} u.$$

Поэтому дальнейшее взятие смешанной нормы от $\mathcal{D}^\alpha u$ сводится к оценке

$$\left\|\left\|(1-r)^\alpha r^\alpha D^\alpha u\right\|_{L^q(dr/(1-r))}\right\|_{L^p(T^n)} \le C\|u\|_{h^p},$$

которая была доказана в Теореме 3.

Схема доказательства Теоремы 9. Достаточно вспомнить определения дробных интегралов и применить неравенство (1.2.34):

$$\left\|\mathcal{D}^{-\alpha}u\right\|_{h^p} \le C\left\|\mathcal{F}^{-\alpha}|u|\right\|_{h^p} \le C\left\|\left\|(1-r)^\alpha u\right\|_{L^q(dr/(1-r))}\right\|_{L^p(T^n)}.$$

1.3 Неравенства типа Литтлвуда–Пэли и тождества типа Харди–Стейна в поликруге

Данный раздел представлен в совместных статьях автора и Р.Ф. Шамояна [263], [265] и содержит обобщения классического неравенства Литтлвуда–Пэли в поликруге U^n. Получено семейство неравенств, являющихся аналогами и обобщениями неравенств типа Литтлвуда–Пэли, установленные Ямаситой [234] и Люкингом [149]. Получены другие обобщения неравенства Литтлвуда–Пэли в терминах анизотропных пространств Трибеля–Лизоркина. С помощью обобщений тождеств Харди–Стейна получены также неравенства площадей и представления для (квази)норм весовых пространств Бергмана в поликруге.

Пусть $H(U^n)$ — множество всех голоморфных функций в U^n. Для измеримой в U^n функции $f(z) = f(r\xi)$ определим интегральные средние

$$M_p(f,r) = \left[\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} |f(r\xi)|^p dm_n(\xi)\right]^{1/p}, \quad r = (r_1, \ldots, r_n) \in I^n,$$

где $0 < p < \infty$, $I^n = (0,1)^n$, m_n — мера Лебега на T^n. Класс голоморфных функций $f(z)$, для которых $\|f\|_{H^p} = \sup\limits_{r\in I^n} M_p(f,r) < +\infty$, есть обычное пространство Харди H^p в поликруге. Для радиальной весовой функции $\omega(r) = \prod_{j=1}^n \omega_j(r_j)$ (квази)нормированное пространство Бергмана L^p_ω $(0 < p < \infty)$ есть множество тех функций $f(z)$, измеримых в поликруге U^n, для которых конечна (квази)норма

$$\|f\|_{L^p_\omega} = \left(C_\omega \int_{U^n} |f(z)|^p \prod_{j=1}^n \omega_j(|z_j|)\, dm_{2n}(z)\right)^{1/p}.$$

Здесь $dm_{2n}(z) = r dr dm_n(\xi)$ — мера Лебега на U^n, а постоянная C_ω выбрана так, чтобы $\|1\|_{L^p_\omega} = 1$. Подпространство L^p_ω, содержащее голоморфные функции, обозначим через $A^p_\omega = H(U^n) \cap L^p_\omega$. Если $\omega_j(r_j) = (1-r_j)^{\alpha_j}$ $(\alpha_j > -1, 1 \le j \le n)$, то вместо L^p_ω, A^p_ω, будем писать L^p_α, A^p_α.

Классическое неравенство Литтлвуда–Пэли для функций, голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = U^1$ хорошо известно, см., например, [15, Гл.14].

Теорема Литтлвуда–Пэли. *Для* $2 \le p < \infty$ *и всех* $f \in H^p(\mathbb{D})$ *имеет место неравенство*

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1-|z|)^{p-1} dm_2(z) \le C_p \|f\|^p_{H^p}. \tag{1.3.1}$$

Среди множества обобщений этого неравенства (см., например, [44], [120], [149], [155], [156], [157], [163], [191], [192], [193], [223], [231], [234], [260], [263], [267] и Главу 1 настоящей работы), отметим одно важное обобщение Люкинга [149].

Теорема Люкинга. *Пусть* $0 < p, s < \infty$. *Тогда неравенство*

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^{p-s} |f'(z)|^s (1-|z|)^{s-1} dm_2(z) \le C(p,s) \|f\|^p_{H^p} \tag{1.3.2}$$

для всех $f \in H^p(\mathbb{D})$ имеет место тогда и только тогда, когда $2 \le s < p+2$.

Как видим, случай $0 < s < 2$ Люкингом не рассмотрен. Поэтому мы заинтересованы в получении аналогов (1.3.2) для $0 < s < 2$, причем в контексте единичного поликруга комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Заметим, что Люкинг [149] в своем доказательстве неравенства (1.3.2) существенно использовал некоторые одномерные методы (такие, как распределение нулей, произведение Бляшке), которые нельзя непосредственно распространить на многомерный случай поликруга. Наше доказательство совершенно иное и основано на функциональных пространствах, введенных Койфманом, Мейером и Стейном [71].

Как обычно, будем использовать обозначения, принятые в $\mathbb{C}^n$:

$$r\zeta = (r_1\zeta_1, \dots, r_n\zeta_n), \qquad dr = dr_1 \cdots dr_n, \qquad (1-|\zeta|)^\alpha = \prod_{j=1}^n (1-|\zeta_j|)^{\alpha_j},$$

$$\zeta^\alpha = \prod_{j=1}^n \zeta_j^{\alpha_j}, \qquad \alpha q + 1 = (\alpha_1 q + 1, \dots, \alpha_n q + 1)$$

для $\zeta \in \mathbb{C}^n$, $r \in I^n$, $q \in \mathbb{R}$ и мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ — множество всех мультииндексов $k = (k_1, \dots, k_n)$ с неотрицательными целыми координатами $k_j \in \mathbb{Z}_+$.

Для каждой функции $f \in H(U^n)$ со степенным разложением $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} a_k r^k \xi^k$, $z = r\xi, r \in I^n, \xi \in T^n$, определим радиальное дробное интегро-дифференцирование (Адамара) произвольного порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ \alpha_j \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}^\alpha f(z) \equiv \mathcal{F}_r^\alpha f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \prod_{j=1}^n (1+k_j)^{\alpha_j} a_k r^k \xi^k. \tag{1.3.3}$$

Легко видеть, что $\mathcal{F}_r^\alpha f(z) = \mathcal{F}_{r_1}^{\alpha_1} \mathcal{F}_{r_2}^{\alpha_2} \dots \mathcal{F}_{r_n}^{\alpha_n} f$, где $\mathcal{F}_{r_j}^{\alpha_j}$ означает тот же оператор, действующий только по переменной r_j.

Сформулируем основные теоремы данного раздела. Вначале установим семейство неравенств, которые являются аналогами неравенств типа Литтлвуда–Пэли, доказанные Ямаситой [234] и Люкингом [149].

Теорема 10 *Пусть $0 < \alpha < s < 2$, $s < p$. Тогда для любого $\lambda > (p-s)/\alpha$*

$$\int_{U^n} |f(z)|^{p-s} |\mathcal{D}^1 f(z)|^s (1-|z|)^{s-1} dm_{2n}(z) \le C \|f\|_{H^\lambda}^{p-s} \|\mathcal{D}^{\alpha/s} f\|_{H^s}^s. \tag{1.3.4}$$

Замечание. Взяв $p = 2$ в (1.3.4) и формально перейдя к пределу при $s \to 2-$ и $\alpha \to +0$, получим классическое неравенство Литтлвуда–Пэли (1.3.1) в поликруге для $p = 2$.

Определим анизотропные пространства Трибеля–Лизоркина на поликруге, см. [7], [156], [157], [26], [27].

Определение. Скажем, что голоморфная в U^n функция $f(z)$ принадлежит пространству F^{pq}_α $\big(0<p<\infty, 0<q\le\infty, \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n), \alpha_j\ge 0\big)$, если для некоторого мультииндекса $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$, $\beta_j>\alpha_j$ (квази)норма

$$\|f\|_{F^{pq}_\alpha}=\begin{cases}\left[\displaystyle\int_{T^n}\left(\int_{I^n}(1-r)^{(\beta-\alpha)q-1}|\mathcal{D}^\beta f(r\xi)|^q dr\right)^{p/q}dm_n(\xi)\right]^{1/p}, & 0<q<\infty,\\ \left[\displaystyle\int_{T^n}\left(\sup_{r\in I^n}(1-r)^{\beta-\alpha}|\mathcal{D}^\beta f(r\xi)|\right)^{p}dm_n(\xi)\right]^{1/p}, & q=\infty,\end{cases} \tag{1.3.5}$$

конечна. Для разных $\beta\,(\beta_j>\alpha_j)$ получаются эквивалентные (квази)нормы. Пространства Трибеля–Лизоркина включают в себе многие известные классы функций.

При $p=q$ пространства F^{pp}_α совпадают с голоморфными пространствами Бесова; при $q=2$ получаются пространства Харди–Соболева; при $q=2, \alpha_j=0$ пространства F^{p2}_0 совпадают с классами Харди H^p.

Теорема 11 *Для любых $0<p<\infty, 0<q\le q_1\le\infty, \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n), \alpha_j\ge 0$ имеет место следующее непрерывное вложение*

$$F^{pq}_\alpha\subset F^{pq_1}_\alpha. \tag{1.3.6}$$

Замечание. Вложение (1.3.6) в контексте единичного шара из $\mathbb{C}^n$ доказано в [156]. Для поликруга вложение (1.3.6) есть обобщение вложения $F^{p2}_0\subset F^{p\infty}_0$, доказанного в [5], а также другого вложения из [260, Теор.1], Теорем 3 и 6, где были рассмотрены $\alpha_j=0$ и n-гармонические функции. В частности, при $\alpha_j=0, q=2, p=q_1$ вложение (1.3.6) сводится к классическому неравенству Литтлвуда–Пэли (1.3.1).

В следующей теореме дробная производная первого порядка заменена на такой же оператор $\mathcal{F}^\alpha$ произвольного порядка $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_j>0$, и рассмотрены более общие интегралы.

Теорема 12 *Пусть $0<s\le p<\infty$, $\alpha_j>0\,(1\le j\le n)$, и $f(z)\in H^p(U^n)$, функция $g(z)$ принадлежит пространству со смешанной нормой $H(p,s,\alpha)$, т.е.*

$$\|g\|^s_{H(p,s,\alpha)}=\int_{I^n}M^s_p(g,r)(1-r)^{\alpha s-1}dr<+\infty.$$

Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{U^n}|f(z)|^{p-s}|g(z)|^s(1-|z|)^{\alpha s-1}dm_{2n}(z)\le\|f\|^{p-s}_{H^p}\|g\|^s_{H(p,s,\alpha)}.$$

В частности, если $\mathcal{D}^\alpha f\in H(p,s,\alpha)$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{U^n}|f(z)|^{p-s}|\mathcal{D}^\alpha f(z)|^s(1-|z|)^{\alpha s-1}dm_{2n}(z)\le\|f\|^{p-s}_{H^p}\|\mathcal{D}^\alpha f\|^s_{H(p,s,\alpha)}. \tag{1.3.7}$$

Теорема 13 *(i) Пусть $f(z)$ — голоморфная в U^n функция, $0<p<\infty$, $\omega_j(r_j)$, $j=1,\dots,n$ — весовые функции, положительные и непрерывно дифференцируемые на $[0,1)$ такие, что*

$$\omega_j(r_j)\frac{\partial}{\partial r_j}M^p_p(f,r)=o(1)\qquad \textit{при}\qquad r_j\to 1-\,. \tag{1.3.8}$$

Тогда имеет место следующее тождество

$$\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}\omega_j(r_j)\cdot f^{\#}(z)dm_{2n}(z)=(-1)^n\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}\omega_j'(r_j)\frac{\partial^n}{\partial r_1\cdots\partial r_n}|f(z)|^p dm_{2n}(z),\qquad(1.3.9)$$

где $f^{\#}(z)=\Delta_{z_1}\Delta_{z_2}\ldots\Delta_{z_n}|f(z)|^p$, *и* Δ_{z_j} *— обычный лапласиан по переменной* z_j. *Для стандартных весовых функций* $\omega_j(r_j)=(1-r_j)^{\alpha_j}$ $(\alpha_j>0)$ *предположение* (1.3.8) *можно опустить.*

(ii) При $n=1$ *имеют место следующие уточнения* (1.3.9). *Тождество*

$$\int_{\mathbb{D}}(1-|z|)^{\alpha}f^{\#}(z)dm_2(z)=\alpha\int_{\mathbb{D}}(1-|z|)^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial r}|f(z)|^p dm_2(z),\qquad p>0,\ \alpha>0,\ (1.3.10)$$

справедливо, если один из интегралов (1.3.10) *существует. Здесь*

$$f^{\#}(z)=\Delta|f(z)|^p=p^2|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2.\qquad(1.3.11)$$

(iii) Интегралы

$$A(f;p,\alpha)=\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2(1-|z|)^{\alpha}dm_2(z),$$
$$B(f;p,\alpha)=\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^{p-1}|f'(z)|(1-|z|)^{\alpha-1}dm_2(z)$$

сравнимы. Точнее,

— если $p>0$, $\alpha>0$, *то*

$$A(f;p,\alpha)\le\frac{\alpha}{p}\,B(f;p,\alpha),\qquad(1.3.12)$$

где постоянная α/p *наилучшая;*

— если $p>0,\alpha>1$, *то существует постоянная* $C_{\alpha,p}>0$ *такая, что*

$$B(f;p,\alpha)\le C_{\alpha,p}\,A(f;p,\alpha).\qquad(1.3.13)$$

Замечание. Неравенства (1.3.12) и (1.3.13) при $p=2$ доказаны в [231]. Их аналоги для целых p $(p\ge2)$ в единичном круге и единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ доказаны другим способом в [191], [192].

Следующая теорема характеризует весовые пространства Бергмана A^p_ω в бикруге дает представления для (квази)норм в A^p_ω с использованием интегралов типа (1.3.2).

Теорема 14 *Пусть* $0<p<\infty$, $f(z)\in H(U^2)$, $\omega_j(r_j)\in L^1(0,1)$, $\omega_j(r_j)>0$, $j=1,2$. *Тогда справедливы следующие представления:*

$$\|f\|^p_{A^p_\omega(U^2)}\approx|f(0,0)|^p+\int_{U^2}\Big(\Delta_{z_1}\Delta_{z_2}|f(z_1,z_2)|^p+\Delta_{z_1}|f(z_1,0)|^p+$$
$$+\Delta_{z_2}|f(0,z_2)|^p\Big)\prod_{j=1}^{2}h_{\omega_j}(|z_j|)\,dm_4(z),\qquad(1.3.14)$$

$$
\begin{aligned}
\|f\|^p_{A^p_\omega(U^2)} + |f(0,0)|^p = \big\|f(\cdot,0)\big\|^p_{A^p_{\omega_1}} + \big\|f(0,\cdot)\big\|^p_{A^p_{\omega_2}} + \\
+ C_\omega \int_{U^2} f^{\#}(z_1,z_2) \prod_{j=1}^{2} h_{\omega_j}(|z_j|)\, dm_4(z),
\end{aligned} \tag{1.3.15}
$$

где $A^p_{\omega_j}$ — весовые пространства Бергмана по переменной z_j, а h_{ω_j} — весовая функция

$$
h_{\omega_j}(|z_j|) = \int_{|z_j|}^{1} \left(\int_{\rho_j}^{1} \omega_j(x) x dx \right) \frac{d\rho_j}{\rho_j}.
$$

В частности, $f \in A^p_\alpha(U^2)$ тогда и только тогда, когда $f^{\#} \in L^1_{\alpha+2}(U^2)$ $(\alpha_j > -1)$.

Замечание. При $n = 1$, $\omega(r) = (1-r)^\alpha$ $(\alpha > -1)$ и ввиду формулы (1.3.11) формула (1.3.14) в предельном случае $\alpha \to -1$ совпадает с характеризацией классов Харди $H^p(\mathbb{D})$, данное Ямаситой [234]. Другие аналоги (1.3.14) и (1.3.15) в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ установлены в [44], [155], [223].

Перейдем к доказательствам Теорем 10–14.

Не ограничивая общности и упрощая обозначения, всюду ниже в доказательствах можем считать, что $n = 2$.

Введем дополнительные обозначения и сформулируем несколько вспомогательных утверждений. Для фиксированного $\delta > 1$ пусть

$$
\Gamma_\delta(\xi) = \{z \in \mathbb{D} : |1 - \overline{\xi} z| \le \delta(1 - |z|)\}
$$

— допустимая область с вершиной $\xi \in T$. Для дуги $I \subset T$ длиной $|I|$ определим квадрат Карлесона над I как

$$
\Box I = \left\{ z \in \mathbb{D};\, \frac{z}{|z|} \in I,\, 1 - |z| \le \frac{1}{2\pi}|I| \right\}.
$$

Следуя [71], рассмотрим функции

$$
\begin{aligned}
A_p(f)(\xi) &= \left(\int_{\Gamma_\delta(\xi)} \frac{|f(z)|^p}{(1-|z|)^2} dm_2(z) \right)^{1/p}, \qquad p < \infty, \\
A_\infty(f)(\xi) &= \sup\{|f(z)|; z \in \Gamma_\delta(\xi)\}, \\
C_p(f)(\xi) &= \sup_{I \supset \xi} \left(\frac{1}{|I|} \int_{\Box I} \frac{|f(z)|^p}{1-|z|} dm_2(z) \right)^{1/p}, \qquad p < \infty, \quad \xi \in T.
\end{aligned}
$$

Лемма Койфмана–Мейера–Стейна. ([71], [157])

Пусть $1 < p \le \infty, 0 < q < \infty, \alpha > 0, \beta > 0$. Для любых измеримых функций $f(z)$ и $g(z)$ в единичном круге имеют место неравенства

$$
\int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z)|}{1-|z|} dm_2(z) \le C \int_T \left(\int_{\Gamma_\delta(\xi)} \frac{|f(z)|}{(1-|z|)^2} dm_2(z) \right) dm(\xi), \tag{1.3.16}
$$

$$
\int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z)||g(z)|}{1-|z|} dm_2(z) \le C \int_T A_p(f)(\xi)\, C_{p'}(g)(\xi)\, dm(\xi), \tag{1.3.17}
$$

$$
\left\| C_q\big(|f(z)|(1-|z|)^\alpha\big) \right\|^q_{L^\infty} \approx \sup_{w \in \mathbb{D}} (1-|w|)^\beta \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z)|^q (1-|z|)^{\alpha q - 1}}{|1 - \overline{w} z|^{\beta+1}} dm_2(z), \tag{1.3.18}
$$

где $dm(\xi) = dm_1(\xi)$ — мера Лебега на единичной окружности T.

Доказательства неравенств (1.3.16) и (1.3.17) можно найти в [71, с. 313, 316, 326], [157, Теор.2.1], а неравенства (1.3.18), включая оценки мер Карлесона — в [157, с. 736-737], а также в [4, Гл. VI].

Определим вариант интеграла площадей Лузина (см., например,[15])

$$S(f)(\xi) = \left(\int_{\Gamma_\delta(\xi)} |\mathcal{F}^1 f(z)|^2 dm_2(z)\right)^{1/2}, \qquad \xi \in T, \quad \delta > 1.$$

Лемма Лузина. ([15]) *Если $f \in H(\mathbb{D})$, $0 < p < \infty$, то*

$$\|S(f)\|_{L^p(T)} \approx \|f\|_{H^p}. \tag{1.3.19}$$

Доказательство Теоремы 10.

Обозначим через L интеграл в левой части (1.3.4) и представим

$$L = \int_{\mathbb{D}} (1-|z_2|)^{s-1} \left[\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^{p-s} |\mathcal{F}^1 f(z)|^s (1-|z_1|)^{s-1} dm_2(z_1)\right] dm_2(z_2). \tag{1.3.20}$$

Обозначим также внутренний интеграл в (1.3.20) через J. Выбирая произвольное α, $0 < \alpha < s$, оценим интеграл J по Лемме Койфмана–Мейера–Стейна:

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{F}^1 f(z)|^s (1-|z_1|)^{s-\alpha} \cdot |f(z)|^{p-s} (1-|z_1|)^{\alpha} \frac{dm_2(z_1)}{1-|z_1|} \\ &\le C \int_T A_{2/s}\Big(|\mathcal{F}^1 f(z)|^s (1-|z_1|)^{s-\alpha}\Big)(\xi_1) \cdot C_{(2/s)'}\Big(|f(z)|^{p-s}(1-|z_1|)^{\alpha}\Big)(\xi_1) dm(\xi_1) \\ &\le C \left\| C_{(2/s)'}\Big(|f(z)|^{p-s}(1-|z_1|)^{\alpha}\Big)\right\|_{L^\infty} \int_T A_{2/s}\Big(|\mathcal{F}^1 f(z)|^s (1-|z_1|)^{s-\alpha}\Big)(\xi_1) dm(\xi_1). \end{aligned} \tag{1.3.21}$$

Отдельно оценим последний интеграл:

$$\begin{aligned} J_1 &\equiv \int_T A_{2/s}\Big(|\mathcal{F}^1 f(z)|^s (1-|z_1|)^{s-\alpha}\Big)(\xi_1) dm(\xi_1) \\ &= \int_T \left[\int_{\Gamma_\delta(\xi_1)} |\mathcal{F}^1 f(z)|^2 (1-|z_1|)^{-2\alpha/s} dm_2(z_1)\right]^{s/2} dm(\xi_1). \end{aligned}$$

Согласно результату из [156, с.179,186] о дробном дифференцировании и затем по Лемме Лузина (1.3.19)

$$J_1 \le C \int_T \left[\int_{\Gamma_\delta(\xi_1)} |\mathcal{F}_{r_1}^{\alpha/s} \mathcal{F}^1 f(z)|^2 dm_2(z_1)\right]^{s/2} dm(\xi_1) \le C \left\|\mathcal{F}_{r_2}^1 \mathcal{F}_{r_1}^{\alpha/s} f\right\|_{H_{z_1}^s}^s, \tag{1.3.22}$$

где $H_{z_1}^s$ означает класс Харди по переменной z_1.

Совмещая неравенства (1.3.20)–(1.3.22), заключаем

$$L \le C \int_{\mathbb{D}} (1-|z_2|)^{s-1} \left\| C_{(2/s)'} \Big(|f(z)|^{p-s} (1-|z_1|)^{\alpha} \Big)(\xi_1) \right\|_{L^\infty} \left\| \mathcal{F}^{1}_{r_2} \mathcal{F}^{\alpha/s}_{r_1} f \right\|^{s}_{H^s_{z_1}} dm_2(z_2).$$

По лемме Фату и Лемме Койфмана–Мейера–Стейна

$$\begin{aligned} L &\le C \liminf_{r_1 \to 1} \int_T \int_{\mathbb{D}} (1-|z_2|)^{s-1} \left\| C_{(\frac{2}{s})'} \Big(|f(z)|^{p-s} (1-|z_1|)^{\alpha} \Big) \right\|_{L^\infty} \\ &\quad \cdot \left| \mathcal{F}^{1}_{r_2} \mathcal{F}^{\alpha/s}_{r_1} f \right|^{s} dm(\xi_1) dm_2(z_2) \\ &\le C \left\| C_{(2/s)'} \left(\left\| C_{(2/s)'} \Big(|f(z)|^{p-s} (1-|z_1|)^{\alpha} \Big) \right\|_{L^\infty} (1-|z_2|)^{\alpha} \right)(\xi_2) \right\|_{L^\infty} \\ &\quad \cdot \liminf_{r_1 \to 1} \int_T \int_T A_{2/s} \Big(\left| \mathcal{F}^{1}_{r_2} \mathcal{F}^{\alpha/s}_{r_1} f \right|^{s} (1-|z_2|)^{s-\alpha} \Big)(\xi_2) dm(\xi_2) dm(\xi_1) \equiv J_2 \cdot J_3. \end{aligned}$$

Теперь оценим факторы J_2 и J_3 по отдельности.

Вновь применяя правило дробного дифференцирования из [156, с.179,186], Леммы Лузина (1.3.19) и Фату, а также используя тождество $\mathcal{F}^{\gamma_1}_r \mathcal{F}^{\gamma_2}_r = \mathcal{F}^{\gamma_2}_r \mathcal{F}^{\gamma_1}_r$, получаем

$$\begin{aligned} J_3 &= \liminf_{r_1 \to 1} \int_T \int_T \left[\int_{\Gamma_\delta(\xi_2)} \left| \mathcal{F}^{1}_{r_2} \mathcal{F}^{\alpha/s}_{r_1} f \right|^2 (1-|z_2|)^{-2\alpha/s} dm_2(z_2) \right]^{s/2} dm(\xi_2) dm(\xi_1) \\ &\le C \liminf_{r_1 \to 1} \int_T \int_T \left[\int_{\Gamma_\delta(\xi_2)} \left| \mathcal{F}^{\alpha/s}_{r_2} \mathcal{F}^{1}_{r_2} \mathcal{F}^{\alpha/s}_{r_1} f \right|^2 dm_2(z_2) \right]^{s/2} dm(\xi_2) dm(\xi_1) \\ &\le C \liminf_{r_1 \to 1} \int_T \left\| \mathcal{F}^{\alpha/s} f \right\|^{s}_{H^s_{z_2}} dm(\xi_1) = \left\| \mathcal{F}^{\alpha/s} f \right\|^{s}_{H^s}. \end{aligned}$$

Оценим теперь J_2, выбирая $\beta > 0$ достаточно большим:

$$J_2 = \left\| C_{(2/s)'} \left(\left\| C_{(2/s)'} \Big(|f(z)|^{p-s} (1-|z_1|)^{\alpha} \Big) \right\|_{L^\infty} (1-|z_2|)^{\alpha} \right)(\xi_2) \right\|_{L^\infty}.$$

Согласно (1.3.18) внутренюю норму можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned} &\left\| C_{2/(2-s)} \Big(|f(z)|^{p-s} (1-|z_1|)^{\alpha} \Big) \right\|^{2/(2-s)}_{L^\infty} \\ &\le C \sup_{w \in \mathbb{D}} (1-|w|)^{\beta} \int_{\mathbb{D}} |f(z_1,z_2)|^{2(p-s)/(2-s)} \frac{(1-|z_1|)^{2\alpha/(2-s)-1}}{|1-\overline{w} z_1|^{\beta+1}} dm_2(z_1) \\ &\le \|f\|^{2(p-s)/(2-s)}_{H^\lambda_{z_1}} \sup_{w \in \mathbb{D}} (1-|w|)^{\beta} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z_1|)^{2\alpha/(2-s)-(2/\lambda)(p-s)/(2-s)-1}}{|1-\overline{w} z_1|^{\beta+1}} dm_2(z_1) \\ &\le C \|f\|^{2(p-s)/(2-s)}_{H^\lambda_{z_1}}, \end{aligned}$$

где использованы неравенство $|f(\zeta)| \le C\|f\|_{H^q}(1-|\zeta|)^{-1/q}$, $\zeta \in \mathbb{D}$, и другое известное неравенство из [21, Предл.1.4.10]. Следовательно

$$
\begin{aligned}
J_2 &\le C \left\| C_{2/(2-s)} \left(\|f\|^{p-s}_{H^\lambda_{z_1}} (1-|z_2|)^\alpha \right)(\xi_2) \right\|_{L^\infty} \\
&\le C \left[\sup_{w\in\mathbb{D}} (1-|w|)^\beta \int_{\mathbb{D}} \|f(z_1,z_2)\|^{2(p-s)/(2-s)}_{H^\lambda_{z_1}} \frac{(1-|z_2|)^{2\alpha/(2-s)-1}}{|1-\overline{w}z_2|^{\beta+1}} dm_2(z_2) \right]^{(2-s)/2} \\
&\le C\|f\|^{p-s}_{H^\lambda(U^2)} \left[\sup_{w\in\mathbb{D}} (1-|w|)^\beta \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z_2|)^{2\alpha/(2-s)-(2/\lambda)(p-s)/(2-s)-1}}{|1-\overline{w}z_2|^{\beta+1}} dm_2(z_2) \right]^{(2-s)/2} \\
&\le C\|f\|^{p-s}_{H^\lambda}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, для любого $\lambda > (p-s)/\alpha$

$$L \le C\|f\|^{p-s}_{H^\lambda} \|\mathcal{F}^{\alpha/s} f\|^s_{H^s},$$

что завершает доказательство Теоремы 10. ■

Доказательство Теоремы 11.

Доказательство вложения (1.3.6) начнем со случая $q_1 = \infty$, т.е. с вложения

$$\|f\|_{F^{p\infty}_\alpha} \le C\|f\|_{F^{pq}_\alpha}. \tag{1.3.23}$$

Всюду ниже J_ξ обозначает дугу на T с центром $\xi \in T$:

$$J_\xi(t) = \{\eta \in T; |1-\bar{\xi}\eta| < t\}.$$

На торе T^n символ $J_\xi(t)$ обозначает

$$J_\xi(t) = J_{\xi_1}(t_1) \times \cdots \times J_{\xi_n}(t_n), \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in T^n, \quad t = (t_1, \ldots, t_n).$$

Рассмотрим вариант максимальной функции Харди–Литтлвуда на единичной окружности:

$$M(\psi)(\xi) = \sup_{t>0} \frac{1}{|J_\xi(t)|} \int_{J_\xi(t)} |\psi(\eta)| dm(\eta), \qquad \xi \in T.$$

Хорошо известно (см., например, [15]), что оператор M ограничен на L^p при $p > 1$.

Пусть $f(r\xi)$ — произвольная функция класса F^{pq}_α в бикруге. Для числа ε, $0 < \varepsilon < \min\{p,q\}$, ввиду 2-субгармоничности функции $|\mathcal{F}^\beta f|^\varepsilon$, можем найти малые числа $c, c' \in (0,1)$ такие, что

$$|\mathcal{F}^\beta f(r\xi)|^\varepsilon \le C \frac{1}{(1-r)^2} \int_{J_\xi(c(1-r))} \int_{r-c(1-r)}^{r+c'(1-r)} |\mathcal{F}^\beta f(t\eta)|^\varepsilon dt dm_2(\eta), \qquad r \in I^2, \quad \xi \in T^2.$$

Отметим, что аналогичный метод в контексте единичного шара из $\mathbb{C}^n$ содержится в [156, с.189].

Затем применение неравенства Гельдера с индексами q/ε и $q/(q-\varepsilon)$ ведет к

$$
\begin{aligned}
(1-r)^{\varepsilon(\beta-\alpha)} |\mathcal{F}^\beta f(r\xi)|^\varepsilon &\le C \frac{1}{(1-r)^2} \int_{J_\xi(c(1-r))} \int\limits_{r-c(1-r)}^{r+c'(1-r)} (1-t)^{\varepsilon(\beta-\alpha)} |\mathcal{F}^\beta f(t\eta)|^\varepsilon dt dm_2(\eta) \\
&\le \frac{C}{1-r} \int_{J_\xi(c(1-r))} \left(\int\limits_{r-c(1-r)}^{r+c'(1-r)} (1-t)^{q(\beta-\alpha)-1} |\mathcal{F}^\beta f(t\eta)|^q dt \right)^{\varepsilon/q} dm_2(\eta).
\end{aligned}
$$

Обозначая
$$\psi(\eta_1,\eta_2)=\left(\int_{I^2}(1-t)^{q(\beta-\alpha)-1}|\mathcal{D}^\beta f(t\eta)|^q dt\right)^{\varepsilon/q},$$
получаем
$$(1-r)^{p(\beta-\alpha)}|\mathcal{F}^\beta f(r\xi)|^p\le C\left[\frac{1}{1-r}\int_{J_\xi(c(1-r))}\psi(\eta_1,\eta_2)dm_2(\eta)\right]^{p/\varepsilon}\le$$
$$C\left[\frac{1}{|J_{\xi_1}(c(1-r_1))|}\int\limits_{J_{\xi_1}(c(1-r_1))}\left(\frac{1}{|J_{\xi_2}(c(1-r_2))|}\int\limits_{J_{\xi_2}(c(1-r_2))}\psi(\eta_1,\eta_2)dm(\eta_2)\right)dm(\eta_1)\right]^{p/\varepsilon}.$$
Взяв супремум по всем $r\in I^2$, затем интегрируя неравенство по ξ_1, ξ_2, и дважды применяя ограниченность оператора Харди–Литтлвуда M в $L^{p/\varepsilon}$, получаем
$$\int_{T^2}\sup_{r\in I^n}(1-r)^{p(\beta-\alpha)}|\mathcal{F}^\beta f(r\xi)|^p dm_2(\xi)\le C\int_{T^2}\psi^{p/\varepsilon}(\eta_1,\eta_2)dm(\eta_1)dm(\eta_2)=\|f\|^p_{F^{pq}_\alpha}.$$
Вложение (1.3.23) доказано.

Теперь общий случай $0<q\le q_1<\infty$ легко следует из (1.3.23).

Действительно, применение неравенства Гельдера с индексами q_1/q и $q_1/(q_1-q)$ дает
$$\|f\|^p_{F^{pq_1}_\alpha}=\int_{T^2}\left(\int_{I^2}(1-r)^{(\beta-\alpha)(q_1-q)}(1-r)^{(\beta-\alpha)q-1}|\mathcal{F}^\beta f(r\xi)|^{q_1-q}|\mathcal{F}^\beta f(r\xi)|^q dr\right)^{p/q_1}dm_2(\xi)$$
$$\le\|f\|^{pq/q_1}_{F^{pq}_\alpha}\left(\int_{T^2}\sup_{r\in I^2}(1-r)^{p(\beta-\alpha)}|\mathcal{F}^\beta f(r\xi)|^p dm_2(\xi)\right)^{(q_1-q)/q_1}.$$
Таким образом,
$$\|f\|_{F^{pq_1}_\alpha}\le C\|f\|^{q/q_1}_{F^{pq}_\alpha}\|f\|^{(q_1-q)/q_1}_{F^{p\infty}_\alpha}\le C\|f\|^{q/q_1}_{F^{pq}_\alpha}\|f\|^{(q_1-q)/q_1}_{F^{pq}_\alpha}=C\|f\|_{F^{pq}_\alpha},$$
что завершает доказательство Теоремы 11. ■

Доказательство Теоремы 12.

Полагая $\|f\|_{H^p}\ne0$, можем применить неравенство Йенсена по отношению к интегралу
$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}|f(r\xi)|^{p-s}|g(r\xi)|^s dm_n(\xi)$$
$$=M_p^p(f,r)\left[\frac{1}{M_p^p(f,r)}\int_{T^n}\left|\frac{g(r\xi)}{f(r\xi)}\right|^s|f(r\xi)|^p\frac{dm_n(\xi)}{(2\pi)^n}\right]^{\frac{p}{s}\frac{s}{p}}$$
$$\le M_p^p(f,r)\left[\frac{1}{M_p^p(f,r)}\int_{T^n}\left|\frac{g(r\xi)}{f(r\xi)}\right|^p|f(r\xi)|^p\frac{dm_n(\xi)}{(2\pi)^n}\right]^{s/p}$$
$$=M_p^{p-s}(f,r)\left[\int_{T^n}|g(r\xi)|^p\frac{dm_n(\xi)}{(2\pi)^n}\right]^{s/p}=M_p^{p-s}(f,r)M_p^s(g,r).$$

Отметим, что схожий метод был применен в доказательстве теоремы 4 из [193]. Далее, интегрирование с весом приводит к

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{U^n}|f(z)|^{p-s}|g(z)|^s(1-|z|)^{\alpha s-1}dm_{2n}(z) \le \int_{I^n} M_p^{p-s}(f,r)M_p^s(g,r)(1-r)^{\alpha s-1}dr$$
$$\le \|f\|_{H^p}^{p-s}\int_{I^n} M_p^s(g,r)(1-r)^{\alpha s-1}dr,$$

что завершает доказательство. ■

Для доказательства Теоремы 13 нам понадобится следующая лемма, которая распространяет на поликруг известное тождество Харди–Стейна (см., например, [25]).

Лемма 17 *Пусть $f(z)\in H(U^n)$, $0<p<\infty$. Тогда для любого $r=(r_1,\ldots,r_n)\in I^n$*

$$\prod_{j=1}^n r_j\cdot\frac{\partial^n}{\partial r_1\ldots\partial r_n}M_p^p(f,r)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{|z_1|<r_1}\ldots\int\limits_{|z_n|<r_n} f^{\#}(z)dm_{2n}(z), \tag{1.3.24}$$

где $f^{\#}(z)=\Delta_{z_1}\Delta_{z_2}\ldots\Delta_{z_n}|f(z)|^p$, и Δ_{z_j} — обычный лапласиан по переменной z_j.

Доказательство. Зафиксируем пока z_2 и применим формулу Грина (см., например, [4], [15]) по отношению к функции $|f(z_1,z_2)|^p$ в $|z_1|<r_1$:

$$\int_{|z_1|=r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}|f(z_1,z_2)|^p d\ell=\int_{|z_1|<r_1}\Delta_{z_1}|f(z_1,z_2)|^p dm_2(z_1),$$

где $d\ell$ — элемент длины дуги.

По отношению к функции

$$\psi(z_2)=r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\int_T|f(r_1\xi_1,z_2)|^p dm(\xi_1)=\int_{|z_1|<r_1}\Delta_{z_1}|f(z_1,z_2)|^p dm_2(z_1),$$

вновь применим формулу Грина в $|z_2|<r_2$:

$$\int_{|z_2|=r_2}\frac{\partial}{\partial r_2}\psi(z_2)d\ell=\int_{|z_2|<r_2}\Delta_{z_2}\psi(z_2)dm_2(z_2).$$

Совмещая эти равенства, получаем

$$r_1r_2\frac{\partial^2}{\partial r_1\partial r_2}\int\limits_T\int\limits_T|f(r_1\xi_1,r_2\xi_2)|^p dm(\xi_1)dm(\xi_2)=\int\limits_{|z_1|<r_1}\int\limits_{|z_2|<r_2}\Delta_{z_1}\Delta_{z_2}|f(z_1,z_2)|^p dm_4(z),$$

что завершает доказательство леммы. ■

Замечание. При $n=1$ (1.3.24) совпадает с известным тождеством Харди–Стейна [25], если учесть формулу (1.3.11).

Доказательство Теоремы 13.

Лемма 17 позволяет установить другое тождество

$$
\begin{aligned}
r_1 r_2 &\int_{T^2} \Delta_{z_1}\Delta_{z_2}|f(z_1,z_2)|^p dm(\xi_1)dm(\xi_2)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2}\int_0^{r_1}\int_0^{r_2}\int_{T^2}\Delta_{z_1}\Delta_{z_2}|f(z_1,z_2)|^p \rho_1\rho_2 dm(\xi_1)dm(\xi_2)d\rho_1 d\rho_2\\
&= (2\pi)^2\frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2}\left[r_1 r_2 \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} M_p^p(f,r_1,r_2)\right]. \qquad (1.3.25)
\end{aligned}
$$

Во-первых, докажем тождество (1.3.10) для $n = 1$. Преобразуем левый интеграл в (1.3.10), интегрируя по частям и используя тождество (1.3.25):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} &\int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^\alpha f^{\#}(z)dm_2(z)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (1-r)^\alpha\left[\int_{-\pi}^{\pi}\Delta|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right] r dr\\
&= \int_0^1 (1-r)^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}M_p^p(f,r)\right)\right]dr\\
&= \lim_{r\to 1-}(1-r)^\alpha\, r\frac{\partial}{\partial r}M_p^p(f,r) + \alpha\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}\, r\,\frac{\partial}{\partial r}M_p^p(f,r)dr. \qquad (1.3.26)
\end{aligned}
$$

Если правая часть интеграла (1.3.10) или (1.3.26) существует, то предел в (1.3.26) равен нулю.

Действительно, согласно тождеству Харди–Стейна функция $r\frac{\partial}{\partial r}M_p^p(f,r)$ возрастает по $r \in (0,1)$. Следовательно для любого $\rho \in (0,1)$

$$
\int_\rho^{(1+\rho)/2}(1-r)^{\alpha-1}\, r\,\frac{\partial}{\partial r}M_p^p(f,r)dr \ge C_\alpha\,\rho\,(1-\rho)^\alpha\frac{\partial}{\partial\rho}M_p^p(f,\rho).
$$

По критерию сходимости Коши

$$
\lim_{\rho\to 1-}(1-\rho)^\alpha\,\frac{\partial}{\partial\rho}M_p^p(f,\rho) = 0.
$$

Из (1.3.26) следует, что

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}(1-|z|)^\alpha f^{\#}(z)dm_2(z) = \alpha\int_0^1(1-r)^{\alpha-1}\, r\,\frac{\partial}{\partial r}M_p^p(f,r)dr.
$$

Часть (ii) теоремы доказана. Переходя к доказательству неравенства (1.3.12), заметим, что пример $f(z) = z$ показывает точность постоянной α/p. Далее, тождество (1.3.10) может быть записано в виде

$$
A(f;p,\alpha) = \frac{\alpha}{p}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial r}\big|f(re^{i\theta})\big|\right)(1-r)^{\alpha-1} r dr d\theta. \qquad (1.3.27)
$$

Поскольку $\big||f(re^{i\theta})| - |f(\rho e^{i\theta})|\big| \le \big|f(re^{i\theta}) - f(\rho e^{i\theta})\big|$, то $\big|\frac{\partial}{\partial r}|f(re^{i\theta})|\big| \le \big|f'(re^{i\theta})\big|$. Отсюда (1.3.12) следует.

Теперь перейдем к доказательству неравенства (1.3.13). По неравенству Коши–Шварца

$$B(f;p,\alpha) \le \sqrt{A(f;p,\alpha)}\left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p(1-|z|)^{\alpha-2}dm_2(z)\right)^{1/2}.$$

Поэтому остается только проверить неравенство

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p(1-|z|)^{\alpha-2}dm_2(z) \le C_{\alpha,p}A(f;p,\alpha), \qquad p>0,\ \alpha>1. \tag{1.3.28}$$

С этой целью проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{2\pi\alpha}A(f;p,\alpha) &= \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}\, r\, \frac{\partial}{\partial r}M_p^p(f,r)dr \\ &= \lim_{r\to 1-}(1-r)^{\alpha-1}\, r\, M_p^p(f,r) - \int_0^1 M_p^p(f,r)\, d\Big(r(1-r)^{\alpha-1}\Big) \\ &= \lim_{r\to 1-}(1-r)^{\alpha-1}\, r\, M_p^p(f,r) + \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p(1-r)^{\alpha-2}(\alpha r-1)\, dr\, d\theta.\end{aligned}$$

Это равенство показывает, что если $A(f;p,\alpha)$ существует, то функция $f(z)$ принадлежит пространству Бергмана $A^p_{\alpha-2}(\mathbb{D})$. Следовательно $\lim_{r\to 1-}(1-r)^{\alpha-1}\, M_p^p(f,r)=0$. Так что получаем

$$\begin{aligned}A(f;p,\alpha) &= \frac{\alpha}{p^2}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p(1-r)^{\alpha-2}(\alpha r-1)\, dr\, d\theta \\ &\ge \frac{\alpha(\alpha-1)}{2p^2}\int_{(\alpha+1)/(2\alpha)}^1\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p(1-r)^{\alpha-2}dr\, d\theta \\ &\ge C(\alpha,p)\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p(1-|z|)^{\alpha-2}dm_2(z),\end{aligned}$$

что доказывает часть (iii) теоремы.

Часть (i) теоремы аналогичным образом получается из (1.3.25). ■

Доказательство Теоремы 14.

Проинтегрированное тождество Харди–Стейна (см. (1.3.24))

$$\begin{aligned}M_p^p(f,r_1,r_2) + |f(0,0)|^p &= M_p^p(f,0,r_2) + M_p^p(f,r_1,0) \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{r_1}\int_0^{r_2}\left(\int\limits_{|z_1|<\rho_1}\int\limits_{|z_2|<\rho_2} f^{\#}(z_1,z_2)dm_4(z)\right)\frac{d\rho_1 d\rho_2}{\rho_1\rho_2}\end{aligned}$$

может быть интегрировано снова по мере $(2\pi)^2 C_{\omega_1}C_{\omega_2}\omega_1(r_1)\omega_2(r_2)r_1r_2dr_1dr_2$. Отсюда получаем

$$\|f\|^p_{A^p_\omega} + |f(0,0)|^p = J_1+J_2+J_3,$$

где

$$J_1 = \left\|f(z_1,0)\right\|^p_{A^p_{\omega_1}(\mathbb{D})} = |f(0,0)|^p + 2\pi C_{\omega_1}\int_0^1 M_1\Big(\Delta_{z_1}|f(z_1,0)|^p, r_1\Big)h_{\omega_1}(r_1)r_1dr_1,$$

$$J_2 = \left\|f(0,z_2)\right\|^p_{A^p_{\omega_2}(\mathbb{D})} = |f(0,0)|^p + 2\pi C_{\omega_2}\int_0^1 M_1\Big(\Delta_{z_2}|f(0,z_2)|^p, r_2\Big)h_{\omega_2}(r_2)r_2dr_2.$$

Дальнейшее применение теоремы Фубини показывает, что

$$\begin{aligned}J_3 &= C_{\omega_1}C_{\omega_2}\int\limits_{I^2}\left[\int\limits_0^{r_1}\int\limits_0^{r_2}\left(\int\limits_{|z_1|<\rho_1}\int\limits_{|z_2|<\rho_2} f^{\#}(z_1,z_2)dm_4(z)\right)\frac{d\rho_1 d\rho_2}{\rho_1\rho_2}\right]\omega(r)rdr\\ &= (2\pi)^2 C_{\omega_1}C_{\omega_2}\int_0^1\int_0^1 M_1\big(f^{\#}(z_1,z_2), r_1, r_2\big)h_{\omega_1}(r_1)h_{\omega_2}(r_2)r_1r_2dr_1dr_2.\end{aligned}$$

Это завершает доказательство Теоремы 14. ■

1.4 Неравенства Литтлвуда–Пэли и эквивалентные нормы в пространствах Бергмана на единичном шаре из $\mathbb{C}^n$

Этот раздел представляет результаты, полученные в совместной со С. Стевичем статье [266].

Мы покажем, что следующие интегралы сравнимы:

$$\int_B |f(z)|^p(1-|z|)^\alpha dV(z), \quad \int_B |f(z)|^{p-q}|\nabla f(z)|^q(1-|z|)^{\alpha+q}dV(z),$$

$$\int_B |f(z)|^{p-q}|\mathcal{R}f(z)|^q(1-|z|)^{\alpha+q}dV(z),$$

где $p>0$, $q\in[0,p]$, $\alpha\in(-1,\infty)$, а функция f голоморфна в единичном шаре $B=B_n$ из $\mathbb{C}^n$.

Этим подтверждается предположение, сделанное Стевичем [199]. Кроме того, известные неравенства Литтвуда–Пэли обобщены на случай единичного шара $B=B_n$ из $\mathbb{C}^n$.

Пусть $z=(z_1,\dots,z_n)$ и $w=(w_1,\dots,w_n)$ — точки векторного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Через $\langle z,w\rangle \equiv z\,\overline{w} = \sum_{k=1}^n z_k\overline{w}_k$ обозначим скалярное произведение z и w, и $|z|=\sqrt{\langle z,z\rangle}$.

Пусть B — единичный шар в $\mathbb{C}^n$, $B(a,r)=\{\,z\in\mathbb{C}^n \,|\, |z-a|<r\,\}$ — открытый шар с центром a и радиусом r, dV — нормированная мера Лебега на $\mathbb{C}^n$, и $d\sigma$ — нормированная поверхностная мера на сфере $S=\partial B$.

$H(B)$ — класс голоморфных функций в B. Для $f\in H(B)$ запишем интегральные средние

$$M_p(f,r) = \left(\int_S |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)\right)^{1/p}, \quad p\in(0,\infty), \qquad 0\le r<1,$$

$$M_\infty(f,r)=\sup_{\zeta\in S}|f(r\zeta)|, \qquad 0\le r<1.$$

Для $p\in(0,\infty)$ и $\alpha\in(-1,\infty)$, весовое пространство Бергмана $\mathcal{A}^p_\alpha(B)$ — это пространство всех голоморфных функций f на B таких, что

$$\|f\|_{p,\alpha}=\left(\int_B|f(z)|^p(1-|z|)^\alpha dV(z)\right)^{1/p}<\infty.$$

Весовые пространства Бергмана аналитических функций одной переменной исследованы, например, в монографиях и статьях [80], [110], [239], [83], [91], [185], [191], [231], тогда как весовые пространства Бергмана аналитических функций многих переменных исследованы, например, в [45], [47], [63], [155], [158], [21], [180], [192], [237], [238], [241], смотри также цитируемую там литературу.

В статьях [191] и [192] автор исследовал соотношения между различными интегралами в пространствах Бергмана в единичном круге, единичном шаре и поликруге. Стевич в [199] сделал несколько предположений по этой теме, среди которых сформулировал следующее предположение.

Предположение. *Пусть* $p>0$, $q\in[0,p]$, $\alpha\in(-1,\infty)$, $f\in H(B)$. *Показать, что*

$$\int_B|f(z)|^p(1-|z|)^\alpha dV(z)\approx|f(0)|^p+\int_B|f(z)|^{p-q}|\nabla f(z)|^q(1-|z|)^{\alpha+q}dV(z). \tag{1.4.1}$$

Замечание. Заметим, что при $q=0$ соотношение (1.4.1) очевидно. С другой стороны, мы знаем, что

$$|f(0)|^p+\int_B|\nabla f(z)|^p(1-|z|)^{\alpha+p}dV(z)\approx\int_B|f(z)|^p(1-|z|)^\alpha dV(z) \tag{1.4.2}$$

см., например, [180], [192], [237], и следовательно соотношение (1.4.1) имеет место также при $p=q$.

Ниже мы подтвердим Предположение (1.4.1), доказав следующую теорему:

Теорема 15 *Пусть* $p>0$, $q\in[0,p]$, $\alpha\in(-1,\infty)$, $f\in H(B)$. *Тогда*

$$\int_B|f(z)|^p(1-|z|)^\alpha dV(z)\approx|f(0)|^p+\int_B|f(z)|^{p-q}|\nabla f(z)|^q(1-|z|)^{\alpha+q}dV(z).$$

Будут даны некоторые обобщения неравенства Литтлвуда–Пэли в единичном шаре.

Для того чтобы доказать Теорему 15 нам понадобятся несколько вспомогательных лемм.

Лемма 18 *Пусть $0 \le p < \infty$ и $f \in H(B)$. Тогда почти для всех $r < \rho < 1$, $\zeta \in \partial B$*

$$\big||f(\rho\zeta)|^p - |f(r\zeta)|^p\big| \le (\rho - r) \sup_{r<s<\rho} p\,|f(s\zeta)|^{p-1}|\nabla f(s\zeta)|. \tag{1.4.3}$$

Доказательство. При $f \equiv 0$ неравенство очевидно. При $f \not\equiv 0$, в точке z, где f отлично от нуля, имеем

$$\Big|\frac{d}{ds}(|f(z)|^p)\Big| = p|f(z)|^{p-1}\big|\langle\nabla|f|(s\zeta),\zeta\rangle\big| \le p|f(z)|^{p-1}|\nabla f(z)|, \tag{1.4.4}$$

где $z = s\zeta$. Интегрируя (1.4.4) по s от r до ρ, получаем (1.4.3). ■

Лемма 19 *Пусть $0 < q \le p < \infty$ и $\alpha > -1$. Тогда найдется постоянная $C = C(p,q,\alpha,n)$ такая, что*

$$M_\infty^p(f,1/2) \le C\left(|f(0)|^p + \int_B |f(z)|^{p-q}|\nabla f(z)|^q(1-|z|)^{q+\alpha}dV(z)\right),$$

для всех $f \in H(B)$.

Доказательство. По Лемме 18 имеем

$$\big||f|^{p/q}(z) - |f|^{p/q}(0)\big| \le \frac{p}{q}|z| \sup_{|w|<1/2}|f(w)|^{\frac{p}{q}-1}|\nabla f(w)|,$$

для всех $|z| < 1/2$. Следовательно

$$|f(z)|^p \le C\left(|f(0)|^p + \sup_{|w|<1/2}|f(w)|^{p-q}|\nabla f(w)|^p\right), \tag{1.4.5}$$

для некоторой положительной постоянной C, независимой от f. Имеем

$$|\nabla f(w)|^q \approx \sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial z_k}(w)\right|^q. \tag{1.4.6}$$

Ввиду (1.4.6) и поскольку функции $|f(w)|^{p-q}|\frac{\partial f}{\partial z_k}(w)|^q$, $k \in \{1,\dots,n\}$ субгармоничны, получаем, что существует положительная постоянная C, независимая от f такая, что

$$\begin{aligned}|f(z)|^{p-q}|\nabla f(z)|^q &\le C\sum_{k=1}^n |f(z)|^{p-q}\left|\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)\right|^q\\ &\le C\sum_{k=1}^n \int_{|w|<3/4}|f(w)|^{p-q}\left|\frac{\partial f}{\partial z_k}(w)\right|^q dV(w)\\ &\le C\int_{|w|<3/4}|f(w)|^{p-q}|\nabla f(w)|^q dV(w),\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

для всех $|z| < 1/2$.

Из (1.4.5) и (1.4.7) получаем, что

$$
\begin{aligned}
|f(z)|^p &\le C\left(|f(0)|^p + \int_{|w|<3/4} |f(w)|^{p-q}|\nabla f(w)|^q dV(w)\right)\\
&\le C\left(|f(0)|^p + \int_{|w|<3/4} |f(w)|^{p-q}|\nabla f(w)|^q (1-|w|)^\alpha dV(w)\right)\\
&\le C\left(|f(0)|^p + \int_{B} |f(w)|^{p-q}|\nabla f(w)|^q (1-|w|)^\alpha dV(w)\right)
\end{aligned}
$$

для всех $|z| < 1/2$. ■

Лемма 20 *Пусть* $0 < p < \infty$, $q \in [0, p]$ *и* $0 \le r < 1$. *Тогда существует постоянная* C, *независимая от* f *и* r *такая, что*

$$
\int_S \sup_{0\le\tau<1} |f(\tau r\zeta)|^{p-q}|\nabla f(\tau r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \le C \int_S |f(r\zeta)|^{p-q}|\nabla f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta)
$$

для всех $f \in H(B)$.

Доказательство. Согласно [186, с.165] существует положительная постоянная C, независимая от неотрицательной субгармонической функции u в единичном шаре $B \subset \mathbb{R}^m$ такая, что

$$
\int_S \sup_{0\le\tau<1} u(\tau r\zeta)\, d\sigma(\zeta) \le C \int_S u(r\zeta)\, d\sigma(\zeta)
$$

для всех $r \in (0, 1)$. Отсюда выбирая $m = 2n$, а также из (1.4.6) и субгармоничности функций $|f(w)|^{p-q}|\frac{\partial f}{\partial z_k}(w)|^q$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, легко получаем требуемый результат. ■

Нам потребуется также следующая техническая лемма, доказанная в [161].

Лемма 21 *Пусть* $g(r)$ *— неотрицательная непрерывная функция на интервале* $[0, 1)$, $b > 0$ *и* $\alpha > -1$. *Тогда найдется постоянная* $C = C(\alpha, b)$ *такая, что*

$$
\int_0^1 g^b(r)(1-r)^\alpha dr \le C\left(\max_{r\in[0,1/2]} g^b(r) + \int_0^1 \left|g\left(\frac{1+r}{2}\right) - g(r)\right|^b (1-r)^\alpha dr\right).
$$

Доказательство Теоремы 15. Существование положительной постоянной C такой, что

$$
\int_B |f(z)|^{p-q}|\nabla f(z)|^q (1-|z|)^{\alpha+q} dV(z) \le C \int_B |f(z)|^p (1-|z|)^\alpha dV(z),
$$

следует из [191, Теор.2] с $\omega(z) = (1-|z|)^\alpha$. Вначале положим, что $q \le 1$. По Лемме 21 (случай $b = 1$), Леммам 19 и 20 в полярных координатах получаем

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{p,\alpha}^p &= 2n \int_0^1 M_p^p(f,r)(1-r)^\alpha r^{2n-1} dr \\
&\le C \left(M_p^p(f,1/2) + \int_0^1 \left| M_p^p(f,(1+r)/2) - M_p^p(f,r) \right| (1-r)^\alpha dr \right) \\
&\le C \left(M_p^p(f,1/2) + \int_0^1 \left| M_q^q(|f|^{p/q},(1+r)/2) - M_q^q(|f|^{p/q},r) \right| (1-r)^\alpha dr \right) \\
&\le C \left(M_\infty^p(f,1/2) + \int_0^1 \int_S \left| |f|^{p/q}((1+r)\zeta/2) - |f|^{p/q}(r\zeta) \right|^q d\sigma(\zeta)(1-r)^\alpha dr \right) \\
&\le C \left(M_\infty^p(f,1/2) + \int_0^1 \int_S \left| \frac{p}{q} \sup_{r<\rho<\frac{1+r}{2}} |f(\rho\zeta)|^{\frac{p}{q}-1} |\nabla f(\rho\zeta)| \right|^q d\sigma(\zeta)(1-r)^{\alpha+q} dr \right) \\
&\le C \left(M_\infty^p(f,1/2) + \left(\frac{p}{q}\right)^q \int_0^1 \int_S \sup_{0<\rho<\frac{1+r}{2}} |f(\rho\zeta)|^{p-q} |\nabla f(\rho\zeta)|^q d\sigma(\zeta)(1-r)^{\alpha+q} dr \right) \\
&\le C \left(M_\infty^p(f,1/2) + \left(\frac{p}{q}\right)^q \int_0^1 \int_S \left| f\left(\frac{1+r}{2}\zeta\right) \right|^{p-q} \left| \nabla f\left(\frac{1+r}{2}\zeta\right) \right|^q d\sigma(\zeta)(1-r)^{\alpha+q} dr \right) \\
&= C \left(M_\infty^p(f,1/2) + 2^{\alpha+q+1} \left(\frac{p}{q}\right)^q \int_{1/2}^1 \int_S |f(r\zeta)|^{p-q} |\nabla f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta)(1-r)^{\alpha+q} dr \right) \\
&\le C \left(M_\infty^p(f,1/2) + 2^{\alpha+q+2n} \left(\frac{p}{q}\right)^q \int_0^1 \int_S |f(r\zeta)|^{p-q} |\nabla f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta)(1-r)^{\alpha+q} r^{2n-1} dr \right) \\
&\le C \left(|f(0)|^p + \int_B |f(z)|^{p-q} |\nabla f(z)|^q (1-|z|)^{\alpha+q} dV(z) \right),
\end{aligned}
$$

что завершает доказательство случая $q \le 1$.

Теперь положим $q > 1$. Тогда по Лемме 21 с $b = q$ и по неравенству Минковского получаем

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{p,\alpha}^p = 2n \int_0^1 (M_p^{p/q}(f,r))^q (1-r)^\alpha r^{2n-1} dr \\
&\le C \left(M_p^p(f,1/2) + \int_0^1 \left| M_p^{p/q}(f,(1+r)/2) - M_p^{p/q}(f,r) \right|^q (1-r)^\alpha dr \right) \\
&\le C \left(M_p^p(f,1/2) + \int_0^1 \left| M_q(|f|^{p/q},(1+r)/2) - M_q(|f|^{p/q},r) \right|^q (1-r)^\alpha dr \right) \\
&\le C \left(M_\infty^p(f,1/2) + \int_0^1 \int_S \left| |f|^{p/q}(\frac{1+r}{2}\zeta) - |f|^{p/q}(r\zeta) \right|^q d\sigma(\zeta)(1-r)^\alpha dr \right) \\
&\le C \left(M_\infty^p(f,1/2) + \int_0^1 \int_S \left| \frac{p}{q} \sup_{r<\rho<\frac{1+r}{2}} |f(\rho\zeta)|^{\frac{p}{q}-1} |\nabla f(\rho\zeta)| \right|^q d\sigma(\zeta)(1-r)^{\alpha+q} dr \right) \\
&\le C \left(M_\infty^p(f,1/2) + \left(\frac{p}{q}\right)^q \int_0^1 \int_S \sup_{0<\rho<\frac{1+r}{2}} |f(\rho\zeta)|^{p-q} |\nabla f(\rho\zeta)|^q d\sigma(\zeta)(1-r)^{\alpha+q} dr \right).
\end{aligned}
$$

Оставшаяся часть доказательства такая же как в первом случае, и поэтому мы его опускаем. ■

Для голоморфных функций в единичном шаре рассмотрим дробное интегродифференцирование Адамара порядка $\alpha \in \mathbb{R}$. Если функция $f \in H(B)$ разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} a_k z^k, \qquad z \in B,$$

то определим

$$\mathcal{F}^\alpha f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} (1+|k|)^\alpha a_k z^k, \qquad z \in B. \tag{1.4.8}$$

Теорема 16 *Пусть $0 < q \le p < \infty$, $\alpha > 0$, $f(z) \in H^p(B)$, и голоморфная в B функция $g(z)$ принадлежит пространству со смешанной нормой $H(p,q,\alpha)$, т.е.*

$$\|g\|_{H(p,q,\alpha)}^q = \int_0^1 M_p^q(g,r)(1-r)^{\alpha q-1}dr < +\infty.$$

Тогда

$$\int_B |f(z)|^{p-q}|g(z)|^q(1-|z|)^{\alpha q-1}dV(z) \le C\|f\|_{H^p}^{p-q}\|g\|_{H(p,q,\alpha)}^q.$$

В частности, если $\mathcal{F}^\alpha f \in H(p,q,\alpha)$, то

$$\int_B |f(z)|^{p-q}|\mathcal{F}^\alpha f(z)|^q(1-|z|)^{\alpha q-1}dV(z) \le C\|f\|_{H^p}^{p-q}\|\mathcal{F}^\alpha f\|_{H(p,q,\alpha)}^q.$$

Доказательство. Полагая, что $\|f\|_{H^p} \neq 0$, применим неравенство Йенсена к интегралу

$$\begin{aligned}\int_S |f(r\zeta)|^{p-q}|g(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) &= M_p^p(f,r)\left[\frac{1}{M_p^p(f,r)}\int_S \left|\frac{g(r\zeta)}{f(r\zeta)}\right|^q |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)\right]^{\frac{p}{q}\frac{q}{p}} \\ &\le M_p^p(f,r)\left[\frac{1}{M_p^p(f,r)}\int_S \left|\frac{g(r\zeta)}{f(r\zeta)}\right|^p |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)\right]^{q/p} \\ &= M_p^{p-q}(f,r)\left[\int_S |g(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)\right]^{q/p} = M_p^{p-q}(f,r)M_p^q(g,r).\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Умножая (1.4.9) на $(1-r)^{\alpha q-1}r^{2n-1}dr$, затем интегрируя от 0 до 1, получаем, что

$$\begin{aligned}\int_B |f(z)|^{p-q}|g(z)|^q(1-|z|)^{\alpha q-1}dV(z) &\le C\int_0^1 M_p^{p-q}(f,r)M_p^q(g,r)(1-r)^{\alpha q-1}dr \\ &\le C\|f\|_{H^p}^{p-q}\int_0^1 M_p^q(g,r)(1-r)^{\alpha q-1}dr,\end{aligned}$$

что завершает доказательство. ■

Далее нам потребуются дополнительные обозначения и леммы. Всюду ниже для фиксированного $\delta > 1$ пусть

$$\Gamma_\delta(\zeta) = \{z \in B : |1 - \overline{\zeta} z| \le \delta(1 - |z|)\}$$

— допустимая область с вершиной $\zeta \in S$. Пусть также $I_{\zeta,t} = \{\eta \in S : |1 - \overline{\zeta}\eta| < t\}$ и $\widehat{I}_{\zeta,t} = \{z \in B : |1 - \overline{\zeta} z| < t\}$.

Следуя [71], [157], рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
A_p(f)(\zeta) &= \left(\int_{\Gamma_\delta(\zeta)} \frac{|f(z)|^p}{(1-|z|)^{n+1}} dV(z)\right)^{1/p}, \qquad p < \infty, \\
A_\infty(f)(\zeta) &= \sup\{|f(z)| : z \in \Gamma_\delta(\zeta)\}, \\
C_p(f)(\zeta) &= \sup_t \left(\frac{1}{|I_{\zeta,t}|} \int_{\widehat{I}_{\zeta,t}} \frac{|f(z)|^p}{1-|z|} dV(z)\right)^{1/p}, \quad p < \infty, \quad \zeta \in S.
\end{aligned}$$

Лемма Койфмана–Мейера–Стейна. ([71], [157])

Пусть $1 < p \le \infty, 0 < q < \infty, \alpha > 0, \beta > 0$. Для любых измеримых функций $f(z)$ и $g(z)$ в единичном шаре B имеют место неравенства

$$\int_B \frac{|f(z)||g(z)|}{1-|z|} dV(z) \le C \int_S A_p(f)(\zeta)\, C_{p'}(g)(\zeta)\, d\sigma(\zeta), \tag{1.4.10}$$

$$\left\| C_q\big(|f(z)|(1-|z|)^\alpha\big)\right\|_{L^\infty}^q \asymp \sup_{w \in B} (1-|w|)^\beta \int_B \frac{|f(z)|^q (1-|z|)^{\alpha q - 1}}{|1 - \overline{w} z|^{\beta+n}} dV(z). \tag{1.4.11}$$

Теорема 17 *Пусть $0 < q < 2$, $q < p$, $\gamma > 0$, $0 < \alpha < \gamma q/n$. Тогда для любого $\lambda > (p-q)/\alpha$*

$$\int_B |f(z)|^{p-q} |\mathcal{D}^\gamma f(z)|^q (1-|z|)^{\gamma q - 1} dV(z) \le C \|f\|_{H^\lambda}^{p-q} \left\|\mathcal{D}^{\alpha n/q} f\right\|_{H^q}^q. \tag{1.4.12}$$

Доказательство. Обозначим через L интеграл в левой части (1.4.12). Выбирая произвольное α, $0 < \alpha < \gamma q/n$ и оценивая L по (1.4.10), получаем

$$\begin{aligned}
L &= \int_B |\mathcal{D}^\gamma f(z)|^q (1-|z|)^{\gamma q - \alpha n} \cdot |f(z)|^{p-q} (1-|z|)^{\alpha n} \frac{dV(z)}{1-|z|} \\
&\le C \int_S A_{2/q}\Big(|\mathcal{D}^\gamma f(z)|^q (1-|z|)^{\gamma q - \alpha n}\Big)(\zeta) \cdot C_{(2/q)'}\Big(|f(z)|^{p-q}(1-|z|)^{\alpha n}\Big)(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\
&\le C \left\| C_{(2/q)'}\Big(|f(z)|^{p-q}(1-|z|)^{\alpha n}\Big)\right\|_{L^\infty} \int_S A_{2/q}\Big(|\mathcal{D}^\gamma f(z)|^q (1-|z|)^{\gamma q - \alpha n}\Big)(\zeta)\, d\sigma(\zeta).
\end{aligned}$$

В последнем выражении оценим L^∞-норму и последний интеграл по отдельности. Согласно (1.4.11), выбирая $\beta > 0$ достаточно большим, L^∞-норму можно оценить так

$$\begin{aligned}
&\left\| C_{2/(2-q)}\Big(|f(z)|^{p-q}(1-|z|)^{\alpha n}\Big)\right\|_{L^\infty}^{2/(2-q)} \\
&\quad\le C\sup_{w\in B}(1-|w|)^\beta \int_B |f(z)|^{2(p-q)/(2-q)} \frac{(1-|z|)^{2\alpha n/(2-q)-1}}{|1-\overline{w}z|^{\beta+n}} dV(z) \\
&\quad\le C\|f\|_{H^\lambda}^{2(p-q)/(2-q)} \sup_{w\in B}(1-|w|)^\beta \int_B \frac{(1-|z|)^{2\alpha n/(2-q)-(2n/\lambda)(p-q)/(2-q)-1}}{|1-\overline{w}z|^{\beta+n}} dV(z) \\
&\quad\le C\|f\|_{H^\lambda}^{2(p-q)/(2-q)} \sup_{w\in B}(1-|w|)^{2n/(2-q)\cdot(\alpha-(p-q)/\lambda)} \\
&\quad\le C\|f\|_{H^\lambda}^{2(p-q)/(2-q)},
\end{aligned}$$

где $|f(z)| \le C\|f\|_{H^\lambda}(1-|z|)^{-n/\lambda}$, $z \in B$, и другое хорошо известное неравенство [21, Предл.1.4.10] в единичном шаре использовано. Следовательно для любого $\lambda > (p-q)/\alpha$

$$\left\| C_{2/(2-q)}\Big(|f(z)|^{p-q}(1-|z|)^{\alpha}\Big)\right\|_{L^\infty} \le C\|f\|_{H^\lambda}^{p-q}. \tag{1.4.13}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
J &\equiv \int_S A_{2/q}\Big(|\mathcal{D}^\gamma f(z)|^q(1-|z|)^{\gamma q-\alpha n}\Big)(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\
&= \int_S \left[\int_{\Gamma_\delta(\zeta)} |\mathcal{D}^\gamma f(z)|^2(1-|z|)^{2(\gamma-\alpha n/q)-n-1}\, dV(z)\right]^{q/2} d\sigma(\zeta).
\end{aligned}$$

В соответствии с правилом интегродифференцирования из [156, с.179,186]

$$J \le C\left\|\mathcal{D}^{\alpha n/q} f\right\|_{H^q}^q. \tag{1.4.14}$$

Этим завершается доказательство Теоремы 17. ■

Замечание. Заметим, что взяв $p = 2$ и $\gamma = 1$ в (1.4.12), и формально перейдя к пределу при $q \to 2-$ и $\alpha \to 0+$, мы приходим к классическому неравенству Литтлвуда–Пэли в единичном шаре.

Далее рассмотрим радиальную производную в единичном шаре

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{k=1}^n z_k \frac{\partial f(z)}{\partial z_k}. \tag{1.4.15}$$

Если функция $f \in H(B)$ разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} a_k z^k, \qquad z \in B,$$

то

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} |k| a_k z^k, \qquad z \in B. \tag{1.4.16}$$

Теорема 18 *Пусть* $0 < q \le p < \infty$, $f \in H(B)$ *и*

$$\mathcal{L}_{p,q}(f) = \int_B |f(z)|^{p-q} |\mathcal{R}f(z)|^q (1-|z|)^{q-1} dV(z).$$

Тогда

$$|f(0)|^p + \mathcal{L}_{p,q}(f) \le C\|f\|^p_{H^p}, \qquad q \ge 2. \tag{1.4.17}$$

Обратно, если $f(0) = 0$, *то*

$$\|f\|^p_{H^p} \le C\mathcal{L}_{p,q}(f), \qquad q \le 2. \tag{1.4.18}$$

Доказательство. Во-первых, докажем, что для $q = 2$

$$\|f\|^p_{H^p} \approx |f(0)|^p + \mathcal{L}_{p,2}(f) \tag{1.4.19}$$

(ср. [223]). Действительно, применим одномерный аналог (1.4.19) (см., например, [234]) по отношению к срез-функции $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta), \lambda \in \mathbb{D}, \zeta \in S$,

$$\|f_\zeta\|^p_{H^p(\mathbb{D})} \approx |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |f_\zeta(\lambda)|^{p-2} |f'_\zeta(\lambda)|^2 (1-|\lambda|) dm_2(\lambda). \tag{1.4.20}$$

Заметим, что

$$f'_\zeta(\lambda) = \lambda^{-1}\mathcal{R}f(\lambda\zeta), \qquad \mathcal{R}(f_\zeta) = (\mathcal{R}f)_\zeta, \qquad \lambda \in \mathbb{D},\ \zeta \in S. \tag{1.4.21}$$

Проинтегрируем (1.4.20) по сфере S, используя (1.4.21) и формулу (см., например, [1], [21])

$$\int_{\mathbb{C}^n} g(w)|w|^{-2n} dV(w) = n\int_S \left(\int_{\mathbb{C}} g(z\zeta)|z|^{-2} dm(z) \right) d\sigma(\zeta). \tag{1.4.22}$$

В результате получаем

$$\|f\|^p_{H^p} \approx |f(0)|^p + \int_B |f(w)|^{p-2} |\mathcal{R}f(w)|^2 (1-|w|) dV(w), \tag{1.4.23}$$

что совпадает с (1.4.19).

С другой стороны, неравенство

$$|f(0)|^p + \int_B |\mathcal{R}f(z)|^p (1-|z|)^{p-1} dV(z) \le C\|f\|^p_{H^p}, \qquad 2 \le p < \infty, \tag{1.4.24}$$

хорошо известно, см., например, [1], а также [156] с более общим результатом.

Далее, применим одно неравенство интерполяционного типа. Именно, если некоторая функция g принадлежит $L^{q_1}(d\mu) \cap L^{q_2}(d\mu)$ для $0 < q_1 < q_2 < \infty$, то $g \in L^q(d\mu)$ для всех $q \in [q_1, q_2]$, и более того, найдется число $\theta \in (0,1)$ такое, что

$$\|g\|_{L^q} \le \|g\|^{1-\theta}_{L^{q_1}} \|g\|^\theta_{L^{q_2}}. \tag{1.4.25}$$

Чтобы доказать (1.4.25), выберем число θ так, что $1/q = (1-\theta)/q_1 + \theta/q_2$, и затем применим неравенство Гельдера с индексами $q_2/(q\theta) > 1$ и $(q_2/(q\theta))' = q_2/(q_2 - q\theta)$.

Определим

$$g(z) = \frac{\mathcal{R}f(z)}{f(z)}(1-|z|), \qquad d\mu = |f(z)|^p \frac{dV(z)}{1-|z|}. \tag{1.4.26}$$

Тогда заметим, что неравенства (1.4.23) и (1.4.24) означают, что

$$|f(0)|^p + \mathcal{L}_{p,2}(f) = |f(0)|^p + \|g\|^2_{L^2(d\mu)} \approx \|f\|^p_{H^p}, \tag{1.4.27}$$

$$|f(0)|^p + \mathcal{L}_{p,p}(f) = |f(0)|^p + \|g\|^p_{L^p(d\mu)} \le C\|f\|^p_{H^p}. \tag{1.4.28}$$

Ввиду (1.4.23)–(1.4.28) получаем $g \in L^q(d\mu)$ для всех $q \in [2,p]$, при этом $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{p}$ и

$$\|g\|_{L^q(d\mu)} \le \|g\|^{1-\theta}_{L^2(d\mu)}\|g\|^{\theta}_{L^p(d\mu)} \le C\|f\|^{p(1-\theta)/2}_{H^p}\|f\|^{\theta}_{H^p} = C\|f\|^{(p/2)(1-\theta)+\theta}_{H^p} = C\|f\|^{p/q}_{H^p},$$

т.е.

$$\mathcal{L}_{p,q}(f) = \|g\|^q_{L^q(d\mu)} \le C\|f\|^p_{H^p}.$$

Тем самым, неравенство (1.4.17) доказано для всех $q \in [2,p]$.

Перейдем к доказательству (1.4.18). Воспользуемся неравенством, обратным к (1.4.24), см. [1], [44], [156],

$$\|f\|^p_{H^p} \le C|f(0)|^p + C\int_B |\mathcal{R}f(z)|^p(1-|z|)^{p-1}dV(z), \qquad 0 < p \le 2. \tag{1.4.29}$$

Рассмотрим теперь три случая.

Если $0 < q < p < 2$, то определяя как (1.4.26) и выбирая θ,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{2}, \qquad \text{т.е.} \qquad \theta = \frac{2(p-q)}{p(2-q)},$$

согласно (1.4.24), (1.4.25), (1.4.26), (1.4.19), получаем

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{H^p} &\le C_p\mathcal{L}_{p,p}(f) = C_p\|g\|^p_{L^p(d\mu)} \le C_p\|g\|^{p(1-\theta)}_{L^q(d\mu)}\|g\|^{p\theta}_{L^2(d\mu)} \\ &= C_p\big(\mathcal{L}_{p,q}(f)\big)^{p(1-\theta)/q}\big(\mathcal{L}_{p,2}(f)\big)^{p\theta/2} \le C_p\big(\mathcal{L}_{p,q}(f)\big)^{p(1-\theta)/q}\|f\|^{p^2\theta/2}_{H^p}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|f\|^{p(1-p\theta/2)}_{H^p} \le C_p\big(\mathcal{L}_{p,q}(f)\big)^{p(1-\theta)/q},$$

или

$$\|f\|^p_{H^p} \le C_p\mathcal{L}_{p,q}(f). \tag{1.4.30}$$

Случай $0 < q \le 2 = p$ вытекает из (1.4.30) предельным переходом при $p \to 2-$ поскольку постоянная C_p ограничена по $p \in (q,2)$ ввиду (1.4.25).

Если $0 < q \le 2 < p$, то выбирая θ таким, что

$$\frac{1}{2} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{p}, \qquad \text{т.е.} \qquad \theta = \frac{p(2-q)}{2(p-q)},$$

согласно (1.4.29), (1.4.25), (1.4.19), мы получаем

$$\|f\|^p_{H^p}\le C\mathcal{L}_{p,2}(f)=C\|g\|^2_{L^2(d\mu)}\le C\|g\|^{2(1-\theta)}_{L^q(d\mu)}\|g\|^{2\theta}_{L^p(d\mu)}$$
$$=C\big(\mathcal{L}_{p,q}(f)\big)^{2(1-\theta)/q}\big(\mathcal{L}_{p,p}(f)\big)^{2\theta/p}\le C\big(\mathcal{L}_{p,q}(f)\big)^{2(1-\theta)/q}\|f\|^{2\theta}_{H^p}.$$

Таким образом,
$$\|f\|^{p-2\theta}_{H^p}\le C\big(\mathcal{L}_{p,q}(f)\big)^{2(1-\theta)/q},$$
или
$$\|f\|^{p(1/2-\theta/p)}_{H^p}\le C\big(\mathcal{L}_{p,q}(f)\big)^{(1-\theta)/q}.$$
Во всех трех случаях (1.4.18) следует. Теорема 18 доказана. ■

Следующая теорема является аналогом и следствием Теоремы 15.

Теорема 19 *Пусть* $\alpha>-1$, $0<q\le p<\infty$, $f\in H(B)$. *Тогда*
$$|f(0)|^p+\int_B|f(z)|^{p-q}|\mathcal{R}f(z)|^q(1-|z|)^{\alpha+q}dV(z)\approx\|f\|^p_{p,\alpha}. \tag{1.4.31}$$

Доказательство. При $n=1$ Теорема 15 утверждает, что
$$\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p(1-|z|)^\alpha dm_2(z)\approx|f(0)|^p+\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^{p-q}|f'(z)|^q(1-|z|)^{\alpha+q}dm_2(z).$$
Применим это соотношение по отношению к срез-функции $f_\zeta(z)=f(z\zeta)$, $z\in\mathbb{D}$, $\zeta\in S$,
$$\int_{\mathbb{D}}|f_\zeta(z)|^p(1-|z|)^\alpha dm_2(z)\approx|f(0)|^p+\int_{\mathbb{D}}|f_\zeta(z)|^{p-q}|f'_\zeta(z)|^q(1-|z|)^{\alpha+q}dm_2(z). \tag{1.4.32}$$
Используя (1.4.21) и (1.4.22), проинтегрируем (1.4.32) по сфере и придем к (1.4.31). ■

Из Теорем 15 и 19 вытекают два немаловажных следствия.

Теорема 20 *Пусть* $0<q\le p<\infty$, $\alpha>-1$ *и* $f\in H(B)$. *Тогда*
$$\|f\|^p_{p,\alpha}\approx|f(0)|^p+\int_B|f(z)|^{p-q}|\mathcal{R}f(z)|^q(1-|z|)^{\alpha+q}dV(z)$$
$$\approx|f(0)|^p+\int_B|f(z)|^{p-q}|\nabla f(z)|^q(1-|z|)^{\alpha+q}dV(z).$$

Теорема 21 *Если* $0<q\le p<\infty$, $\alpha>-1$ *и* $f\in H(B)$, *то имеет место соотношение*
$$\|f\|^p_{p,\alpha}\approx|f(0)|^p+\int_0^1M_p^{p-q}(f,r)M_p^q(\mathcal{R}f,r)(1-r)^{\alpha+q}dr.$$

Доказательство. Случай $p = q$ следует из Теоремы 19. Поэтому положим $q < p$. Из доказательства Теоремы 16 для $g = \mathcal{R}f$ и Теоремы 19, получаем, что

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,\alpha}^p &\le C\left(|f(0)|^p + \int_B |f(z)|^{p-q}|\mathcal{R}f(z)|^q(1-|z|)^{\alpha+q}dV(z)\right)\\ &\le C\left(|f(0)|^p + \int_0^1 M_p^{p-q}(f,r)M_p^q(\mathcal{R}f,r)(1-r)^{\alpha+q}dr\right).\end{aligned}$$

Обратное неравенство получим, если применить неравенство Гельдера с индексами $p/(p-q)$ и p/q к последнему интегралу, и из Теоремы 19 для $p = q$. ■

1.5 Неравенства Литтлвуда–Пэли для векторнозначных функций

Этот раздел представляет результаты, полученные в совместной с Джорджевич и Павловичем статье [267].

Пусть $h(\mathbb{D})$ — класс всех вещественнозначных функций, гармонических в единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Гармонический класс Харди h^p, $1 \le p \le \infty$, состоит из тех функций $f \in h(\mathbb{D})$, для которых $\|f\|_p := \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < \infty$, где

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p}.$$

В этом разделе мы обобщим на векторнозначные функции следующую теорему Литтлвуда и Пэли.

Теорема 22 *Если $p \ge 2, f \in h^p$, то найдется постоянная C_p такая, что*

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla f(z)|^p(1-|z|)^{p-1}\,dA(z) \le C_p\big(\|f\|_p^p - |f(0)|^p\big). \tag{1.5.1}$$

Если $1 \le p \le 2$, $f \in h(\mathbb{D})$, *и*

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla f(z)|^p(1-|z|)^{p-1}\,dA(z) < \infty,$$

то $f \in h^p$, и найдется постоянная $c_p > 0$ такая, что

$$c_p\big(\|f\|_p^p - |f(0)|^p\big) \le \int_{\mathbb{D}} |\nabla f(z)|^p(1-|z|)^{p-1}\,dA(z). \tag{1.5.2}$$

Здесь dA обозначает меру Лебега на плоскости, нормированную так, что $A(\mathbb{D}) = 1$.

Обычно этот результат формулируют в более слабом виде, а именно (1.5.1) и соответственно (1.5.2) заменяются на

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla f(z)|^p(1-|z|)^{p-1}\,dA(z) + |f(0)|^p \le C_p\|f\|_p^p \tag{1.5.3}$$

и соотв.
$$c_p\|f\|_p^p \le |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |\nabla f(z)|^p (1-|z|)^{p-1}\, dA(z). \tag{1.5.4}$$

Тем не менее, (1.5.1) показывает также насколько субгармоничность функции $|f|$ может быть уточнена, когда рассматриваются функции $|f|^p$ при $p \ge 2$. Чтобы увидеть это, достаточно переписать (1.5.1) в виде

$$|f(0)|^p \le \|f\|_p^p - \frac{1}{C}\int_{\mathbb{D}} |\nabla f(z)|^p (1-|z|)^{p-1}\, dA(z). \tag{1.5.5}$$

Неравенства (1.5.1) и (1.5.2) являются специальными случаями теорем Литтлвуда–Пэли для субгармонических функций [163]. Следует отметить, тем не менее, что (1.5.1) вытекает также из доказательства Люкинга (1.5.3) (см. [149]). Короткое и элементарное доказательство (1.5.1) было дано в [165].

То, что Теорема 22 справедлива для гармонических функций со значениями в гильбертовом пространстве, был замечено в [163]. Полагая, что (1.5.1) (с очевидными изменениями в обозначениях) имеет место в банаховом пространстве X, и взяв $f(\xi + i\eta) = x + \eta y$, где x, $y \in X$ фиксированы, получаем

$$\|y\|^p \int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{p-1}\, dA(z) \le C_p \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|x + (\cos\theta) y\|^p \, d\theta - \|x\|^p \right).$$

Это влечет

$$\max_{\theta \in [-\pi,\pi]} \|x + (\cos\theta)y\|^p \ge \|x\|^p + b_p\|y\|^p \qquad (b_p \text{ — положительная постоянная})$$

откуда ввиду выпуклости нормы

$$\max\left\{\|x+y\|^p, \|x-y\|^p\right\} \ge \|x\|^p + b_p\|y\|^p. \tag{1.5.6}$$

Отсюда заключаем, что модуль выпуклости X (см. ниже) удовлетворяет

$$\delta_X(\varepsilon) \ge c\,\varepsilon^p \qquad (c = \mathrm{const} > 0).$$

Другими словами, из справедливости (1.5.1) вытекает, что пространство X является "p-равномерно выпуклым". Мы докажем, что обратное также верно (см. Теорему 23).

Ввиду двойственности между равномерной выпуклостью и равномерной гладкостью естественно ожидать, что справедливость (1.5.2) (для фиксированного $p \in (1, 2]$) эквивалентна p-равномерной гладкости X. Это имеет место (см. Теоремы 24 и 25), но для доказательства того, что (1.5.2) влечет равномерную гладкость, нам потребуется нетривиальный результат Аррегу и Бласко о двойственности векторнозначных пространств Бергмана (см.[38, Теор.3.9] и [51, Теор.3.6]).

Пусть X — вещественное банахово пространство. Модуль выпуклости и модуль гладкости X определяются как

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x,\, y \in X,\ \|x\| = 1,\ \|y\| = 1,\ \|x-y\| \ge \varepsilon\right\}, \quad 0 < \varepsilon < 2,$$

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{1}{2}\big(\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|\big) \colon x,\, y \in X,\ \|x\| = 1,\ \|y\| = 1\right\}, \quad \tau > 0.$$

Пространство X называется равномерно выпуклым (соотв. равномерно гладким), если $\delta_X(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon \in (0,2)$ (соотв. $\rho_X(\tau)/\tau \to 0$ при $\tau \to 0$).

Если существует постоянная $p \geq 2$ такая, что $\delta_X(\varepsilon) \geq c\varepsilon^p$, где c — положительная постоянная, то говорят, что X — p-равномерно выпуклое. Хорошо известно и легко заметить, что X p-равномерно выпукло, если

$$\frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2} \geq \|x\|^p + \lambda\|y\|^p, \quad x,\, y \in X, \tag{1.5.7}$$

для некоторой положительной постоянной λ. Как следует из результата Фигеля и Пизие [87], обратное также верно.

Для фиксированного $p \geq 2$ обозначим через $I_p(X)$ наибольшее $\lambda \geq 0$, удовлетворяющее (1.5.7).

Поэтому X p-равномерно выпукло, если и только если $I_p(X) > 0$.

Банахово пространство X называется q-равномерно гладким ($1 < q \leq 2$), если $\rho_X(\tau) \leq C\tau^q$ для $0 < \tau < 1$, где C — положительная постоянная.

Известно, что

X является равномерно выпуклым (соотв. гладким) тогда и только тогда, когда сопряженное пространство X^* является равномерно гладким (соотв. выпуклым).

Количественная форма этих фактов выражена в формулах Линденштрауса:

$$\rho_{X^*}(\tau) = \sup\left\{\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_X(\varepsilon) \colon 0 < \varepsilon < 2\right\}, \tag{1.5.8}$$

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_{X^*}(\varepsilon) \colon 0 < \varepsilon < 2\right\} \tag{1.5.9}$$

(см. [143], [144]).

Согласно старому результату Милмана (см. [144, Предл.1.e.3])

каждое равномерно выпуклое (а значит каждое равномерно гладкое) пространство рефлексивно.

Ханнер [103] вычислил точные значения модулей выпуклости лебеговых пространств L^p. Из его результата следует, что

пространство L^s является p-равномерно выпуклым при $p = \max\{s, 2\}$, и является q-равномерно гладким при $q = \min\{s, 2\}$.

Функция $f : \mathbb{D} \mapsto X$ называется гармоническим, если

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0, \qquad \text{для всех} \quad \xi + i\eta \in \mathbb{D}. \tag{1.5.10}$$

Это эквивалентно тому, что для каждого $\Phi \in X^*$ вещественнозначная функция $\Phi f = \Phi \circ f$ гармонична $\mathbb{D}$.

Пусть $h(\mathbb{D}, X)$ обозначает класс всех X-значных гармонических функций в $\mathbb{D}$. Если $f \in h(\mathbb{D}, X)$, то существует единственная последовательность $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset X$ такая, что

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}, \qquad re^{i\theta} \in \mathbb{D}, \tag{1.5.11}$$

где ряд равномерно сходится на каждом компакте из $\mathbb{D}$.

Градиент функции f определяется как

$$(\nabla f)(a) = \big(\, (D_1 f)(a), (D_2 f)(a)\, \big),$$

где

$$(D_1 f)(\xi + i\eta) = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad (D_2 f)(\xi + i\eta) = \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Градиент в фиксированной точке $a \in \mathbb{D}$ можно рассматривать как линейный оператор из $\mathbb{R}^2$ в X, именно

$$\mathbb{R}^2 \ni\ (t_1, t_2) \mapsto (D_1 f)(a)\, t_1 + (D_2 f)(a)\, t_2\ \in X.$$

Легко видеть, что норма этого оператора эквивалентна

$$(\|D_1 f(a)\|_X^2 + \|D_2 f(a)\|_X^2)^{1/2} =: \|\nabla f(a)\|_X.$$

Лемма 22 *Пусть $u : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}$ — гармоническая функция такая, что $|u| \le 1$ в $\mathbb{D}$. Тогда*

$$|\nabla u(0)| \le 2(1 - |u(0)|).$$

Доказательство. Если $u(0) \ge 0$, то функция $v = 1 - u$ положительна, и следовательно $|\nabla v(0)| \le 2v(0)$, т.е.

$$|\nabla u(0)| \le 2\big(1 - u(0)\big) = 2(1 - |u(0)|).$$

Если же $u(0) < 0$, то рассмотрим функцию $v = 1 + u$, и результат следует. ■

Лемма 23 *Пусть $f : \mathbb{D} \mapsto X$ — ограниченная гармоническая функция, где пространство X p-равномерно выпукло $(p \ge 2)$. Тогда*

$$\|f\|_{\infty,X}\ \ge \Big(\|f(0)\|^p + c\|\nabla f(0)\|^p\Big)^{1/p},$$

где постоянная $c > 0$ независима от f.

Доказательство. Пусть $\|f\|_{\infty,X} = 1$ и $\phi \in X^*,\ \|\phi\| = 1$. По Лемме 22,

$$|\phi D_1 f(0))| = |D_1 \phi f(0))| \le 2(1 - |\phi(f(0))|),$$

откуда

$$|\phi(f(0))| + (1/2)|\phi D_1 f(0)|\ \le 1$$

и следовательно

$$\big|\phi\big(f(0) \pm D_1 f(0)/2\big)\big|\ \le 1.$$

Поэтому

$$\big\|f(0) \pm D_1 f(0)/2\big\| \le 1.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} 1 &\ge \frac{\big\|f(0) + D_1 f(0)/2\big\|^p + \big\|f(0) - D_1 f(0)/2\big\|^p}{2} \\ &\ge \|f(0)\|^p + I_p(X)\|D_1 f(0)/2\|^p. \end{aligned}$$

Используя аналогичное неравенство для D_2, получаем требуемый результат. ■

Если X — произвольное банахово пространство, то определим $h^p(X)$, $0 < p < \infty$, как пространство тех X-значных функций f, гармонических в $\mathbb{D}$ таких, что

$$\|f\|_{p,X} := \sup_{0<r<1} M_p(r, f) < \infty,$$

где

$$M_p(r, f) = M_{p,X}(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(re^{i\theta})\|^p \, d\theta\right)^{1/p}.$$

Лемма 24 *Пусть X — p-равномерно выпуклое пространство, $p \ge 2$. Если $f \in h^p(X)$, то*

$$\|f\|_{p,X} \ge \Big(\|f(0)\|^p + c\|\nabla f(0)\|^p\Big)^{1/p}, \tag{1.5.12}$$

где $c > 0$ — постоянная, независимая от f.

Доказательство. Положим, что f — гармонический многочлен и определим гармоническую функцию $g : \mathbb{D} \mapsto L^p(\partial\mathbb{D}, X) =: Y$ по формуле

$$g(z)(e^{i\theta}) = f(ze^{i\theta}) \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{1.5.13}$$

Тогда g ограничена и

$$\|g(z)\|_Y = M_{p,X}(r, f), \qquad \|g(0)\|_Y = \|f(0)\|_X, \qquad \|g\|_{\infty,Y} = \|f\|_{p,X}.$$

С другой стороны, имеем

$$D_1 g(0)(e^{i\theta}) = D_1 f(0)\cos\theta + D_2 f(0)\sin\theta, \tag{1.5.14}$$

$$D_2 g(0)(e^{i\theta}) = D_2 f(0)\cos\theta - D_1 f(0)\sin\theta, \tag{1.5.15}$$

откуда следует, что

$$\|D_1 g(0)\|_Y + \|D_2 g(0)\|_Y \le 2\Big(\|D_1 f(0)\|_X + \|D_2 f(0)\|_X\Big).$$

Обратное неравенство можно установить аналогично. Поэтому

$$\|\nabla f(0)\|_X \approx \|\nabla g(0)\|_Y, \qquad \text{т.е.} \qquad \frac{1}{K}\|\nabla f(0)\|_X \le \|\nabla g(0)\|_Y \le K\|\nabla f(0)\|_X,$$

где K — абсолютная постоянная. Неравенство (1.5.12) следует теперь из Леммы 23, и легко проверяется, что Y является p-равномерно выпуклым с $I_p(Y) = I_p(X)$. ■

Далее, как и прежде полагаем, что X — p-равномерно выпуклое пространство.

Лемма 25 *Пусть $f : \mathbb{D} \mapsto X$ — гармоническая функция. Тогда*

$$\|\nabla f(z)\|^p (1-|z|)^p \le C \int_{D_\varepsilon(z)} d\mu(w),$$

где $d\mu(w)$ — мера Рисса субгармонической функции $w \mapsto \|f(w)\|^p$, и

$$D_\varepsilon(z) = \{w : \, |w-z| < \varepsilon(1-|z|)\}.$$

Здесь число $\varepsilon > 0$ достаточно мало, и C зависит от ε, но не от f.

Доказательство. Пусть u — произвольная субгармоническая функция в $\mathbb{D}$. Тогда имеет место формула Пуассона–Йенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta - u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{|w|<r} \log\frac{r}{|w|}\, d\mu(w) \quad (0<r<1).$$

Подставляя $u(z) = \|f(z)\|^p$ и используя p-равномерную выпуклость пространства X и Лемму 24, мы получаем

$$\|\nabla f(0)\|^p \le C \int_{|w|<r} \log\frac{r}{|w|}\, d\mu(w).$$

Применяя это к функции $w \mapsto u(z+w)$, получаем

$$\|\nabla f(z)\|^p \le C \int_{|w-z|<r} \log\frac{r}{|w-z|}\, d\mu(w),$$

что имеет место для малых r. Здесь

$$\|\nabla f(z)\|^p \le C \int_{|w-z|<r} \frac{1}{|w-z|}\, d\mu(w).$$

Проинтегрируем это неравенство по кругу $|z| < r$ и используем теорему Фубини и субгармоничность функции $\|\nabla f(z)\|^p$

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(0)\|^p &\le C \int_{|z|<r} \|\nabla f(z)\|^p \, dA(z) \\
&\le C \int_{|z|<r} \left(\int_{|w|<2r} \frac{1}{|w-z|}\, d\mu(w) \right) dA(z) \\
&= C \int_{|w|<2r} \left(\int_{|z|<r} \frac{1}{|w-z|}\, dA(z) \right) d\mu(w) \le C_r \int_{|w|<2r} d\mu(w).
\end{aligned}$$

Взяв малое $r = \varepsilon/2$, приходим к требуемому результату для $z = 0$. В общем случае применяем доказанный специальный случай по отношению к функции

$$w \mapsto f\big(z + \varepsilon(1-|z|)w\big).$$

■

Теорема 23 *Пусть X — p-равномерно выпуклое банахово пространство ($p \geq 2$). Если $f \in h^p(X)$, то найдется постоянная C такая, что*

$$\int_{\mathbb{D}} \|\nabla f(z)\|^p (1-|z|)^{p-1}\, dA(z) \leq C\Big(\|f\|_{p,X}^p - \|f(0)\|^p\Big). \tag{1.5.16}$$

Доказательство. Вначале положим, что функция f гармонична в окрестности замкнутого единичного круга. По Лемме 25

$$\int_{\mathbb{D}} \|\nabla f(z)\|^p (1-|z|)^{p-1}\, dA(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} d\mu(w) \int_{E_\varepsilon(w)} (1-|z|)^{-1}\, dA(z),$$

где $E_\varepsilon(w) = \{z : |z-w| < \varepsilon(1-|z|)\}$. Теперь используем неравенство

$$\frac{1}{1+\varepsilon}(1-|w|) < 1-|z| < \frac{1}{1-\varepsilon}(1-|w|), \qquad w \in E_\varepsilon(z),$$

чтобы получить

$$\int_{E_\varepsilon(w)} (1-|z|)^{-1}\, dA(z) \leq C_\varepsilon (1-|w|),$$

и следовательно

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \|\nabla f(z)\|^p (1-|z|)^{p-1}\, dA(z) &\leq C \int_{\mathbb{D}} (1-|w|)\, d\mu(w) \\ &\leq C \int_{\mathbb{D}} \log\frac{1}{|w|}\, d\mu(w) \\ &= 2\pi C \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(e^{i\theta})\|^p\, d\theta - \|f(0)\|^p\right), \end{aligned}$$

где использована формула Пуассона–Йенсена. Это доказывает теорему в специальном случае. Если же функция $f \in h^p(X)$ произвольна, то применим доказанный результат к функциям $f_r(z) = f(rz)$, и получим

$$\int_{\mathbb{D}} r^p \|\nabla f(rz)\|^p (1-|z|)^{p-1}\, dA(z) \leq C_p\Big(\|f\|_{p,X}^p - \|f(0)\|^p\Big), \quad 0 < r < 1.$$

Теперь доказательство завершается предельным переходом при $r \to 1$ с использованием леммы Фату. ■

Следующая известная лемма является следствием формулы (1.5.9).

Лемма 26 *Пусть $1/p + 1/q = 1$. Пространство X q-равномерно гладко тогда и только тогда, когда его сопряженное пространство p-равномерно выпукло.*

Нам нужна будет следующая теорема Филлипса [168].

Теорема Филлипса. *Если X рефлексивно, то сопряженное пространство пространства $L^q(X, S, d\sigma)$ изометрически изоморфно пространству $L^p(X^*, S, d\sigma)$, с операцией спаривания*

$$(f, g) = \int_S \langle f(s), g(s)\rangle\, d\sigma(s), \quad f \in L^q(X, S, d\sigma),\ g \in L^p(X^*, S, d\sigma),$$

где $\langle , \rangle$ обозначает спаривание между X и X^*.

Следующая теорема следует из двойстенности.

Теорема 24 *Пусть X — q-равномерно гладкое банахово пространство* $(1 < q \leq 2)$. *Если*

$$\int_{\mathbb{D}} \|\nabla f(z)\|^q (1-|z|)^{q-1}\, dA(z) < \infty,$$

то $f \in h^q(X)$, и найдется постоянная C такая, что

$$\|f\|_{q,X}^q - \|f(0)\|^q \leq C \int_{\mathbb{D}} \|\nabla f(z)\|^q (1-|z|)^{q-1}\, dA(z). \tag{1.5.17}$$

Пусть $\mathcal{T}(X)$ обозначает класс всех тригонометрических многочленов с X-значными коэффициентами.

Лемма 27 *Если X сепарабельно и рефлексивно, то $\mathcal{T}(X)$ плотно $L^p(T, X)$, при* $1 < p < \infty$.

Доказательство. Хорошо известно, что необходимым и достаточным условием того, чтобы подмножество $T \subset L$ нормированного линейного пространства L было фундаментальным, т.е. $\overline{T} = L$, является то, что каждый линейный ограниченный функционал, который исчезает на T, исчезает также всюду.

Поэтому нам нужно доказать, что если функционал $\Lambda \in (L^p(T,X))^*$ удовлетворяет условию $\Lambda f = 0$ для всех $f \in \mathcal{T}(X)$, то $\Lambda \equiv 0$.

По Теореме Филлипса, найдется функция $g \in L^q(X^*)$ такая, что

$$\Lambda f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle f(e^{i\theta}), g(e^{i\theta})\rangle\, d\theta.$$

Полагая, что $\Lambda = 0$ на $\mathcal{T}(X)$, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} \langle x, g(e^{i\theta})\rangle\, d\theta = 0$$

для всех $x \in X$ и всех целых n. Следовательно для каждого $x \in X$ имеем $\langle x, g(e^{i\theta})\rangle = 0$ почти для всех $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Поскольку X сепарабельно, мы можем выбрать плотную последовательность $\{x_n\} \subset X$ такую, что $\langle x_n, g(e^{i\theta})\rangle = 0$ для $\theta \in E_n \subset [-\pi, \pi]$, где мера множества E_n равна 2π. Теперь пусть $E = \cap_n E_n$. Тогда для каждого $\theta \in E$ имеем $\langle x_n, g(e^{i\theta})\rangle = 0$ для всех n, и поэтому $\langle x, g(e^{i\theta})\rangle = 0$ для всех $x \in X$.

Это влечет $g(e^{i\theta}) = 0$ для всех $\theta \in E$, и следовательно $g(e^{i\theta}) = 0$ почти всюду, так как мера множества E равна 2π. Это завершает доказательство. ∎

Доказательство Теоремы 24.

Пусть X — q-равномерно гладкое банахово пространство, где $1 < q \leq 2$, и пусть $1/p + 1/q = 1$. По Лемме 26, его сопряженное пространство X^* p-равномерно выпукло.

Для того чтобы доказать Теорему 24, применим Теорему 23 к пространству X^*. Более того, запишем неравенство (1.5.16) в виде

$$\int_{\mathbb{D}} \|\nabla g(z)\|_{X^*}^p \left(\log\frac{1}{|z|}\right)^{p-1} dA(z) \leq C_p \Big(\|g\|_{p,X^*}^p - \|g(0)\|_{X^*}^p\Big), \tag{1.5.18}$$

откуда получаем

$$\|g(0)\|^p_{X^*} + c\int_{\mathbb{D}} \|\nabla g(z)\|^p_{X^*}\biggl(\log\frac{1}{|z|}\biggr)^{p-1} dA(z) \le \|g\|^p_{p,X^*}, \tag{1.5.19}$$

где c — положительная постоянная, независимая от g.

Введем Z как пространство тех гармонических функций $g\colon \mathbb{D} \mapsto X^*$ таких, что

$$\|g\|^p_Z := \|g(0)\|^p_{X^*} + c\int_{\mathbb{D}} \|\nabla g(z)\|^p_{X^*}\biggl(\log\frac{1}{|z|}\biggr)^{p-1} dA(z) < \infty.$$

Аналогично, Y состоит из тех гармонических функций $f\colon \mathbb{D} \mapsto X$, для которых

$$\|f\|^q_Y := \|f(0)\|^q_{X} + b\int_{\mathbb{D}} \|\nabla f(z)\|^q_{X}\biggl(\log\frac{1}{|z|}\biggr)^{q-1} dA(z) < \infty,$$

где b — положительная постоянная, независимая от f.

Чтобы продолжить доказательство, остается записать билинейную форму $\langle,\rangle$ в нужном виде.

Лемма 28 *Если f и g соответственно X-значное и X^*-значное функции, гармонические в окрестности замкнутого единичного круга, то справедлива формула*

$$\begin{aligned}(f,g) :&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \langle f(e^{i\theta}), g(e^{i\theta})\rangle\, d\theta \\ &= \langle f(0), g(0)\rangle + \int_{\mathbb{D}} \langle \nabla f(z), \nabla g(z)\rangle \log\frac{1}{|z|}\, dA(z),\end{aligned} \tag{1.5.20}$$

где

$$\langle \nabla f(z), \nabla g(z)\rangle := \langle D_1 f(z), D_1 g(z)\rangle + \langle D_2 f(z), D_2 g(z)\rangle.$$

Доказательство. Полагая, что X и X^* — комплексные банаховы пространства с операцией спаривания

$$\langle \alpha f(z), \beta g(z)\rangle = \alpha\bar\beta\,\langle f(z), g(z)\rangle \qquad \text{для всех} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{C},$$

и используя разложения в степенные ряды

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\bar z^n, \qquad z = re^{i\theta}\in\mathbb{D},\ a_n\in X,$$

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k r^{|k|} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k}\bar z^k, \qquad z = re^{i\theta}\in\mathbb{D},\ b_k\in X^*,$$

мы можем записать левую часть (1.5.20) в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \langle f(e^{i\theta}), g(e^{i\theta})\rangle\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle a_n, b_n\rangle.$$

Чтобы преобразовать правую часть (1.5.20), вспомним дифференциальные операторы Виртингера в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\big(D_1 - iD_2\big), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\big(D_1 + iD_2\big).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f(z), \nabla g(z)\rangle &= \langle D_1 f(z), D_1 g(z)\rangle + \langle D_2 f(z), D_2 g(z)\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right\rangle + \left\langle i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right), i\left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\right)\right\rangle \\
&= 2\left\langle \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial z}\right\rangle + 2\left\langle \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\right\rangle \\
&= 2\sum_{n,k=0}^{\infty} n\,k\langle a_n, b_k\rangle z^{n-1}(\bar{z})^{k-1} + 2\sum_{n,k=1}^{\infty} n\,k\langle a_{-n}, b_{-k}\rangle (\bar{z})^{n-1} z^{k-1}.
\end{aligned}$$

Интегрируя получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\langle \nabla f(z), \nabla g(z)\rangle d\theta = 2\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, r^{2n-2}\Big(\langle a_n, b_n\rangle + \langle a_{-n}, b_{-n}\rangle\Big)$$

и

$$\int_{\mathbb{D}}\langle \nabla f(z), \nabla g(z)\rangle \log\frac{1}{|z|}\, dA(z) = -\langle a_0, b_0\rangle + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle a_n, b_n\rangle.$$

Это завершает доказательство Леммы 28. ■

Лемма 29 *В условиях Леммы* 28 *справедливо* $|(f,g)| \le \|f\|_Y \|g\|_Z$.

Доказательство. Результат легко выводится из (1.5.20) с применением неравенства

$$|\langle \nabla f(z), \nabla g(z)\rangle| \le \|\nabla f(z)\|_X \|\nabla g(z)\|_{X^*}$$

и неравенства Гельдера. ■

Продолжение Доказательства Теоремы 24. Вначале предположим, что f гармонична в окрестности замкнутого единичного круга. Тогда нам следует показать, что $\|f_1\|_{L^q(T,X)} \le \|f\|_Y$, где f_1 обозначает сужение f на единичную окружность T. Образ замкнутого круга при отображении f содержится в замкнутой линейной оболочке коэффициентов f, так что мы можем считать, что X сепарабельно.

Поскольку X рефлексивно, то X^* сепарабельно, и поэтому $\mathcal{T}(X^*)$ плотно в $L^p(T, X^*)$. Отсюда и из Теоремы Филлипса следует, что

$$\|f_1\|_{L^q(T,X)} = \sup\{|(f,g)|\colon g_1 \in \mathcal{T}(X^*),\ \|g_1\|_{L^p(T,X^*)} \le 1\}.$$

Ввиду $\|g_1\|_{L^p(T,X^*)} \ge \|g\|_Z$, по Теореме 23, получаем

$$\|f_1\|_{L^q(T,X)} \le \sup\{|(f,g)|\colon g_1 \in \mathcal{T}(X^*),\ \|g\|_Z \le 1\}.$$

Следовательно $\|f_1\|_{L^q(T,X)} \le \|f\|_Y$, так как по Лемме 29 $|(f,g)| \le \|f\|_Y\|g\|_Z$. Это доказывает теорему в специальном случае.

Если же функция $f \in h^p(X)$ произвольна, то применим тот же результат по отношению к функции $f_r(z) = f(rz)$, откуда следует, что

$$M_q^q(r,f) \le \|f(0)\|_X^q + b\int_{\mathbb{D}} r^q \|\nabla f(rz)\|_X^q \left(\log\frac{1}{|z|}\right)^{q-1} dA(z).$$

Выражение в правой части $\le \|f\|_Z^q$, поскольку $M_q(r, \|\nabla f\|)$ возрастает по r, что является следствием субгармоничности $\|\nabla f(z)\|$. Таким образом, доказательство завершено. ■

Теорема 25 *Если имеет место неравенство* (1.5.17)*, то пространство X является q-равномерно гладким.*

Доказательство. Для доказательства нам потребуется результат Аррегу и Бласко о векторнозначных пространствах Бергмана (см. [38, Теор.3.9] и [51, Теор.3.6]), в слегка обобщенном виде. Именно, для гармонической функции $f : \mathbb{D} \mapsto X$ пусть

$$N_{q,X}(f) = \left(\int_{\mathbb{D}} \|\nabla f(z)\|_X^q \left(\log\frac{1}{|z|}\right)^{q-1} dA(z)\right)^{1/q}.$$

В соотвествии с этим модифицированное доказательство Теоремы 3.6 из [51] приводит к

$$N_{p,X^*}(g) \approx \sup\{|(f,g)| : N_{q,X}(f) \le 1\}, \tag{1.5.21}$$

где

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \langle f(e^{i\theta}), g(e^{i\theta})\rangle\, d\theta,$$

и верхняя грань берется по всем X-значным гармоническим "многочленам" f с $f(0) = 0$. Теперь запишем (1.5.17) как

$$\|f\|_{q,X}^q \le \|f(0)\|_X^q + CN_{q,X}^q(f).$$

Отсюда согласно (1.5.21) и неравенства Гельдера находим

$$N_{p,X^*}(g) \le C\|g\|_{(h^q(X))^*}.$$

Поскольку $\|g\|_{(h^q(X))^*} \le \|g\|_{h^p(X^*)}$, получаем

$$\|g(0)\|_{X^*} + c_1 N_{p,X^*}(g) \le \|g\|_{p,X^*}.$$

Как показано в начале этого параграфа (см. (1.5.6)), отсюда вытекает, что X^* — p-равномерно выпукло и что X — q-равномерно гладко. ■

Теорема 26 *Если X — p-равномерно выпуклое пространство, и $1 < q \le p$ ($p \ge 2$). Если $f \in h^q(X)$, то справедливо неравенство*

$$\int_0^1 \{M_{q,X}(r,\nabla f)\}^p (1-r)^{p-1}\, dr \le C\left(\|f\|_{q,X}^p - \|f(0)\|^p\right). \tag{1.5.22}$$

Доказательство. Пространство $Y = L^q(\partial\mathbb{D}, X)$ p-равномерно выпукло (см., например, [86]). Применяя Теорему 23 к функции g, определенной по (1.5.13), получаем требуемый результат. ■

Следующий результат, двойственный к Теореме 26, доказывается аналогично.

Теорема 27 *Пусть X — q-равномерно гладкое пространство, и $p \geq q(1 < q \leq 2)$. Если $f \in h^q(X)$, то справедливо неравенство*

$$\|f\|_{p,X}^q - \|f(0)\|^q \leq C \int_0^1 \{M_{p,X}(r, \nabla f)\}^q (1-r)^{q-1}\, dr. \tag{1.5.23}$$

Следует отметить, что неравенства (1.5.22) и (1.5.23) содержат, помимо неравенств Литтлвуда–Пэли, также неравенства Харди и Литтлвуда

$$\int_0^1 \{M_q(r, \nabla f)\}^2 (1-r)\, dr \leq C \left(\|f\|_q^2 - |f(0)|^2\right) \qquad (1 < q \leq 2), \tag{1.5.24}$$

$$\|f\|_p^2 - |f(0)|^2 \leq C \int_0^1 \{M_p(r, \nabla f)\}^2 (1-r)\, dr \qquad (p \geq 2), \tag{1.5.25}$$

которые имеют место для скалярнозначных h^q-функций. Неравенства (1.5.24) и (1.5.25) следуют из (1.5.22) и (1.5.23) взятием $X = \mathbb{R}$.

Теорему 23 можно обобщить с тем же доказательством и установить следующую теорему.

Теорема 28 *Пусть $q \geq p$. Если $f \in h^q(X)$, где X — p-равномерно выпукло, то*

$$\int_{\mathbb{D}} \|\nabla f(z)\|^p \, \|f(z)\|^{q-p} (1-|z|)^{p-1}\, dA(z) \leq C \left(\|f\|_{q,X}^q - \|f(0)\|^q\right).$$

Для голоморфных функций в $\mathbb{D}$ со значениями в p-равномерно PL-выпуклом пространстве Теоремы 26 и 27 доказаны в [52]. Сведения о PL-выпуклых пространствах можно найти в [75].

Глава 2

Лакунарные ряды в весовых пространствах на поликруге

В этой главе известные неравенства Пэли и Пэли-Кахане-Хинчина о лакунарных рядах обобщены и распространены на поликруг из $\mathbb{C}^n$.

Эти неравенства затем применены для получения точных оценок роста в весовых пространствах $h(p,\alpha), h\big(p,\log(\alpha)\big)$ типа Харди–Блоха, содержащих n-гармонические функции в поликруге. Эти пространства родственны классам Блоха и пространствам со смешанной нормой и естественно возникают как образы некоторых дробных операторов.

Результаты этой главы опубликованы в [264], [268], [274] и анонсированы в [281], [282].

2.1 Лакунарные ряды в пространствах Харди и обобщения неравенств Пэли

Для измеримой функции $f(z) = f(r\zeta)$ в U^n, как обычно, интегральные средние обозначаем

$$M_p(f;r) = \big\|f(r\cdot)\big\|_{L^p(T^n;dm_n)}, \quad r = (r_1,\dots,r_n) \in I^n, \quad 0 < p \le \infty,$$

где $I^n = (0,1)^n, dm_n$ — мера Лебега на T^n, нормированная условием $m_n(T^n) = 1$. Множество голоморфных функций $f(z)$, для которых $\|f\|_{H^p} = \sup\limits_{r\in I^n} M_p(f;r) < +\infty$, есть обычное пространство Харди $H^p = H^p(U^n)$ в поликруге.

Определение. Последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется лакунарной по Адамару, если существует постоянная $\lambda > 1$ такая, что $\frac{n_{k+1}}{n_k} \ge \lambda$ для всех $k = 1,2,\dots$. Соответствующий степенной ряд называют лакунарным рядом.

Лакунарные ряды в классических функциональных пространствах таких, как пространства Блоха, Бергмана, Бесова, Дирихле, классы типа Q, интенсивно изучаются в последнее десятилетие, см. [39], [40], [95], [96], [97], [98], [232], [242].

Для изучения лакунарных рядов в поликруге нам нужно распространить классические неравенства Пэли ([15, Гл.XII, Теор.7.8], [80, с.104], [164, с.170]) и Пэли–Кахане–Хинчина ([15, Гл. V, Теор.8.20], [164, с.172]) на поликруг.

Теорема 29 *Пусть голоморфная функция*

$$f(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} a_{k_1\dots k_n} z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}, \qquad z\in U^n,$$

принадлежит классу Харди H^1. *Тогда для произвольных лакунарных последовательностей* $\{m_{j,k_j}\}_{k_j=1}^{\infty}$, $j=1,2,\dots,n$,

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}^n} \left|a_{m_{1,k_1}\dots m_{n,k_n}}\right|^2\right)^{1/2} \le C\|f\|_{H^1}, \tag{2.1.1}$$

где постоянная $C>0$ *не зависит от* f.

Теорема 30 *Пусть* $\{m_{j,k_j}\}_{k_j=1}^{\infty}$ $(j=1,2,\dots,n)$ *— произвольные лакунарные последовательности, и* $f(z)$ *— голоморфная в* U^n *функция, заданная сходящимся лакунарным рядом*

$$f(z)=\sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_{k_1\dots k_n} z_1^{m_{1,k_1}}\cdots z_n^{m_{n,k_n}}, \qquad z\in U^n.$$

Тогда для любого p, $0<p<\infty$, *функция* f *принадлежит классу Харди* H^p *тогда и только тогда, когда* $\{a_k\}\in\ell^2$. *Более того, соответсвующие нормы эквивалентны:*

$$C_1\|f\|_{H^p} \le \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^n} \left|a_{k_1\dots k_n}\right|^2\right)^{1/2} \le C_2\|f\|_{H^p}, \tag{2.1.2}$$

где постоянные $C_1, C_2>0$ *независимы от* f.

Теорема 30, в частности, утверждает, что если лакунарный степенной ряд принадлежит некоторому классу Харди в поликруге, то он принадлежит и всем классам Харди $H^p(U^n)$ $(0<p<\infty)$.

Для функции $f(z)=f(r\zeta), r\in I^n, \zeta\in T^n$, заданной в поликруге U^n, будем рассматривать интегродифференциальные операторы двух типов: операторы Римана–Лиувилля D^α и $\mathcal{D}^\alpha$, а также оператор Адамара $\mathcal{F}^\alpha$ относительно радиальной переменной $r\in I^n$:

$$\begin{aligned} &D^{-\alpha}f(z)=\frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_{I^n}(1-\eta)^{\alpha-1}f(\eta z)d\eta, \qquad D^\alpha f(z)=\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m D^{-(m-\alpha)}f(z),\\ &\mathcal{D}^{-\alpha}f(r\zeta)=r^{-\alpha}D^{-\alpha}f(r\zeta), \qquad \mathcal{D}^\alpha f(r\zeta)=D^\alpha\big\{r^\alpha f(r\zeta)\big\}, \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^{-\alpha}f(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{I^n}\prod_{j=1}^n\left(\log\frac{1}{\eta_j}\right)^{\alpha_j-1} f(\eta z)d\eta,\\ &\mathcal{F}^m f(z)=\left(\frac{\partial}{\partial r}\cdot r\right)^m f(z), \qquad \mathcal{F}^\alpha f(z)=\mathcal{F}^{-(m-\alpha)}\mathcal{F}^m f(z), \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

где $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial r_n}\right)^{m_n}$, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, $m_j - 1 < \alpha_j \leq m_j$ $(1 \leq j \leq n)$. Легко заметить, что если функция f n-гармонична (или голоморфна), то таковы также $\mathcal{D}^\alpha f, \mathcal{F}^\alpha f$ для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, и кроме того имеют место следующие формулы обращения

$$\mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}^{-\alpha} f(z) = f(z), \qquad \mathcal{F}^\alpha \mathcal{F}^{-\alpha} f(z) = f(z). \tag{2.1.5}$$

Как очевидно из определения, $\mathcal{F}^\alpha f = \mathcal{F}_{r_1}^{\alpha_1} \mathcal{F}_{r_2}^{\alpha_2} \ldots \mathcal{F}_{r_n}^{\alpha_n} f$, для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\mathcal{F}_{r_j}^{\alpha_j}$ обозначает тот же оператор, действующий только по переменной r_j. Существует эквивалентное определение оператора $\mathcal{F}^\alpha$, пригодное для n-гармонических функций. Для каждой функции $f \in h(U^n)$ со степенным разложением

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k r^{|k|} e^{ik \cdot \theta},$$

где $r^{|k|} = r_1^{|k_1|} \cdots r_n^{|k_n|}$, $k \cdot \theta = k_1 \theta_1 + \cdots + k_n \theta_n$, можем записать

$$\mathcal{F}^\alpha f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \prod_{j=1}^n (1 + |k_j|)^{\alpha_j} a_k r^{|k|} e^{ik \cdot \theta}. \tag{2.1.6}$$

В нижеследующих доказательствах Теорем 29 и 30 использованы некоторые аргументы Павловича [164, Гл.11] наряду с неравенствами типа Литтлвуда–Пэли, полученные автором в [260], [261] и Разделе 1.2 настоящей работы.

Без ограничения общности всюду в доказательствах мы можем считать, что $n = 2$.

Доказательство Теоремы 29.

Согласно неравенству типа Литтлвуда–Пэли (см. Теорему 5 или [260], [261])

$$\left\| \left\| (1 - r)\, \mathcal{F}^1 f \right\|_{L^2(dr/(1-r))} \right\|_{L^p(T^n)} \leq C \|f\|_{H^p} \qquad \text{для любого} \qquad 0 < p < \infty. \tag{2.1.7}$$

Полагая $0 < p \leq 2$, можем применить неравенство Минковского по отношению к (2.1.7), и получить

$$\left\| (1 - r)\, M_p(\mathcal{F}^1 f; r) \right\|_{L^2(dr/(1-r))} \leq C \|f\|_{H^p}. \tag{2.1.8}$$

Для двух лакунарных последовательностей $\left\{m_{j,k_j}\right\}_{k_j=1}^\infty$, $j = 1, 2$ найдутся постоянные $\lambda_1, \lambda_2 > 1$ такие, что

$$\frac{m_{j,k_j+1}}{m_{j,k_j}} \geq \lambda_j \qquad \text{для всех} \qquad k_j = 1, 2, \ldots, \qquad j = 1, 2.$$

Выбирая две строго возрастающие последовательности

$$r_{1,k_1} = 1 - \frac{1}{\lambda_1^{k_1}}, \qquad r_{2,k_2} = 1 - \frac{1}{\lambda_2^{k_2}}, \qquad k_1, k_2 = 1, 2, \ldots,$$

и $p = 1$ в (2.1.8), можем оценить

$$
\begin{aligned}
\|f\|^2_{H^1} &\ge C\int_0^1\int_0^1 (1-r)\,M_1^2(\mathcal{F}^1 f;r)dr_1dr_2 \\
&\ge C\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\int_{r_{1,k_1}}^{r_{1,k_1+1}}\int_{r_{2,k_2}}^{r_{2,k_2+1}}(1-r)\,M_1^2(\mathcal{F}^1 f;r)dr_1dr_2.
\end{aligned}
\tag{2.1.9}
$$

Рассмотрим промежутки $I^{(1)}_{k_1}=[\lambda_1^{k_1},\lambda_1^{k_1+1}),\ I^{(2)}_{k_2}=[\lambda_2^{k_2},\lambda_2^{k_2+1}),\ k_1,k_2=1,2,\dots.$ Каждый интервал $I^{(j)}_{k_j}$ содержит не более чем одно число из $\{m_{j,k_j}\}$. Можем считать, что каждый интервал $I^{(j)}_{k_j}$ содержит ровно одно такое число, именно $\lambda_j^{k_j}\le m_{j,k_j}<\lambda_j^{k_j+1},\ k_j\in\mathbb{N},\ j=1,2$. Теперь можем оценить тейлоровские коэффициенты ряда

$$
\mathcal{F}^1 f(z_1,z_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}(1+k_1)(1+k_2)\,a_{k_1k_2}z_1^{k_1}z_2^{k_2}.
$$

По интегральной формуле Коши

$$
(1+k_1)(1+k_2)|a_{k_1k_2}|\le\frac{1}{r_1^{k_1}r_2^{k_2}}M_1(\mathcal{F}^1 f;r_1,r_2),\qquad k_1,k_2=0,1,2,\dots.
$$

Продолжая оценку (2.1.9),

$$
\begin{aligned}
&\int_{r_{1,k_1}}^{r_{1,k_1+1}}\int_{r_{2,k_2}}^{r_{2,k_2+1}}(1-r)\,M_1^2(\mathcal{F}^1 f;r)dr_1dr_2 \\
&\ge\prod_{j=1}^{2}(1+k_j)^2\,|a_{k_1k_2}|^2\int_{r_{1,k_1}}^{r_{1,k_1+1}}\int_{r_{2,k_2}}^{r_{2,k_2+1}}(1-r_1)(1-r_2)\,r_1^{2k_1}r_2^{2k_2}\,dr_1dr_2.
\end{aligned}
\tag{2.1.10}
$$

Внутренние интегралы могут быть оценены следующим образом $(j=1,2)$

$$
\begin{aligned}
\int_{r_{j,k_j}}^{r_{j,k_j+1}}(1-r_j)\,r_j^{2k_j}\,dr_j &\ge (1-r_{j,k_j+1})\,r_{j,k_j}^{2k_j}(r_{j,k_j+1}-r_{j,k_j}) \\
&=\frac{1}{\lambda_j^{k_j+1}}\left(\frac{1}{\lambda_j^{k_j}}-\frac{1}{\lambda_j^{k_j+1}}\right)\left(1-\frac{1}{\lambda_j^{k_j}}\right)^{2k_j}.
\end{aligned}
$$

Взяв $k_j=m_{j,k_j}\ge1,\ k_j=1,2,\dots$, заключаем, что

$$
\int_{r_{j,k_j}}^{r_{j,k_j+1}}(1-r_j)\,r_j^{2m_{j,k_j}}\,dr_j\ge C(\lambda_j)\frac{1}{m^2_{j,k_j}}.
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&\int_{r_{1,k_1}}^{r_{1,k_1+1}}\int_{r_{2,k_2}}^{r_{2,k_2+1}}(1-r)\,M_1^2(\mathcal{F}^1 f;r)dr_1dr_2 \\
&\ge\prod_{j=1}^{2}(1+m_{j,k_j})^2\left|a_{m_{1,k_1}m_{2,k_2}}\right|^2\frac{C(\lambda_1,\lambda_2)}{m^2_{1,k_1}m^2_{2,k_2}}\ge C(\lambda_1,\lambda_2)\left|a_{m_{1,k_1}m_{2,k_2}}\right|^2.
\end{aligned}
\tag{2.1.11}
$$

Неравенства (2.1.9)–(2.1.11) в сумме приводят к требуемому результату, что завершает доказательство Теоремы 29. ■

Доказательство Теоремы 30.

Рассмотрим три случая.

Случай $1 \le p \le 2$. Очевидно, что $\|f\|_{H^p} \le \|f\|_{H^2} = \big\|\{a_k\}\big\|_{\ell^2}$. С другой стороны, обратное неравенство $\big\|\{a_k\}\big\|_{\ell^2} \le C\|f\|_{H^1} \le C\|f\|_{H^p}$ следует непосредственно из Теоремы 29.

Случай $0 < p < 1$. Вновь неравенство $\|f\|_{H^p} \le \|f\|_{H^2} = \big\|\{a_k\}\big\|_{\ell^2}$ очевидно. Для доказательства обратного неравенства положим, что функция $f(z)$ непрерывна в окрестности замыкания U^n. Тогда по неравенству Коши–Шварца

$$\|f\|_{H^1} = \sup_{r \in I^2} \int_{T^2} |f(rw)|^{p/2} |f(rw)|^{1-p/2} dm_2(w) \le \|f\|_{H^p}^{p/2} \|f\|_{H^{2-p}}^{(2-p)/2}.$$

Ввиду предыдущего случая $\|f\|_{H^2} \le C\|f\|_{H^1}$, и поэтому

$$\|f\|_{H^1} \le C\|f\|_{H^p}^{p/2} \|f\|_{H^1}^{(2-p)/2}.$$

Отсюда следует, что $\|f\|_{H^p} \ge C\|f\|_{H^1} \ge C\|f\|_{H^2} = C\big\|\{a_k\}\big\|_{\ell^2}$. Для произвольной функции $f \in H(U^n)$ применим неравенство (2.1.2) по отношению к растянутой функции $f_\rho(z) = f(\rho z)$, $\rho \in I^2$, и затем требуемый результат получаем предельным переходом при $\rho_1, \rho_2 \to 1$.

Случай $2 < p < \infty$. Неравенство $\big\|\{a_k\}\big\|_{\ell^2} \le \|f\|_{H^p}$ очевидно. Поэтому остается доказать обратное неравенство. Рассмотрим тождественный оператор $(If)(z) = f(z)$. Если $q = p/(p-1)$ — сопряженный индекс, то $1 < q < 2 < p < \infty$ и согласно первому случаю $\|If\|_{H^2} \le C\|f\|_{H^q}$. Ввиду самосопряженности тождественного оператора, окончательно получаем $\|f\|_{H^p} = \|If\|_{H^p} \le C\|f\|_{H^2}$. ■

2.2 Лакунарные ряды в весовых пространствах Харди и Блоха

В этом разделе характеризованы лакунарные ряды в весовых пространствах Харди и Блоха $H(p,\alpha)$, $H_0(p,\alpha)$.

Весовое пространство Харди $H(p,\alpha)$ $\big(0 < p \le \infty, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_j > 0\big)$ — это множество всех тех функций $f(z)$, голоморфных в поликруге U^n, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p,\alpha} = \sup_{r \in I^n} \prod_{j=1}^{n} (1-r_j)^{\alpha_j} M_p(f;r).$$

Соответствующее малое пространство $H_0(p,\alpha)$ определяется условиями

$$(1-r_j)^{\alpha_j} M_p(f;r) = o(1) \qquad \text{при} \qquad r_j \to 1-$$

для каждого $j \in [1,n]$ в отдельности. При $n = 1$ пространства $H(p,\alpha)$ и $H_0(p,\alpha)$ исследованы Флеттом [89], [91] в рамках пространств со смешанной нормой.

Если градиент функции $f(z)$ удовлетворяет условиям определений $H(\infty, 1)$ или $H_0(\infty, 1)$, то говорят, что $f(z)$ — блоховская или малая блоховская функция, соответственно. Теорию пространств Блоха, включая высшие размерности, можно найти в [37], [227], [241].

Теорема 31 *Пусть* $\left\{m_{j,k_j}\right\}_{k_j=1}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ *— произвольные лакунарные последовательности,* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, *и* $f(z)$ *— голоморфная функция в* U^n, *заданная сходящимся лакунарным рядом*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_{k_1 \dots k_n} m_{1,k_1}^{\alpha_1} \cdots m_{n,k_n}^{\alpha_n} z_1^{m_{1,k_1}} \cdots z_n^{m_{n,k_n}}, \qquad z \in U^n.$$

Тогда следующие утверждения равносильны:

(a)	$f(z) \in H(\infty, \alpha)$;		
(b)	$f(z) \in H(p, \alpha)$	*для некоторого*	$p \in (0, \infty)$;
(c)	$f(z) \in H(p, \alpha)$	*для всех*	$p \in (0, \infty)$;
(d)	$\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}^n} \in \ell^\infty$.		

Более того, соответствующие нормы эквивалентны.

Следующая теорема является "о-малой" версией Теоремы 31.

Теорема 32 *Пусть* $\left\{m_{j,k_j}\right\}_{k_j=1}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ *— произвольные лакунарные последовательности,* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, *и* $f(z)$ *— голоморфная функция в* U^n, *заданная сходящимся лакунарным рядом*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_{k_1 \dots k_n} m_{1,k_1}^{\alpha_1} \cdots m_{n,k_n}^{\alpha_n} z_1^{m_{1,k_1}} \cdots z_n^{m_{n,k_n}}, \qquad z \in U^n.$$

Тогда следующие утверждения равносильны:

(a)	$f(z) \in H_0(\infty, \alpha)$;		
(b)	$f(z) \in H_0(p, \alpha)$	*для некоторого*	p, $0 < p < \infty$;
(c)	$f(z) \in H_0(p, \alpha)$	*для всех*	p, $0 < p < \infty$;
(d)	$\lim\limits_{k_j \to \infty} a_{k_1 \dots k_n} = 0$	*для каждого*	$j \in [1, n]$.

Ниже приводятся доказательства обеих Теорем 31 и 32, хотя их доказательства схожи.

Доказательство Теоремы 31.
Импликация $(a) \Rightarrow (b)$ очевидна ввиду элементарного вложения $H(\infty, \alpha) \subset H(p, \alpha)$. Импликация $(b) \Rightarrow (c)$ следует из Теоремы 30, которая утверждает, что $M_p(f; r) \approx M_s(f; r)$ для любого $s, 0 < s < \infty$.

Для доказательства импликации $(c) \Rightarrow (d)$, положим, что $f(z) \in H(p, \alpha)$ для всех $p, 0 < p < \infty$. В частности, $(1 - r)^\alpha M_1(f; r_1, r_2) \le \|f\|_{1,\alpha}$ при всех r_1 и r_2. По интегральной формуле Коши

$$\begin{aligned} |a_{k_1 k_2}| m_{1,k_1}^{\alpha_1} m_{2,k_2}^{\alpha_2} &= \left| \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1| = r_1} \int_{|\zeta_2| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1 d\zeta_2}{\zeta_1^{1 + m_{1,k_1}} \zeta_2^{1 + m_{2,k_2}}} \right| \\ &\le \frac{1}{r_1^{m_{1,k_1}} r_2^{m_{2,k_2}}} M_1(f; r_1, r_2) \le \frac{\|f\|_{1,\alpha}}{(1 - r_1)^{\alpha_1} (1 - r_2)^{\alpha_2}\, r_1^{m_{1,k_1}} r_2^{m_{2,k_2}}} \end{aligned}$$

для всех $r=(r_1,r_2)\in I^2$ и $k_1,k_2=1,2,\ldots$. Взяв $r_j=1-1/m_{j,k_j},\ j=1,2$, заключаем, что

$$|a_{k_1k_2}|\le\left(1-\frac{1}{m_{1,k_1}}\right)^{-m_{1,k_1}}\left(1-\frac{1}{m_{2,k_2}}\right)^{-m_{2,k_2}}\|f\|_{1,\alpha}\le 16\,\|f\|_{1,\alpha}$$

для всех k_1 и k_2, т.е. $\{a_k\}\in\ell^\infty$ и $\|\{a_k\}\|_{\ell^\infty}\le 16\,\|f\|_{1,\alpha}$.

Теперь перейдем к доказательству импликации $(d)\Rightarrow(a)$.

Пусть $|a_{k_1k_2}|\le M\le\|\{a_k\}\|_{\ell^\infty}$ для всех k_1 и k_2. Применим оператор Адамара $\mathcal{F}^{1-\alpha}$ к функции $f(z)$

$$\mathcal{F}^{1-\alpha}f(z_1,z_2)=\sum_{k_1,k_2=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{2}(1+m_{j,k_j})^{1-\alpha_j}\,m_{j,k_j}^{\alpha_j}\cdot a_{k_1k_2}\,z_1^{m_{1,k_1}}z_2^{m_{2,k_2}},$$

что приводит к оценке

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{F}^{1-\alpha}f(z_1,z_2)\right|&\le C(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}|a_{k_1k_2}|\,m_{1,k_1}\,m_{2,k_2}\,r_1^{m_{1,k_1}}\,r_2^{m_{2,k_2}}\\&\le C_\alpha M\sum_{k_1=1}^{\infty}m_{1,k_1}\,r_1^{m_{1,k_1}}\sum_{k_2=1}^{\infty}m_{2,k_2}\,r_2^{m_{2,k_2}}.\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Для продолжения оценки заметим, что

$$m_{j,k_j+1}\le\frac{\lambda_j}{\lambda_j-1}(m_{j,k_j+1}-m_{j,k_j}),\qquad k_j\in\mathbb{N},\quad j=1,2.$$

Следовательно, для $k_j\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}m_{j,k_j+1}r_j^{m_{j,k_j+1}}&\le\frac{\lambda_j}{\lambda_j-1}\big(m_{j,k_j+1}-m_{j,k_j}\big)r_j^{m_{j,k_j+1}}\\&\le C(\lambda_j)\left[r_j^{1+m_{j,k_j}}+r_j^{2+m_{j,k_j}}+\cdots+r_j^{m_{j,k_j+1}}\right].\end{aligned}$$

А для $k_j=0$ будем иметь

$$m_{j,1}r_j^{m_{j,1}}\le r_j+r_j^2+\cdots+r_j^{m_{j,1}}.$$

Отсюда, заполняя все пропуски в рядах (2.2.1), получаем оценку для всех r_1,r_2

$$\left|\mathcal{F}^{1-\alpha}f(z_1,z_2)\right|\le C(\alpha,\lambda)M\sum_{k_1=1}^{\infty}r_1^{k_1}\sum_{k_2=1}^{\infty}r_2^{k_2}=C(\alpha,\lambda)M\frac{r_1}{1-r_1}\frac{r_2}{1-r_2}.$$

Поэтому

$$(1-r_1)(1-r_2)M_\infty\big(\mathcal{F}^{1-\alpha}f;r_1,r_2\big)\le C(\alpha,\lambda)M\le C(\alpha,\lambda)\big\|\{a_k\}\big\|_{\ell^\infty}.$$

Таким образом, $\mathcal{F}^{1-\alpha}f(z)\in H(\infty,1)$.

Поскольку оператор Адамара обратим, мы можем теперь дважды применить правило дробного интегродифференцирования в пространствах со смешанной нормой (см. [91, Теор.6]) по каждой переменной r_1 и r_2, и в итоге получить

$$f(z)=\mathcal{F}^{\alpha-1}\mathcal{F}^{1-\alpha}f(z)\in H(\infty,1+(\alpha-1))=H(\infty,\alpha)$$

с эквивалентностью норм. Это завершает доказательство Теоремы 31. ■

Доказательство Теоремы 32.

Импликация $(a) \Rightarrow (b)$ очевидна ввиду элементарного вложения $H_0(\infty,\alpha) \subset H_0(p,\alpha)$.

Импликация $(b) \Rightarrow (c)$ следует из Теоремы 30, которая утверждает, что $M_p(f;r) \approx M_s(f;r)$ для любого $s, 0<s<\infty$.

Для доказательства импликации $(c) \Rightarrow (d)$, пусть $f(z) \in H_0(p,\alpha)$ для всех $p, 0 < p < \infty$. В частности, $(1-r)^\alpha M_1(f;r_1,r_2) = o(1)$ при $r_1 \to 1-$ или $r_2 \to 1-$. По интегральной формуле Коши

$$\begin{aligned}|a_{k_1k_2}|m_{1,k_1}^{\alpha_1}m_{2,k_2}^{\alpha_2} &= \left|\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\zeta_1|=r_1}\int_{|\zeta_2|=r_2}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)\,d\zeta_1 d\zeta_2}{\zeta_1^{1+m_{1,k_1}}\zeta_2^{1+m_{2,k_2}}}\right| \\ &\le \frac{1}{r_1^{m_{1,k_1}}r_2^{m_{2,k_2}}}M_1(f;r_1,r_2) = \frac{(1-r_1)^{\alpha_1}(1-r_2)^{\alpha_2}M_1(f;r_1,r_2)}{(1-r_1)^{\alpha_1}(1-r_2)^{\alpha_2}\,r_1^{m_{1,k_1}}r_2^{m_{2,k_2}}}\end{aligned}$$

для всех $r=(r_1,r_2) \in I^2$ и $k_1,k_2 = 1,2,\dots$. Взяв $r_j = 1-1/m_{j,k_j},\ j=1,2$, заключаем, что

$$\begin{aligned}|a_{k_1k_2}| \le &\left(1-\frac{1}{m_{1,k_1}}\right)^{-m_{1,k_1}}\left(1-\frac{1}{m_{2,k_2}}\right)^{-m_{2,k_2}} \\ &\times\left(\frac{1}{m_{1,k_1}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{1}{m_{2,k_2}}\right)^{\alpha_2}M_1\left(f;1-\frac{1}{m_{1,k_1}},1-\frac{1}{m_{2,k_2}}\right) = o(1)\end{aligned}$$

при $k_1 \to \infty$ или $k_2 \to \infty$.

Теперь перейдем к доказательству импликации $(d) \Rightarrow (a)$. Пусть $a_{k_1k_2} = o(1)$ при $k_1 \to \infty$ или $k_2 \to \infty$. Для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ найдется число $k_1^0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|a_{k_1k_2}| < \varepsilon \qquad \text{для всех} \qquad k_1 > k_1^0 \qquad \text{и фиксированного} \qquad k_2.$$

Применим оператор Адамара $\mathcal{F}^{1-\alpha}$ к функции $f(z)$:

$$\mathcal{F}^{1-\alpha}f(z_1,z_2) = \sum_{k_1,k_2=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{2}(1+m_{j,k_j})^{1-\alpha_j}\,m_{j,k_j}^{\alpha_j}\cdot a_{k_1k_2}\,z_1^{m_{1,k_1}}z_2^{m_{2,k_2}},$$

что приводит к

$$\left|\mathcal{F}^{1-\alpha}f(z_1,z_2)\right| \le C(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{k_2=1}^{\infty}\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}|a_{k_1k_2}|\,m_{1,k_1}\,r_1^{m_{1,k_1}}\right)m_{2,k_2}\,r_2^{m_{2,k_2}}.$$

Затем, внутреннюю сумму разобщим на две суммы

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}|a_{k_1k_2}|\,m_{1,k_1}\,r_1^{m_{1,k_1}} = \sum_{k_1=1}^{k_1^0}+\sum_{k_1=k_1^0+1}^{\infty}. \tag{2.2.2}$$

Для конечной суммы в (2.2.2) можем найти $r_1^0 < 1$ такой, что

$$(1-r_1)\sum_{k_1=1}^{k_1^0} |a_{k_1k_2}|\, m_{1,k_1}\, r_1^{m_{1,k_1}} < \varepsilon \qquad \text{для всех} \qquad r_1 \in (r_1^0, 1). \tag{2.2.3}$$

Последнюю сумму в (2.2.2) можем оценить следующим образом. Как легко видеть,

$$m_{1,k_1+1} \le \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1}(m_{1,k_1+1} - m_{1,k_1}).$$

Следовательно,

$$m_{1,k_1+1} r_1^{m_{1,k_1+1}} \le \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1}\left[r_1^{1+m_{1,k_1}} + r_1^{2+m_{1,k_1}} + \cdots + r_1^{m_{1,k_1+1}}\right].$$

Отсюда

$$\sum_{k_1=k_1^0+1}^{\infty} |a_{k_1k_2}|\, m_{1,k_1}\, r_1^{m_{1,k_1}} < \varepsilon \frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}\sum_{k_1=1}^{\infty} r_1^{k_1} = \varepsilon\, C(\lambda_1)\frac{1}{1-r_1}. \tag{2.2.4}$$

Совмещая (2.2.2)–(2.2.4), получаем, что для всех $r_1 \in (r_1^0, 1)$

$$(1-r_1)M_\infty\big(\mathcal{F}^{1-\alpha} f; r_1, r_2\big) \le \varepsilon\, C(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1)\sum_{k_2=1}^{\infty} m_{2,k_2}\, r_2^{m_{2,k_2}}.$$

Поэтому

$$(1-r_1)M_\infty\big(\mathcal{F}^{1-\alpha} f; r_1, r_2\big) = o(1) \qquad \text{при} \qquad r_1 \to 1-.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$(1-r_2)M_\infty\big(\mathcal{F}^{1-\alpha} f; r_1, r_2\big) = o(1) \qquad \text{при} \qquad r_2 \to 1-.$$

Таким образом, $\mathcal{F}^{1-\alpha} f \in H_0(\infty, 1)$.

Поскольку оператор Адамара обратим, мы можем теперь дважды применить правило дробного интегродифференцирования в пространствах со смешанной нормой (см. [91, Теор.6]) по каждой переменной r_1 и r_2, и в итоге получить

$$f(z) = \mathcal{F}^{\alpha-1}\mathcal{F}^{1-\alpha} f(z) \in H_0(\infty, 1 + (\alpha - 1)) = H_0(\infty, \alpha).$$

Это завершает доказательство Теоремы 32. ■

2.3 Лакунарные ряды в пространствах Бесова, Харди–Соболева и со смешанной нормой

Прежде чем приступить к изучению лакунарных рядов в пространствах Бесова и пространствах со смешанной нормой, докажем две полезные леммы, необходимые для последующих оценок.

Большая часть оценок, содержащихся в нижеследующей лемме доказана Литтлвудом [145, с.93–96], см. также [43], [62, с.14]. Подобные неравенства обычно доказываются оценками роста тейлоровских коэффициентов, установленными Фабером и Литтлвудом, см. [145, с.93–96], [15, Гл.5,Теор.2.31].

Ниже приведем прямое и элементарное доказательство оценок Литтлвуда.

Лемма 30 *Для α, $\beta \in \mathbb{R}$ положим*

$$J_{\alpha,\beta} = J_{\alpha,\beta}(r) := \int_{-\pi}^{\pi} \left|1 - re^{i\theta}\right|^{-\alpha-1} \left|\log \frac{e}{1 - re^{i\theta}}\right|^{-\beta} d\theta.$$

Тогда для всех $0 \le r < 1$

$$J_{\alpha,\beta} \approx \begin{cases} (1-r)^{-\alpha} \left(\log \dfrac{e}{1-r}\right)^{-\beta}, & \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}, \\ 1, & \alpha < 0,\ \beta \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

$$J_{0,\beta} \approx \begin{cases} \left(\log \dfrac{e}{1-r}\right)^{1-\beta}, & \beta < 1, \\ 1, & \beta > 1, \\ \log \left(e \log \dfrac{e}{1-r}\right), & \beta = 1, \end{cases} \tag{2.3.2}$$

где участвующие постоянные $C = C(\alpha, \beta) > 0$ зависят только от α, β.

Доказательство. Достаточно доказать все оценки только для всех r, достаточно близких к 1, или же для всех $z \in \mathbb{D}$, лежащих в некоторой малой окрестности 1.

Выражение

$$\left|1 - re^{i\theta}\right| = \sqrt{(1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

допускает простые оценки

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - r + 2\sqrt{r} \frac{|\theta|}{\pi}\right) \le \left|1 - re^{i\theta}\right| \le 1 - r + |\theta|, \qquad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

в частности,

$$\frac{1}{\pi}(1 - r + |\theta|) \le \left|1 - re^{i\theta}\right| \le 1 - r + |\theta|, \qquad \frac{1}{2} \le r < 1. \tag{2.3.3}$$

Определим кольцевой сектор

$$E := \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} :\ \frac{9}{10} < r < 1,\ |\theta| < \frac{1}{2} \right\},$$

так что $|1 - z| < \dfrac{1}{2}$ $(z \in E)$, и справедливы следующие неравенства

$$\left|\log \frac{1}{1-z}\right| \le \log \frac{1}{|1-z|} + \frac{\pi}{2} \le 5 \log \frac{1}{|1-z|}, \qquad z \in E, \tag{2.3.4}$$

$$\left|\log \frac{1}{1-z}\right| \ge \log \frac{1}{|1-z|} \ge \log \frac{1}{1 - r + |\theta|} \ge \log \frac{5}{3} > \frac{1}{2}, \qquad z \in E. \tag{2.3.5}$$

Везде ниже полагая $\dfrac{9}{10} < r < 1$ и $\alpha > 0$, начнем с доказательства первой оценки из (2.3.1).

Согласно оценкам (2.3.3)–(2.3.5) получаем

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha,\beta} &= \left(\int_{|\theta|>1/2} + \int_{|\theta|<1/2}\right) \frac{d\theta}{\left|1 - re^{i\theta}\right|^{\alpha+1} \left|\log \frac{e}{1-re^{i\theta}}\right|^{\beta}} \\
&\asymp C(\alpha,\beta) + C(\alpha,\beta) \int_0^{1/2} \frac{d\theta}{\left(1 - r + \theta\right)^{\alpha+1} \left(\log \frac{1}{1-r+\theta}\right)^{\beta}} \\
&= C(\alpha,\beta) + C(\alpha,\beta) \int\limits_{\log \frac{1}{3/2-r}}^{\log \frac{1}{1-r}} \frac{e^{\alpha t}}{t^{\beta}}\, dt \asymp \int\limits_{1}^{\log \frac{1}{1-r}} \frac{e^{\alpha t}}{t^{\beta}}\, dt.
\end{aligned} \tag{2.3.6}
$$

Здесь мы использовали неравенства

$$
0 < \log \frac{5}{3} < \log \frac{1}{3/2 - r} < \log 2, \qquad \frac{9}{10} < r < 1.
$$

Поскольку по правилу Лопиталя

$$
\int_1^x \frac{e^{\alpha t}}{t^{\beta}} dt \sim \frac{e^x}{\alpha\, x^{\beta}} \qquad \text{при} \qquad x \to +\infty \quad (\alpha > 0),
$$

то заключаем, что

$$
J_{\alpha,\beta} \asymp \frac{e^{\alpha \log \frac{1}{1-r}}}{\left(\log \frac{1}{1-r}\right)^{\beta}} = \frac{1}{(1-r)^{\alpha} \left(\log \frac{1}{1-r}\right)^{\beta}}
$$

для всех r, достаточно близких к 1. Это доказывает первую оценку из (2.3.1).

Вторая оценка из (2.3.1) немедленно следует из (2.3.6).

Перейдем к доказательству (2.3.2), т.е. когда $\alpha = 0$.

Случай $\beta < 1$. Используя оценки (2.3.4), (2.3.5), выводим оценки

$$
\begin{aligned}
J_{0,\beta} &= \int_{|\theta|>1/2} + \int_{|\theta|<1/2} \asymp C_{\beta} + C_{\beta} \int_0^{1/2} \frac{d\theta}{(1 - r + \theta) \left(\log \frac{1}{1-r+\theta}\right)^{\beta}} \\
&= C_{\beta} + C_{\beta} \left[\left(\log \frac{1}{1-r}\right)^{1-\beta} - \left(\log \frac{1}{3/2-r}\right)^{1-\beta} \right] \\
&\asymp \left(\log \frac{1}{1-r}\right)^{1-\beta},
\end{aligned} \tag{2.3.7}
$$

в которых использованы неравенства

$$
0 < \left(\log \frac{5}{3}\right)^{1-\beta} < \left(\log \frac{1}{3/2-r}\right)^{1-\beta} < (\log 2)^{1-\beta} < \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{1-r}\right)^{1-\beta}
$$

для всех $\frac{9}{10} < r < 1$.

Случай $\beta = 1$**.** Ввиду (2.3.4), (2.3.5) получаем, что для всех r, достаточно близких к 1

$$
\begin{aligned}
J_{0,1} &\approx C + C\int_0^{1/2} \frac{d\theta}{(1-r+\theta)\left(\log\frac{1}{1-r+\theta}\right)} \\
&= C + C\left[\log\left(\log\frac{1}{1-r}\right) - \log\left(\log\frac{1}{3/2-r}\right)\right] \\
&\approx \log\left(\log\frac{1}{1-r}\right),
\end{aligned}
\tag{2.3.8}
$$

где использованы неравенства

$$
\log\log\frac{5}{3} < \log\log\frac{1}{3/2-r} < \log\log 2 < 0, \qquad \frac{9}{10} < r < 1.
$$

Случай $\beta > 1$**.** Аналогично (2.3.6), имеем

$$
J_{0,\beta} \approx C_\beta + C\int_{\log\frac{1}{3/2-r}}^{\log\frac{1}{1-r}} \frac{1}{t^\beta}\,dt \approx C_\beta + C\int_1^{\log\frac{1}{1-r}} \frac{1}{t^\beta}\,dt \approx 1. \tag{2.3.9}
$$

Объединяя (2.3.7)–(2.3.9), приходим к (2.3.2). Это завершает доказательство леммы. ■

Определим следующую пробную функцию в единичном круге

$$
F_{b,c}(z) := \left(1-z\right)^{-b}\left(\log\frac{e}{1-z}\right)^{-c}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{2.3.10}
$$

где $b, c \in \mathbb{R}$. Функции $F_{b,c}$ весьма полезны как типичные функции во многих функциональных пространствах, см., например, [43], [62], [80], [91], [94], [95].

Следующая лемма дает точную информацию насчет принадлежности функции $F_{b,c}$ пространствам со смешанной нормой $H(p,q,\alpha)$ и $H_0(p,\infty,\alpha)$.

Лемма 31 *Пусть* $b,\ c \in \mathbb{R},\ 0 < p \le \infty, 0 < q < \infty, \alpha > 0$.
(a) $F_{b,c} \in H(p,q,\alpha)$ *тогда и только тогда, когда* $b < \alpha + \frac{1}{p}, c \in \mathbb{R}$ *или* $b = \alpha + \frac{1}{p}, c > \frac{1}{q}$.
(b) $F_{b,c} \in H(p,\infty,\alpha)$ *тогда и только тогда, когда* $b < \alpha + \frac{1}{p}, c \in \mathbb{R}$ *или* $b = \alpha + \frac{1}{p}, c \ge 0$.
(c) $F_{b,c} \in H_0(p,\infty,\alpha)$ *тогда и только тогда, когда* $b < \alpha + \frac{1}{p}, c \in \mathbb{R}$ *или* $b = \alpha + \frac{1}{p}, c > 0$.

Доказательство. Все импликации следуют из соответствующих оценок Леммы 30,

$$
M_p(F_{b,c}; r) \approx (1-r)^{-b+1/p}\left(\log\frac{e}{1-r}\right)^{-c}, \qquad 0 \le r < 1,
$$

при $1/p < b \le \alpha + 1/p$. ■

Следующая лемма доказана Мательевичем и Павловичем [151].

Лемма 32 *Пусть* $\alpha > 0, p > 0, a_k \geq 0,\ I_k = \{j \in \mathbb{N};\ 2^k \leq j < 2^{k+1}\}, \quad k = 1, 2, \ldots$. *Тогда*

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k\right)^p dr \asymp \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha k}} \left(\sum_{j \in I_k} a_j\right)^p,$$

где вовлеченные постоянные $C = C(p, \alpha)$ *зависят только от* p *и* α.

Лемма 33 *Пусть* $p > 0, a_k \geq 0, N \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\min\{1, N^{p-1}\} \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{N} a_k\right)^p \leq \max\{1, N^{p-1}\} \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right).$$

Лемма 33 есть простое следствие неравенства Гельдера.

Напомним определение оператора $\mathcal{F}^\beta$ дробного интегродифференцирования Адамара порядка $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, для функций, голоморфных в поликруге,

$$\mathcal{F}^\beta f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} (1+k_1)^{\beta_1} \cdots (1+k_n)^{\beta_n} a_{k_1 \ldots k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}, \tag{2.3.11}$$

сравни с (1.2.28), (1.3.3), (1.4.8), (2.1.4), (2.1.6).

В поликруге будем рассматривать лакунарные степенные ряды вида

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} a_{k_1 \ldots k_n} z_1^{m_{1,k_1}} \cdots z_n^{m_{n,k_n}}, \qquad z \in U^n. \tag{2.3.12}$$

Следующие две теоремы, будучи следствиями Теорем 31 и 32, характеризуют лакунарные ряды не только в весовых пространствах Харди $H(p, \infty, \alpha)$ (сравни с Теоремами 31, 32), но и в весовых классах Блоха.

Теорема 33 *Пусть* $\{m_{j,k_j}\}_{k_j=0}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *— произвольные лакунарные последовательности,* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, *и* $f(z)$ *— голоморфная функция в* U^n, *заданная сходящимся лакунарным рядом* (2.3.12). *Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a)	$\mathcal{F}^\beta f(z) \in H(\infty, \infty, \alpha)$;		
(b)	$\mathcal{F}^\beta f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$	*для некоторого*	$p \in (0, \infty)$;
(c)	$\mathcal{F}^\beta f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$	*для всех*	$p \in (0, \infty)$;
(d)	$\sup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \dfrac{\lvert a_k\rvert}{m_{1,k_1}^{\alpha_1-\beta_1} \cdots m_{n,k_n}^{\alpha_n-\beta_n}} < +\infty.$		

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|\mathcal{F}^\beta f\|_{\infty,\infty,\alpha} \asymp \|\mathcal{F}^\beta f\|_{p,\infty,\alpha} \asymp \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|a_k|}{m_{1,k_1}^{\alpha_1-\beta_1} \cdots m_{n,k_n}^{\alpha_n-\beta_n}}.$$

Следующее утверждение является "о-малой" версией Теоремы 33.

Теорема 34 *Пусть* $\{m_{j,k_j}\}_{k_j=0}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *— произвольные лакунарные последовательности,* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, *и* $f(z)$ *— голоморфная функция в* U^n, *заданная сходящимся лакунарным рядом* (2.3.12). *Тогда следующие утверждения равносильны:*

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \mathcal{F}^{\beta} f(z) \in H_0(\infty, \infty, \alpha); & & \\
(b) & \mathcal{F}^{\beta} f(z) \in H_0(p, \infty, \alpha) & \textit{для некоторого} & p \in (0, \infty); \\
(c) & \mathcal{F}^{\beta} f(z) \in H_0(p, \infty, \alpha) & \textit{для всех} & p \in (0, \infty); \\
(d) & \displaystyle\lim_{k_j \to \infty} \frac{a_k}{m_{1,k_1}^{\alpha_1 - \beta_1} \cdots m_{n,k_n}^{\alpha_n - \beta_n}} = 0 & \textit{для каждого} & j \in [1, n].
\end{array}
$$

Доказательство Теорем 33 и 34.

Заметим, что степенное разложение функции $\mathcal{F}^{\beta} f(z)$ также лакунарно,

$$
\mathcal{F}^{\beta} f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} (1 + m_{k_1})^{\beta_1} \cdots (1 + m_{k_n})^{\beta_n} a_k \, z_1^{m_{k_1}} \cdots z_n^{m_{k_n}}.
$$

Поэтому достаточно применить Теоремы 31 и 32 по отношению к функции $\mathcal{F}^{\beta} f(z)$. ■

Замечание. Легко видеть, что Теоремы 33 и 34 покрывают все весовые пространства Блоха и малые пространства Блоха, обобщая и уточняя соответствующие результаты из [39], [40], [96], [205], [206], [235], [242].

Аналогичным образом переходя к дробным производным и первообразным, приходим к следующей теореме, которая, в частности характеризует лакунарные ряды из голоморфных пространств Харди–Соболева [45] и, тем самым, обобщает классическую теорему Пэли (многомерный вариант см. в Теореме 30).

Теорема 35 *Пусть* $\{m_{j,k_j}\}_{k_j=0}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *— произвольные лакунарные последовательности,* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, *и* $f(z)$ *— голоморфная функция в* U^n, *заданная сходящимся лакунарным рядом* (2.3.12). *Тогда для любого* $p \in (0, \infty)$ *функция* $\mathcal{F}^{\beta} f(z)$ *принадлежит классу Харди* $H^p(U^n)$ *в том и только в том случае, когда* $\{m_k^{\beta} a_k\} \in \ell^2$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$
\|\mathcal{F}^{\beta} f\|_{H^p} \approx \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} m_{1,k_1}^{2\beta_1} \cdots m_{n,k_n}^{2\beta_n} |a_k|^2 \right)^{1/2}.
$$

В следующей основной теореме данного раздела мы обобщаем Теорему 31 на все значения $q \in (0, \infty)$, т.е. на пространства со смешанной нормой.

Теорема 36 *Пусть* $\{m_{j,k_j}\}_{k_j=0}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *— произвольные лакунарные последовательности,* $0 < q < \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, *и* $f(z)$ *— голоморфная* *функция в U^n, заданная сходящимся лакунарным рядом* (2.3.12). *Тогда следующие утверждения равносильны:*

$$
\begin{array}{llll}
(a) & f(z) \in H(\infty, q, \alpha); & & \\
(b) & f(z) \in H(p, q, \alpha) & \textit{для некоторого} & p \in (0, \infty); \\
(c) & f(z) \in H(p, q, \alpha) & \textit{для всех} & p \in (0, \infty); \\
(d) & \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\left|a_{k_1 \dots k_n}\right|^q}{m_{k_1}^{\alpha_1 q} \cdots m_{k_n}^{\alpha_n q}} < +\infty. & &
\end{array}
$$

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$
\|f\|_{\infty, q, \alpha} \approx \|f\|_{p, q, \alpha} \approx \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\left|a_{k_1 \dots k_n}\right|^q}{m_{k_1}^{\alpha_1 q} \cdots m_{k_n}^{\alpha_n q}} \right)^{1/q}.
$$

Доказательство. Можем считать, что $n = 2$. Пусть $f(z_1, z_2) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}\, z_1^{m_j} z_2^{n_k}$.

Импликация (a)⇒(b) очевидна в силу элементарного вложения

$$
H(\infty, q, \alpha) \subset H(p, q, \alpha).
$$

Импликация (b)⇒(c) следует из Теоремы 30, которая утверждает, что

$$
M_p(f; r_1, r_2) \approx M_s(f; r_1, r_2) \qquad \text{для любого} \qquad s, 0 < s < \infty.
$$

Для доказательства импликации (c)⇒(d), положим, что $f(z) \in H(2, q, \alpha)$. Тогда по Теореме 30

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{2,q,\alpha}^q &= \int_0^1 \int_0^1 (1 - r)^{\alpha q - 1} \left(\int_{T^2} \left| \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}\, r_1^{m_j} \zeta_1^{m_j} r_2^{n_k} \zeta_2^{n_k} \right|^2 dm_2(\zeta) \right)^{q/2} dr_1 dr_2 \\
&\geq C \int_0^1 \int_0^1 (1 - r)^{\alpha q - 1} \left(\sum_{j,k=0}^{\infty} |a_{jk}|^2\, r_1^{m_j} r_2^{n_k} \right)^{q/2} dr_1 dr_2 \\
&= C \int_0^1 (1 - r_2)^{\alpha_2 q - 1} \int_0^1 (1 - r_1)^{\alpha_1 q - 1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j(r_2) r_1^{m_j} \right)^{q/2} dr_1 dr_2,
\end{aligned}
$$

где $G_j(r_2) := \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|^2\, r_2^{n_k}$. Применяя Леммы 32 и 33, и затем теорему Фубини, получаем

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{p,q,\alpha}^q &\geq C\int_0^1 (1-r_2)^{\alpha_2 q-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{m\alpha_1 q}}\left(\sum_{m_j\in I_m} G_j(r_2)\right)^{q/2} dr_2 \\
&\geq C\int_0^1 (1-r_2)^{\alpha_2 q-1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m_j\in I_m}\frac{1}{m_j^{\alpha_1 q}}\Big(G_j(r_2)\Big)^{q/2} dr_2 \\
&\geq C\int_0^1 (1-r_2)^{\alpha_2 q-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{m_j^{\alpha_1 q}}\Big(G_j(r_2)\Big)^{q/2} dr_2 \\
&= C\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{m_j^{\alpha_1 q}}\int_0^1 (1-r_2)^{\alpha_2 q-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_{jk}|^2\, r_2^{n_k}\right)^{q/2} dr_2 \\
&\geq C\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{m_j^{\alpha_1 q}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{m\alpha_2 q}}\left(\sum_{n_k\in I_m}|a_{jk}|^2\right)^{q/2} \\
&\geq C\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{m_j^{\alpha_1 q}}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n_k\in I_m}\frac{|a_{jk}|^q}{n_k^{\alpha_2 q}}\right) = C\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_{jk}|^q}{m_j^{\alpha_1 q}\, n_k^{\alpha_2 q}},
\end{aligned}
$$

где $C = C(p, q, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2)$.

Переходя к импликации (d)$\Rightarrow$(a), запишем

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\infty,q,\alpha}^q &= \int_0^1\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1}\sup_{\zeta\in T^2}\left|\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}\, r_1^{m_j}\zeta_1^{m_j} r_2^{n_k}\zeta_2^{n_k}\right|^q dr_1 dr_2 \\
&\leq C\int_0^1\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1}\left(\sum_{j,k=0}^{\infty}|a_{jk}|\, r_1^{m_j} r_2^{n_k}\right)^q dr_1 dr_2.
\end{aligned}
$$

Оценивая как выше с использованием Лемм 32 и 33, приходим к искомому неравенству

$$
\|f\|_{\infty,q,\alpha}^q \leq C\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_{jk}|^q}{m_j^{\alpha_1 q}\, n_k^{\alpha_2 q}}.
$$

Это завершает доказательство Теоремы 36. ■

Следующая теорема, будучи следствием Теоремы 36, в то же время обобщает ее и дает характеристику лакунарных рядов в классах Бесова.

Теорема 37 *Пусть* $\left\{m_{j,k_j}\right\}_{k_j=0}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *— произвольные лакунарные последовательности,* $0 < q < \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, *и* $f(z)$ *— голоморфная функция в* U^n*, заданная сходящимся лакунарным рядом* (2.3.12).

Тогда следующие утверждения равносильны:

(a) $\mathcal{F}^\beta f(z) \in H(\infty, q, \alpha)$;

(b) $\mathcal{F}^\beta f(z) \in H(p, q, \alpha)$ *для некоторого* $p \in (0, \infty)$;

(c) $\mathcal{F}^\beta f(z) \in H(p, q, \alpha)$ *для всех* $p \in (0, \infty)$;

(d) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{\left|a_{k_1\ldots k_n}\right|^q}{m_{k_1}^{(\alpha_1-\beta_1)q} \cdots m_{k_n}^{(\alpha_n-\beta_n)q}} < +\infty.$

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|\mathcal{F}^\beta f\|_{\infty,q,\alpha} \approx \|\mathcal{F}^\beta f\|_{p,q,\alpha} \approx \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{\left|a_{k_1\ldots k_n}\right|^q}{m_{k_1}^{(\alpha_1-\beta_1)q} \cdots m_{k_n}^{(\alpha_n-\beta_n)q}}\right)^{1/q}.$$

Замечание. В работах [205] и [242] установлены аналоги Теоремы 36 для весовых пространств Бергмана в единичном круге, шаре и поликруге. В работе [206] установлена равносильность условий (b) и (d) Теоремы 37 в случае обычных производных функций, голоморфных в единичном круге.

Замечание. Теоремы 36 и 37 остаются верными в случае замены дробных производных Адамара на соответствующие частные производные или дробные производные Римана–Лиувилля.

Замечание. Подставляя $\beta - \alpha\,(\beta_j > \alpha_j)$ вместо α, замечаем, что Теорема 37 покрывает все пространства Бесова, и обобщает аналогичные предыдущие результаты [39], [40], [152], [242].

Теперь перейдем к некоторым поточечным оценкам лакунарных рядов.

Хорошо известно (см. вложения (iv) с $p_0 = \infty$ и (iii) с $q_0 = \infty$ Теоремы 40), что произвольная функция $f(z) \in H(p, q, \alpha)$ удовлетворяет поточечной оценке

$$|f(z)| \leq C(p, q, \alpha, n) \frac{\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1 - |z|)^{\alpha+1/p}}, \qquad z \in U^n, \tag{2.3.13}$$

в которой индекс $\alpha + 1/p$ наилучший для произвольных функций. Действительно, вложение $H(p, q, \alpha) \subset H(\infty, \infty, \alpha + 1/p - \varepsilon)$ ложно для любого малого $\varepsilon > 0$. Функция $F_{\alpha+1/p,2/q}(z)$ принадлежит классу $H(p, q, \alpha)$ по Лемме 31, однако $F_{\alpha+1/p,2/q}(z) \notin H(\infty, \infty, \alpha + 1/p - \varepsilon)$.

Следующая теорема показывает, что лакунарные ряды в $H(p, q, \alpha)$ вблизи (топологической) границы поликруга возрастают медленнее, чем произвольные функции из $H(p, q, \alpha)$.

Теорема 38 *Пусть* $0 < p, q \leq \infty$, $\left\{m_{j,k_j}\right\}_{k_j=0}^\infty$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *— произвольные лакунарные последовательности,* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, *и* $f(z)$ *— голоморфная функция класса* $H(p, q, \alpha)$ *в* U^n, *заданная сходящимся лакунарным рядом* (2.3.12). *Тогда*

$$|f(z)| \leq C(\lambda, p, q, \alpha, n) \frac{\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1 - |z|)^{\alpha}}, \qquad z \in U^n, \tag{2.3.14}$$

где индексы α_j *нельзя уменьшить.*

Доказательство. Согласно вложению (iii) Теоремы 40, $H(p,q,\alpha)\subset H(p,\infty,\alpha)$.

Поскольку функция $f\in H(p,\infty,\alpha)$ задана лакунарным рядом, то по Теореме 31

$$(1-|z|)^{\alpha}|f(z)|\leq\|f\|_{\infty,\infty,\alpha}\approx\|f\|_{p,\infty,\alpha}\leq C\|f\|_{p,q,\alpha},\qquad z\in U^n,$$

как и требовалось.

Теперь покажем, что ни один индекс α_j в (2.3.14) не может быть уменьшен. Положим, что найдется некоторый индекс, скажем $\beta_1, 0<\beta_1<\alpha_1$, такой, что для каждого лакунарного ряда $f\in H(p,q,\alpha)$ существует постоянная $C>0$ такая, что

$$|f(z)|\leq\frac{C\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z_1|)^{\beta_1}(1-|z_2|)^{\alpha_2}\dots(1-|z_n|)^{\alpha_n}},\qquad z\in U^n,$$

т.е. $f\in H\big(\infty,\infty,(\beta_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\big)$.

Тогда выбирая мультииндекс $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ такой, что $\beta_1<\gamma_1<\alpha_1$ и $0<\gamma_j<\alpha_j$ для всех $j\in[2,n]$, определим функцию

$$f_0(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n}2^{k_1\gamma_1}\cdots2^{k_n\gamma_n}z_1^{2^{k_1}}\cdots z_n^{2^{k_n}},\qquad z\in U^n.$$

Согласно Теоремам 31 и 36, $f_0(z)\in H(p,q,\alpha)$, но с другой стороны,

$$f_0(z)\notin H\big(\infty,\infty,(\beta_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\big).$$

Это противоречие завершает доказательство Теоремы 38. ■

Хотя индексы α_j в (2.3.14) нельзя уменьшить, но тем не менее, мы можем улучшить оценки (2.3.14) в следующем смысле.

Теорема 39 *Пусть* $\{m_{j,k_j}\}_{k_j=0}^{\infty}\,(j=1,2,\dots,n)$ *— произвольные лакунарные последовательности,* $0<p\leq\infty$, $0<q<\infty$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_j>0$, *и* $f(z)$ *голоморфная функция класса* $H(p,q,\alpha)$ *в* U^n, *заданная сходящимся лакунарным рядом* (2.3.12). *Тогда для каждого* $j\in[1,n]$

$$f(z)=o\left(\frac{1}{(1-|z|)^{\alpha}}\right)\qquad \textit{при}\qquad |z_j|\to1^-. \tag{2.3.15}$$

Доказательство. Согласно вложению (x) Теоремы 40, $f\in H_0(p,\infty,\alpha)$. Теорема 32 утверждает, что принадлежность $f\in H_0(p,\infty,\alpha)$ равносильна $f\in H_0(\infty,\infty,\alpha)$ для лакунарных степенных рядов f, и соотношение (2.3.15) следует. Разумеется индексы α_j в (2.3.15) не могут быть уменьшены ввиду Теоремы 38. ■

Глава 3

Пространства $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой гармонических и n-гармонических функций

В этой главе определены пространства $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой гармонических и n-гармонических функций в поликруге U^n из комплексного векторного пространства $\mathbb{C}^n$ и в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Изучены некоторые специфические свойства, отличающие их от аналогичных пространств голоморфных функций. Далее построены операторы типа Бергмана, которые проектируют пространства $L(p,q,\alpha)$ измеримых функций на их n-гармоническое подпространство $h(p,q,\alpha)$. Аналогичный результат получен для пространств Бесова. В качестве приложения найдены сопряженные пространства $h(p,q,\alpha)$.

Результаты этой главы опубликованы в [254], [257], [259], [269], [280].

3.1 Определение пространств $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой и точные вложения в поликруге

Пусть $U^n = \{z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, 1 \le j \le n\}$ — единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$, и $T^n = \{w = (w_1,\dots,w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j| = 1, 1 \le j \le n\}$ — его остов, n-мерный тор.

Будем рассматривать n-гармонические функции в поликруге U^n, т.е. функции, гармонические по каждой переменной z_j по отдельности. Обозначим через $h(U^n)$ (и $H(U^n)$) множество всех n-гармонических (соотв. голоморфных) функций в U^n. Для измеримой в U^n функции $f(z) = f(rw)$ ее интегральные средние запишем как

$$M_p(f;r) = \left\|f(r\cdot)\right\|_{L^p(T^n;dm_n)}, \quad r = (r_1,\dots,r_n) \in I^n, \quad 0 < p \le \infty,$$

где $I^n = [0,1)^n, dm_n$ — мера Лебега на T^n, нормированная так, чтобы $m_n(T^n) = 1$. Класс n-гармонических (голоморфных) функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{h^p} = \sup_{r\in I^n} M_p(f;r) < +\infty,$$

есть обычное пространство Харди h^p (соотв. H^p).

Квазинормированное пространство $L(p,q,\alpha)\big(0 < p,q \le \infty, \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\big)$ — это множество тех функций $f(z)$, измеримых в поликруге U^n, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\int\limits_{I^n} \prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\alpha_j q-1} M_p^q(f;r) \prod_{j=1}^{n} dr_j\right)^{1/q}, & 0<q<\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{r\in I^n} \prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\alpha_j} M_p(f;r), & q=\infty. \end{cases}$$

Если для каждого $j \in [1,n]$,

$$(1-r)^{\alpha} M_p(u;r) = o(1) \quad \text{при} \quad r_j \to 1^-,$$

то скажем, что n-гармоническая функция $u(z)$ принадлежит малому пространству $h_0(p,\infty,\alpha)$.

Обозначим подпространства $L(p,q,\alpha)$, состоящие из n-гармонических или голоморфных функций,

$$\begin{aligned} h(p,q,\alpha) &= h(U^n)\cap L(p,q,\alpha), \\ H(p,q,\alpha) &= H(U^n)\cap L(p,q,\alpha), \\ H_0(p,\infty,\alpha) &= H(U^n)\cap h_0(p,\infty,\alpha). \end{aligned}$$

Для $p = q < \infty$ пространства $h(p,q,\alpha)$ и $H(p,q,\alpha)$ совпадают с известными весовыми пространствами Бергмана, а при $q = \infty$ получаем весовые пространства Харди. Первые результаты о пространствах со смешанной нормой были получены в классических работах Харди и Литтлвуда [104], [106], [107], которые рассматривали функции, голоморфные в единичном круге $\mathbb{D} = U^1$. Позднее Флетт [88]–[92] существенно усовершенствовал и развил методы [104], [106], [107]. Голоморфные и плюригармонические пространства со смешанной нормой в единичном шаре и более общих ограниченных симметрических областях из $\mathbb{C}^n$ исследованы, например, в [117], [174], [179], [180], [222].

Будем использовать обычные обозначения в $\mathbb{C}^n$:

$$\bar\zeta = (\bar\zeta_1,\dots,\bar\zeta_n), \quad r\zeta = (r_1\zeta_1,\dots,r_n\zeta_n), \quad dr = dr_1\cdots dr_n, \quad (1-|\zeta|^2)^{\alpha} = \prod_{j=1}^{n}(1-|\zeta_j|^2)^{\alpha_j},$$

$$\Gamma(\alpha+|k|) = \prod_{j=1}^{n}\Gamma(\alpha_j+|k_j|) \quad \text{для} \quad \zeta\in\mathbb{C}^n, \quad r\in I^n, \quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\ k=(k_1,\dots,k_n).$$

Символ dm_{2n} будет обозначать меру Лебега на поликруге U^n, нормированную условием $m_{2n}(U^n) = 1$.

Вложения пространств $h(p,q,\alpha)$ представим в виде следующей таблицы.

Теорема 40 *Пусть* $0 < p, q \leq \infty, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \alpha_j,\ \beta_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$. *Тогда следующие вложения непрерывны:*

$$\begin{array}{rll}
(i) & h(p,q,\alpha) \subset h(p,q,\beta), & \beta_j \geq \alpha_j\ (1 \leq j \leq n),\\
(ii) & h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\alpha), & 0 < p_0 < p \leq \infty,\\
(iii) & h(p,q,\alpha) \subset h(p,q_0,\alpha), & 0 < q < q_0 \leq \infty,\\
(iv) & h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\beta), & \beta_j \geq \alpha_j + 1/p - 1/p_0,\ p \leq p_0 \leq \infty,\\
(v) & h(p,q,\alpha) \subset h(\infty,q_0,\beta), & \beta_j > \alpha_j + 1/p,\ 0 < q_0 \leq \infty,\\
(vi) & h(p,q,\alpha) \subset h(p,q_0,\beta), & \beta_j > \alpha_j,\ 0 < q_0 \leq \infty,\\
(vii) & H^p \subset H(p_0,q,1/p - 1/p_0), & 0 < p < p_0 \leq \infty,\ p \leq q \leq \infty,\\
(viii) & h^p \subset h(p_0,q,1/p - 1/p_0), & 1 \leq p < p_0 \leq \infty,\ p \leq q \leq \infty,\\
(ix) & h^p \subset h(p_0,q,\beta), & \beta_j > 1/p - 1/p_0,\ 0 < p < p_0 \leq \infty.\\
(x) & \textit{Если} \quad u \in h(p,q,\alpha),\ 0 < q < \infty, & \textit{то} \quad u \in h_0(p,\infty,\alpha).
\end{array}$$

Доказательство Теоремы 40.

Во-первых, заметим, что пространства $h(p,q,\alpha)$ тривиальны, если хотя бы одна компонента $\alpha_j < -1$. Точный результат содержится ниже в Лемме 36.

Большая часть вложений (i)-(x) данной теоремы известна для функций, голоморфных в единичном круге, см. [91].

Для n-гармонических функций $u(z)$ возникают трудности ввиду отсутствия n-субгармоничности функции $|u|^p$ $(0 < p < 1)$. Без ограничения общности и для упрощения записи можем считать, что $n = 2$.

Доказательство (iii). Начнем с доказательства случая $q_0 = \infty$ и покажем, что

$$h(p,q,\alpha) \subset h(p,\infty,\alpha). \tag{3.1.1}$$

Заметим, что для $p \geq 1$ или для голоморфных функций вложение (3.1.1) элементарно ввиду монотонности интегральных средних $M_p(u;r)$ по каждой радиальной переменной r_j. Поэтому докажем случай $0 < p < 1$, хотя нижеприведенное доказательство справедливо для всех $0 < p \leq \infty$. Возьмем произвольную функцию $u \in h(p,q,\alpha)$ и зафиксируем точку $z = (z_1, z_2) = (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \in U^2$. Для этой точки z и бикруга

$$B_z = B_{z_1} \times B_{z_2}, \quad \text{где} \quad B_{z_j} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta_j - z_j| < (1 - r_j)/2\}, \quad j = 1, 2,$$

запишем неравенство Харди–Литтлвуда (см. [4], [85]) о субгармоничном поведении функции $|u|^p$:

$$|u(z_1, z_2)|^p \leq \frac{C_p}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2} \iint\limits_{B_{z_1} \times B_{z_2}} |u(\zeta_1, \zeta_2)|^p dm_2(\zeta_1) dm_2(\zeta_2). \tag{3.1.2}$$

Если $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in B_z$, то $\rho_j' < |\zeta_j| = \rho_j < \rho_j''$, $j = 1, 2$, где $\rho_j' = \max\left\{0, \frac{3r_j - 1}{2}\right\}$, $\rho_j'' = \frac{1+r_j}{2}$. Следовательно

$$\frac{1}{2}(1 - r_j) < 1 - |\zeta_j| < \frac{3}{2}(1 - r_j), \qquad j = 1, 2. \tag{3.1.3}$$

Из (3.1.2), (3.1.3) и элементарного неравенства $|1-\zeta_j\bar{z}_j| < 3(1-|\zeta_j|), \quad |z_j|<1,\ \zeta_j \in B_{z_j}$, мы получаем

$$|u(r_1e^{i\theta_1}, r_2e^{i\theta_2})|^p \le C_p \int_{B_{z_1}} \int_{B_{z_2}} |u(\zeta_1,\zeta_2)|^p \frac{dm_2(\zeta_1)}{|1-\zeta_1\bar{z}_1|^2} \frac{dm_2(\zeta_2)}{|1-\zeta_2\bar{z}_2|^2}. \tag{3.1.4}$$

Затем расширим область интегрирования в (3.1.4) до колец $\rho_j' < |\zeta_j| < \rho_j''$ $(j=1,2)$ и далее проинтегрируем по тору T^2:

$$M_p^p(u;r_1,r_2) \le \frac{C_p}{(1-r_1)(1-r_2)} \int_{\rho_1'}^{\rho_1''} \int_{\rho_2'}^{\rho_2''} M_p^p(u;\rho_1,\rho_2)d\rho_1 d\rho_2.$$

Если $0<p<q<\infty$, то по неравенству Гельдера с индексами q/p и $q/(q-p)$

$$\prod_{j=1}^2 (1-r_j)^{\alpha_j q} M_p^q(u;r) \le C \int_{\rho_1'}^{\rho_1''} \int_{\rho_2'}^{\rho_2''} \prod_{j=1}^2 (1-\rho_j)^{\alpha_j q - 1} M_p^q(u;\rho)d\rho_1 d\rho_2, \tag{3.1.5}$$

и поэтому $(1-r)^\alpha M_p(u;r) \le C(p,q,\alpha)\|u\|_{p,q,\alpha}, \quad r\in I^2$.

Если же $0<q\le p\le\infty$, то запишем (3.1.4) с индексом q вместо p, и применим интегральное неравенство Минковского с показателем $p/q \ge 1$:

$$M_p^q(u;r_1,r_2) \le \frac{C_q}{(1-r_1)(1-r_2)} \int_{\rho_1'}^{\rho_1''} \int_{\rho_2'}^{\rho_2''} M_p^q(u;\rho_1,\rho_2)d\rho_1 d\rho_2.$$

Отсюда (3.1.5) следует. Таким образом, в обоих случаях вложение (3.1.1) непрерывно.

Общий случай в (iii) сводится к (3.1.1). Действительно, пусть $0<q<q_0<\infty$. Тогда по (3.1.1)

$$\|u\|_{p,q_0,\alpha}^{q_0} \le \|u\|_{p,\infty,\alpha}^{q_0-q} \|u\|_{p,q,\alpha}^q \le C\|u\|_{p,q,\alpha}^{q_0-q}\|u\|_{p,q,\alpha}^q = C\|u\|_{p,q,\alpha}^{q_0}.$$

Таким образом, вложение (iii) доказано.

Неравенство (3.1.5) ведет также к утверждению (x) Теоремы 40.

Доказательство (iv). На самом деле условие $\beta_j + 1/p_0 \ge \alpha_j + 1/p$ является не только достаточным для вложения $h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\beta)$, но и необходимым. Это следует из следующей леммы.

Лемма 34 *Для $0<p\le p_0\le\infty$, $\alpha_j>0$ вложение $h(p,q,\alpha)\subset h(p_0,q,\beta)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\beta_j + 1/p_0 \ge \alpha_j + 1/p\,(1\le j\le n)$.*

Доказательство. Пусть $\beta_j + 1/p_0 = \alpha_j + 1/p\,(1\le j\le 2)$, и докажем сперва случай $p_0=\infty$, т.е.

$$h(p,q,\alpha) \subset h(\infty,q,\alpha+1/p). \tag{3.1.6}$$

Если $0<p<q<\infty$, то из (3.1.2)–(3.1.3) следует, что для любого $r=(r_1,r_2)\in I^2$

$$M_\infty^q(u;r) \le \frac{C(p,q)}{\prod_{j=1}^2(1-r_j)^{q/p}} \left(\int_{\rho_1'}^{\rho_1''} \int_{\rho_2'}^{\rho_2''} M_p^p(u;\rho) \frac{d\rho_1 d\rho_2}{\prod_{j=1}^2 (1-\rho_j)} \right)^{q/p}.$$

Применяя неравенство Гельдера с индексами q/p, $1/(1-p/q)$, интегрируя по I^2 и затем меняя порядок интегрирования, мы получаем $\|u\|^q_{\infty,q,\alpha+1/p} \le C(p,q,\alpha)\|u\|^q_{p,q,\alpha}$.

Если же $0 < q \le p \le \infty$, то используем неравенство (3.1.2) с индексом q вместо p. Тот же метод как выше приводит к (3.1.6).

Таким образом, вложение (iv) доказано в двух предельных случаях $p_0 = \infty$ и $p_0 = p$. Для остальных значений $p_0 \in [p, \infty]$ вложение (iv) следует из версии интерполяционной теоремы Рисса–Торина для квазинормированных пространств, см. [112], [46].

Обратно, пусть существует индекс $j \in [1, n]$, скажем $j = 1$, такой, что $\beta_1 + 1/p_0 < \alpha_1 + 1/p$. Для произвольной точки $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U^n$ и мультииндекса $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_j > \max\{\beta_j + 1/p_0, \alpha_j + 1/p\}$, $1 \le j \le n$, определим функцию $f_{\gamma,a}(z) = 1/(1 - \bar{a}z)^\gamma$. Простая оценка показывает, что

$$\frac{\|f_{\gamma,a}\|_{p_0,q,\beta}}{\|f_{\gamma,a}\|_{p,q,\alpha}} \approx (1-|a|)^{(\beta+1/p_0)-(\alpha+1/p)}.$$

Устремляя $|a_1| \to 1$, мы приходим к противоречию с $h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\beta)$. Доказательство Леммы 34 и вложения (iv) завершено.

Доказательства (v) и (vi) получаются из (iii) и вложения $h(p,q,\alpha) \subset h(\infty,\infty,\alpha + 1/p)$, которое содержится в (iv).

Доказательство (vii) можно найти в статье Фразье [94], а **доказательство вложения (viii)** следует из [94] ввиду n-субгармоничности функции $|u|^p$, $p \ge 1$.

Наконец, **вложение (ix)** есть комбинация (vi) и (iv). Действительно, для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, имеем $h^p \subset h(p,q,\alpha) \subset h\left(p_0, q, \alpha + 1/p - 1/p_0\right)$.

Доказательство Теоремы 40 завершено. ■

Замечание. Для голоморфных пространств Бергмана в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ утверждение Леммы 34 можно найти в [119]. Вложение (ix) для $n = 1, 0 < p < 1, p_0 = q = 1$ доказано Дюреном и Шилдсом [82], которые показали также, что предельный случай $h^p \subset h(1,1,1/p-1)$ не имеет места.

Специфические свойства пространств $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой в поликруге при $\alpha_j \le 0$

В отличие от голоморфных пространств $H(p,q,\alpha)$, пространства $h(p,q,\alpha)$ при $0 < p < 1$ обладают необычным свойством: они не являются тривиальными при некоторых мультииндексах $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с неположительными $\alpha_j \le 0$. Этот феномен для весовых классов Харди $h(p,\infty,\alpha)$ в шаре из $\mathbb{R}^n$ был замечен в [2], [159], [160].

Ядро Пуассона в поликруге

$$P(z) = \prod_{j=1}^n P(z_j) = \prod_{j=1}^n \frac{1-|z_j|^2}{|1-z_j|^2}$$

является хорошим примером нетривиальной функции из $h(p,q,\alpha)$ с $\alpha_j \le 0$. Точные условия представлены в следующей лемме.

Лемма 35 *При* $0 < p \le \infty, 0 < q < \infty, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_j \in \mathbb{R}$

(a) $P(z) \in h(p,q,\alpha)$ *тогда и только тогда* $\alpha_j > \max\{-1, 1-1/p\},\ 1 \le j \le n.$

(b) $P(z) \in h(p,\infty,\alpha)$ *для* $p \ne \frac{1}{2}$ *тогда и только тогда* $\alpha_j \ge \max\left\{-1, 1-\frac{1}{p}\right\}.$

(c) $P(z) \in h\left(\frac{1}{2},\infty,\alpha\right)$ *тогда и только тогда* $\alpha_j > -1,\ 1 \le j \le n.$

Доказательство. Результат непосредственно следует из двусторонних оценок ядра Пуассона

$$M_p(P;r) \approx \prod_{j=1}^{n} (1-r_j)^{\min\{1,1/p-1\}}, \qquad p \ne \frac{1}{2}, \qquad r \in I^n,$$

$$M_{1/2}(P;r) \approx \prod_{j=1}^{n} (1-r_j)\left(\log \frac{e}{1-r_j}\right)^2, \qquad r \in I^n.$$

■

Пространства $h(p,q,\alpha)$, тем не менее, становятся тривиальными, т.е. состоящими только из нулевой функции, если хотя бы одна компонента α_j меньше, чем -1. Точный результат содержится в следующей лемме.

Лемма 36 *(a)* $H(p,q,\alpha) = \{0\}$, *если имеет место одно из следующих условий:*
- $0 < p \le \infty, 0 < q < \infty$, *и существует* $j \in [1,n]$ *такой, что* $\alpha_j \le 0$;
- $0 < p \le \infty, 0 < q \le \infty$, *и существует* $j \in [1,n]$ *такой, что* $\alpha_j < 0$.

(b) $h(p,q,\alpha) = \{0\}$, *если имеет место одно из следующих условий:*
- $1 \le p \le \infty, 0 < q < \infty$, *и существует* $j \in [1,n]$ *такой, что* $\alpha_j \le 0$;
- $1 \le p \le \infty, 0 < q \le \infty$, *и существует* $j \in [1,n]$ *такой, что* $\alpha_j < 0$;
- $0 < p \le 1, 0 < q < \infty$, *и существует* $j \in [1,n]$ *такой, что* $\alpha_j \le \max\left\{-1, 1-\frac{1}{p}\right\}$;
- $p = 1/2,\ 0 < q \le \infty$, *и существует* $j \in [1,n]$ *такой, что* $\alpha_j \le -1$;
- $0 < p \le 1, 0 < q \le \infty$, *и существует* $j \in [1,n]$ *такой, что* $\alpha_j < \max\left\{-1, 1-\frac{1}{p}\right\}$.

Доказательство. Проиллюстрируем лишь доказательство последнего типичного случая. Пусть $u \in h(p,q,\alpha)$ для $0 < p < 1/2$, $0 < q \le \infty$, и существует компонента α_j, меньшая, чем -1, скажем $\alpha_1 < -1$. Согласно вложениям (vi) и (x) Теоремы 40

$$h(p,q,\alpha) \subset h(p,1,-1) \quad \text{и} \quad (1-r_1)^{-1} M_p(u;r_1) = o(1) \quad \text{при} \quad r_1 \to 1- .$$

Как следует из результата Александрова [2, Теор.2.11], $u \equiv 0$. ■

Точность вложений пространств $h(p,q,\alpha)$ в поликруге и обобщение контрпримера Харди–Литтлвуда

Харди и Литтлвуд в [105, с.416] определили следующую важную функцию

$$f(z) := \frac{e^{i\pi m/2}}{(1-z)^{1/p}}, \qquad p = \frac{1}{m+1},\ m \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.1.7}$$

в качестве примера голоморфной в $\mathbb{D}$ функции, чья вещественная часть принадлежит гармоническому классу Харди $h^p(\mathbb{D})$, $0 < p < 1$, но $f(z) \notin H^p(\mathbb{D})$, и более того,

$$M_p^p(f;r) \approx \log \frac{e}{1-r} \qquad \text{для всех} \qquad 0 \le r < 1.$$

Позднее, Дюрен и Шилдс [82, с.257] применили пример Харди–Литтлвуда (3.1.7) чтобы доказать ложность вложения

$$h^p \subset h(1,1,1/p-1), \qquad 0 < p < 1, \tag{3.1.8}$$

в единичном круге $\mathbb{D}$. Для соответствующей версии (3.1.8) в поликруге, см. [154, с.140]. В следующей теореме мы обобщим результат Дюрена и Шилдса.

Теорема 41 *Пусть* $0 < p < 1$, $p < p_0 \le \infty$, $\beta_j > \frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}$ *для всех* $j \in [2,n]$. *Тогда вложение*

$$h^p \subset h\left(p_0, \infty, \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}, \beta_2, \dots, \beta_n\right)\right) \tag{3.1.9}$$

ложно по меньшей мере для $p = \frac{1}{m+1}$, $m = 1, 2, \dots$. *Вложение*

$$h^p \subset h\left(p_0, q, \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}, \beta_2, \dots, \beta_n\right)\right) \tag{3.1.10}$$

ложно для $p = \frac{1}{m+1}$ $(m = 1, 2, \dots)$ *и каждого* $q, 0 < q \le \infty$.

Доказательство. Ввиду вложения (iii) Теоремы 40 достаточно доказать ложность вложения (3.1.9). Определим функции

$$g(z_1, \dots, z_n) := \frac{e^{i\pi(m+1)/2}}{(1-z_1)^{1/p}} \log \frac{1}{1-z_1}, \qquad z \in U^n,$$
$$u(z_1, \dots, z_n) := \operatorname{Re} g(z_1, \dots, z_n), \qquad z \in U^n,$$

которые являются модификациями (3.1.7). По Лемме 31 легко видеть, что

$$|g(z)| = |F_{1/p,-1}(z_1)| \qquad \text{и} \qquad g(z) \notin H\left(p_0, \infty, \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}, \beta_2, \dots, \beta_n\right)\right).$$

Тогда $u(z) \notin h\Big(p_0, \infty, (\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}, \beta_2, \dots, \beta_n)\Big)$ поскольку оператор плюригармонического сопряжения ограничен в пространствах $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой на поликруге, см., например, [179], [222], [269] и Главу 7 настоящей работы. С другой стороны, полагая $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, мы получаем

$$|u(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})| = \left| \operatorname{Re} \frac{e^{i\pi(m+1)/2}}{(1-e^{i\theta_1})^{1/p}} \log \frac{1}{1-e^{i\theta_1}} \right| =$$

$$= \frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta_1}{2}\right|^{m+1}}\left|\cos\frac{\theta_1(m+1)}{2}\log|1-e^{i\theta_1}| + \sin\frac{\theta_1(m+1)}{2}\arg(1-e^{i\theta_1})\right|.$$

Следовательно,

$$|u(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n})| \le \frac{C_m}{|\theta_1|^m} = \frac{C_p}{|\theta_1|^{1/p-1}}, \qquad e^{i\theta}\in T^n,$$

поэтому $u(z)\in h^p(U^n)$. Таким образом, ложность вложения (3.1.9) доказана. ■

Замечание. Заметим, что функция Харди и Литтлвуда (3.1.7) недостаточна для доказательства ложности вложения $h^p\subset h\big(p_0,\infty,\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}\big)$. Фактически, Теорема (41) показывает, что вложение (ix) Теоремы 40 точно в том смысле, что никакой другой выбор компонентов β_j недопустим.

Замечание. Остается открытым вопрос ложности вложений (3.1.9) и (3.1.10) для значений $p\in(0,1)$, отличных от $p=\frac{1}{m+1}$ $(m=1,2,\dots)$.

Перейдем к вопросу о точности основного результата настоящего раздела (Теоремы 40), т.е. о точности вложений пространств $h(p,q,\alpha)$.

Теорема 42 *Пусть* $0<p,q\le\infty$, $\alpha_j>0$, $1\le j\le n$. *Тогда нижеследующие непрерывные вложения из Теоремы 40 строги и точны в определенном смысле, а именно в том смысле, что заявленные значения индексов нельзя улучшить.*

(i)	$h(p,q,\alpha)\subset h(p,q,\beta)$,	$\beta_j\ge\alpha_j$ $(1\le j\le n)$,
(ii)	$h(p,q,\alpha)\subset h(p_0,q,\alpha)$,	$0<p_0<p\le\infty$,
(iii)	$h(p,q,\alpha)\subset h(p,q_0,\alpha)$,	$0<q<q_0\le\infty$,
(iv)	$h(p,q,\alpha)\subset h(p_0,q,\beta)$,	$\beta_j\ge\alpha_j+1/p-1/p_0$, $p\le p_0\le\infty$,
(v)	$h(p,q,\alpha)\subset h(\infty,q_0,\beta)$,	$\beta_j>\alpha_j+1/p$, $0<q_0\le\infty$,
(vi)	$h(p,q,\alpha)\subset h(p,q_0,\beta)$,	$\beta_j>\alpha_j$, $0<q_0\le\infty$,
(vii)	$H^p\subset H(p_0,q,1/p-1/p_0)$,	$0<p<p_0\le\infty$, $p\le q\le\infty$,
(viii)	$h^p\subset h(p_0,q,1/p-1/p_0)$,	$1\le p<p_0\le\infty$, $p\le q\le\infty$,
(ix)	$h^p\subset h(p_0,q,\beta)$,	$\beta_j>1/p-1/p_0$, $0<p<p_0\le\infty$.
(x)	*Если* $u\in h(p,q,\alpha)$, $0<q<\infty$,	*то* $u\in h_0(p,\infty,\alpha)$.

Доказательство.
(i) Вложение (i) строго, если $\beta_j>\alpha_j$ для какого-либо j, скажем $\beta_1>\alpha_1$. Действительно, по Лемме 31 голоморфная функция $F_{\alpha+1/p,0}(z)$ принадлежит классу $h(p,q,\beta)$, но не $h(p,q,\alpha)$, $0<p\le\infty, 0<q<\infty$. Также, функция $F_{\beta+1/p,0}(z)$ принадлежит $h(p,\infty,\beta)$, но не $h(p,\infty,\alpha)$, $0<p\le\infty$.

(ii) Строгость (ii) доказывается примерами $F_{\alpha+1/p,0}(z)$ для $0<q<\infty$, и $F_{\alpha+1/p_0,0}(z)$ для $q=\infty$.

(iii) Строгость вложения (iii) доказывается примерами $F_{\alpha+1/p,0}(z)$ для параметра $q_0=\infty$, и $F_{\alpha+1/p,1/q}(z)$ для $0<q<q_0<\infty$.

Также, вложения (i)-(iii), очевидно, точны в том смысле, что мы не можем взять любые другие значения β_j,p_0 или q_0.

(iv) Точность вложения (iv) в наиболее строгой форме доказана в Лемме 34. Именно, условие $\beta_j \geq \alpha_j + 1/p - 1/p_0$ $(1 \leq j \leq n)$ необходимо и достаточно для вложения (iv). Строгость вложения (iv) доказывается примером

$$f_1(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} k_1 \cdots k_n 2^{k_1\alpha_1} \cdots 2^{k_n\alpha_n} z_1^{2^{k_1}} \cdots z_n^{2^{k_n}}, \qquad z \in U^n,$$

который принадлежит $H(p, q, \alpha)$, но не $H(p_0, q, \alpha + 1/p - 1/p_0)$, согласно Теоремам 36 и 31.

(v)–(vi) Вложения (v) и (vi) строги ввиду примеров $f_1(z)$ или $F_{\alpha+1/p,0}(z)$. С другой стороны, вложения (v) и (vi) точны для $q_0 < q$ в том смысле, что никакой другой выбор компонентов β_j недопустим. Функция $F_{\alpha+1/p,1/q_0}(z)$ дает пригодный пример.

(vii)–(ix) Строгость вложений (vii)–(ix) можно доказать примером

$$f_2(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} z_1^{2^{k_1}} \cdots z_n^{2^{k_n}}, \qquad z \in U^n.$$

Вложения (vii) и (viii) точны в том смысле, что условие $p \leq q$ существенно, т.е. для $p > q$ вложения (vii) и (viii) ложны. Соответствующий пример предоставляется функцией $F_{1/p,\lambda}(z)$, где $1/p < \lambda < 1/q$. Действительно, $F_{1/p,\lambda}(z)$ принадлежит H^p, но не $H(p_0, q, 1/p - 1/p_0)$, согласно Лемме 31.

С другой стороны, вложения (viii) и (ix) точны в том смысле, что параметр p в (viii) не может быть уменьшен и никакой другой выбор компонентов β_j в (ix) недопустим, согласно Теореме 39.

(x) Строгость вложения (x) следует ввиду примера $F_{\alpha+1/p,1/q}(z)$. Действительно, по Лемме 31 $F_{\alpha+1/p,1/q}(z) \in H_0(p, \infty, \alpha)$, но $F_{\alpha+1/p,1/q}(z) \notin H(p, q, \alpha)$.

Точность вложения (x) понимается в том смысле, что ни одна компонента α_j не может быть уменьшена. Именно, вложение

$$h\big(p, q, (\alpha_1, \alpha_2)\big) \subset h_0\big(p, \infty, (\alpha_1 - \varepsilon, \alpha_2)\big)$$

ложно для любых $0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty, 0 < \varepsilon < \alpha$. Функция $F_{\alpha+1/p-\varepsilon/2,0}(z)$ дает соотвтствующий пример. ■

3.2 Интегральные представления и проекции Бергмана пространств $h(p, q, \alpha)$ и Бесова. Сопряженные пространства $h(p, q, \alpha)$ в поликруге

В этом разделе мы исследуем в основном операторы типа Бергмана и воспроизводящие интегральные формулы n-гармонических функций в единичном поликруге $U^n \subset \mathbb{C}^n$. Ограниченность проекторов и других операторов типа Бергмана получена в пространствах $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой и пространствах Бесова.

Вначале в Теореме 43 воспроизводящая интегральная формула типа Пуассона–Бергмана установлена для n-гармонических функций из $h(p, q, \alpha)$. Соответствующие интегральные операторы $T_{\beta,\lambda}$, $\widetilde{T}_{\beta,\lambda}$, $S_{\beta,\lambda}$, $\widetilde{S}_{\beta,\lambda}$ типа Бергмана построены на основе дробных операторов интегродифференцирования и воспроизводящих ядер типа

Пуассона. В Теореме 44 типа Форелли–Рудина, для заданных $1 \le p, q < \infty$ мы находим необходимое и достаточное условие для того, чтобы оператор $T_{\beta,0}$ стал ограниченным проектором из $L(p,q,\alpha)$ на $h(p,q,\alpha)$, а также, чтобы оператор $T_{\beta,\lambda}$ стал ограниченным в $L(p,q,\alpha)$. Обычным способом доказательства ограниченности проекторов является использование теста Шура, см., например, [110]. Вместо этого, мы используем версию неравенства Харди в высших размерностях и приводим короткое элементарное доказательство проекционных теорем. Далее, операторы типа Бергмана можно рассматривать на других функциональных пространствах. В Теореме 45 рассмотрено действие операторов $T_{\beta,0}$ и $\widetilde{T}_{\beta,0}$ на пространствах $L(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой для мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с неположительными $\alpha_j \le 0$. Оказывается, что образом пространства $L(p,q,\alpha)$ с $\alpha_j \le 0$ при действии операторов $T_{\beta,0}$ и $\widetilde{T}_{\beta,0}$ является пространство Бесова $h\Lambda^{p,q}_{\alpha}$ n-гармонических функций. С другой стороны, известно, что проекция Бергмана сохраняет классы Липшица в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$ и в строго псевдовыпуклых областях из $\mathbb{C}^n$ (см. [187], [142], [77]). Естественно поставить вопрос: верно ли это свойство для более общих пространств Бесова? В Теореме 46 мы обобщаем это свойство сохранения на пространства Бесова при действии оператора типа Бергмана, который ограниченно проектирует пространство Бесова $\Lambda^{p,q}_{\alpha}$ на его n-гармоническое подпространство $h\Lambda^{p,q}_{\alpha}$. Теорема 46 кажется новым результатом даже в одномерном случае. Наконец, в качестве применения мы доказываем в Теореме 47 результат о двойственности пространств $h(p,q,\alpha)$.

Заметим, что много частных результатов этих теорем хорошо известны для голоморфных пространств Бергмана на единичном круге, единичном шаре или поликруге из $\mathbb{C}^n$, см. [106], [107], [91], [117], [179], [180], [76], [29],[68], [240], [174], [110]. Заметим также, что Теоремах 43–46 при $p \ne q$ итерация одномерного результата не работает.

Для формулировки основных результатов данного раздела нам потребуются обозначения и вспомогательные утверждения. Будем использовать обычные обозначения в $\mathbb{C}^n$: $\bar{\zeta} = (\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n)$, $r\zeta = (r_1\zeta_1, \ldots, r_n\zeta_n)$, $dr = dr_1 \cdots dr_n$, $(1-|\zeta|^2)^{\alpha} = \prod_{j=1}^{n}(1-|\zeta_j|^2)^{\alpha_j}$, $\Gamma(\alpha+|k|) = \prod_{j=1}^{n}\Gamma(\alpha_j+|k_j|)$ для $\zeta \in \mathbb{C}^n$, $r \in I^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$.

Символ dm_{2n} ниже обозначает меру Лебега на поликруге U^n, нормированную так, чтобы $m_{2n}(U^n) = 1$. Будем писать $T : X \longrightarrow Y$, если T — оператор, ограниченно действующий из X в Y, т.е. $\|Tf\|_Y \le C\|f\|_X \ \ \forall f \in X$.

Для функции $f(z) = f(rw), r \in I^n, w \in T^n$, заданной на U^n, напомним определение оператора интегродифференцирования $D^{\alpha} \equiv D^{\alpha}_r$ Римана–Лиувилля относительно переменной r:

$$D^{-\alpha}f(z) = \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{I^n}(1-\eta)^{\alpha-1}f(\eta z)d\eta, \qquad D^{\alpha}f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m D^{-(m-\alpha)}f(z),$$

где $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial r_n}\right)^{m_n}$, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, $m_j - 1 < \alpha_j \le m_j \, (1 \le j \le n)$. Очевидно, что для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \ge 0$ $\ D^{\pm\alpha}f = D^{\pm\alpha_1}_{r_1}D^{\pm\alpha_2}_{r_2}\ldots D^{\pm\alpha_n}_{r_n}f$, где $D^{\alpha_j}_{r_j}$ означает тот же оператор, действующий только по r_j. Обозначим

$$\mathcal{D}^{-\alpha}f(rw) = r^{-\alpha}D^{-\alpha}f(rw), \qquad \mathcal{D}^{\alpha}f(rw) = D^{\alpha}\{r^{\alpha}f(rw)\}.$$

Легко видеть, что если функция f n-гармонична, то таковы также $\mathcal{D}^{\alpha}f$ и $\mathcal{D}^{-\alpha}f$, и для них выполнены формулы обращения

$$\mathcal{D}^{\alpha}\mathcal{D}^{-\alpha}f(z)=\mathcal{D}^{-\alpha}\mathcal{D}^{\alpha}f(z)=f(z). \tag{3.2.1}$$

Для n-гармонических функций операторы $\mathcal{D}^{-\alpha}$ и $\mathcal{D}^{\alpha}$ имеют эквивалентное определение. Каждая функция $f\in h(U^n)$ разлагается в ряд

$$f(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}a_k r^{|k|}e^{ik\cdot\theta},$$

где $r^{|k|}=r_1^{|k_1|}\cdots r_n^{|k_n|},\ \ k\cdot\theta=k_1\theta_1+\cdots+k_n\theta_n$, и мы можем представить

$$\mathcal{D}^{-\alpha}f(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(|k_j|+1)}{\Gamma(|k_j|+1+\alpha_j)}a_k r^{|k|}e^{ik\cdot\theta},$$
$$\mathcal{D}^{\alpha}f(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(|k_j|+1+\alpha_j)}{\Gamma(|k_j|+1)}a_k r^{|k|}e^{ik\cdot\theta}.$$

Нам потребуются ядра типа Пуассона P_α и сопряженные ядра Q_α в единичном круге $\mathbb{D}$ (см. [12, Гл. IX])

$$P_\alpha(z)=\Gamma(\alpha+1)\left[\operatorname{Re}\frac{2}{(1-z)^{\alpha+1}}-1\right],\qquad z\in\mathbb{D},\alpha\ge 0,$$
$$Q_\alpha(z)=\Gamma(\alpha+1)\operatorname{Im}\frac{2}{(1-z)^{\alpha+1}},\qquad z\in\mathbb{D},\ \alpha\ge 0.$$

Легко заметить, что $P_0(z)=P(z)$ и $Q_0(z)=Q(z)$ — обычные ядро и сопряженное ядро Пуассона. Обозначим также $P_\alpha(z,\zeta)=P_\alpha(z\bar\zeta),\ Q_\alpha(z,\zeta)=Q_\alpha(z\bar\zeta),\ z,\zeta\in\mathbb{D}$. Для поликруга U^n ядра P_α и Q_α мы определим как

$$P_\alpha(z,\zeta)=\prod_{j=1}^{n}P_{\alpha_j}(z_j,\zeta_j),\qquad Q_\alpha(z,\zeta)=\prod_{j=1}^{n}Q_{\alpha_j}(z_j,\zeta_j), \tag{3.2.2}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_j\ge 0,\ z,\zeta\in U^n$. Ядра P_α и Q_α n-гармоничны по обеим переменным z и ζ. Ясно, что $P_\alpha(z,\zeta)=P_\alpha(\zeta,z)=P_\alpha(\bar z,\bar\zeta)$. Две нижеследующие предварительные леммы доказываются прямым вычислением и оценкой.

Лемма 37 *Для любых* $z,\zeta\in U^n,\alpha_j\ge 0\,(1\le j\le n)$

$$P_0(z,\zeta)=\mathcal{D}^{-\alpha}P_\alpha(z,\zeta),\qquad Q_0(z,\zeta)=\mathcal{D}^{-\alpha}Q_\alpha(z,\zeta),$$
$$P_\alpha(z,\zeta)=\mathcal{D}^{\alpha}P_0(z,\zeta),\qquad Q_\alpha(z,\zeta)=\mathcal{D}^{\alpha}Q_0(z,\zeta).$$

Эта лемма позволяет нам распространить определение ядер P_α и Q_α на отрицательные $\alpha_j<0$, полагая $P_\alpha=\mathcal{D}^{\alpha}P_0$ и $Q_\alpha=\mathcal{D}^{\alpha}Q_0$ для всех $\alpha_j\in\mathbb{R}$.

Лемма 38 *Пусть* $\alpha_j\ge 0$, $\frac{1}{1+\alpha_j}<p\le\infty\,(1\le j\le n)$ *и пусть* K *обозначает любое из ядер* P_α *и* Q_α. *Тогда*

$$|K(z,\zeta)|\le C(\alpha,n)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{|1-\bar\zeta_j z_j|^{\alpha_j+1}},\qquad z,\zeta\in U^n,$$

$$M_p(K;r)\le C(\alpha,n,p)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-r_j)^{\alpha_j+1-1/p}},\qquad r\in I^n.$$

Нам потребуется также версия неравенств Харди высших размерностей.

Лемма 39 *Если* $g(t) \geq 0$, $t \in I^n$, $1 \leq q < \infty, \beta_j < -1 < \alpha_j \, (1 \leq j \leq n)$, *то*

$$\int_{I^n} (1-r)^{\alpha} \left(\int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_n} g(t)dt \right)^q dr \leq C \int_{I^n} (1-r)^{\alpha+q} g^q(r) dr, \tag{3.2.3}$$

$$\int_{I^n} x^{\beta} \left(\int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} g(t)dt \right)^q dx \leq C \int_{I^n} x^{\beta+q} g^q(x) dx, \tag{3.2.4}$$

где постоянные C *зависят лишь от* α, β, q, n.

Неравенства (3.2.3) и (3.2.4) доказываются итерацией одномерных неравенств.

Воспроизводящая интегральная формула типа Пуассона–Бергмана в $h(p,q,\alpha)$ представлена в следующей теореме.

Теорема 43 *Пусть* $\alpha_j > 0$, $u \in h(p,q,\alpha)$. *Если* $0 < p, q \leq \infty$, $\beta_j > \max\{\alpha_j + 1/p - 1, \, \alpha_j\}$, *либо* $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq 1$, $\beta_j \geq \alpha_j \quad (1 \leq j \leq n)$, *то*

$$u(z) = \frac{1}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\beta_j)} \int_{U^n} \prod_{j=1}^n (1-|\zeta_j|^2)^{\beta_j - 1} \, P_\beta(z,\zeta) \, u(\zeta) \, dm_{2n}(\zeta), \qquad z \in U^n. \tag{3.2.5}$$

где $P_\beta(z,\zeta)$ *— ядра типа Пуассона* (3.2.2).

Доказательство. Пусть вначале $p = q = 1, \beta_j = \alpha_j \, (1 \leq j \leq n)$ и пусть $u(z) \in h(1,1,\alpha)$. Применяя формулу обращения (3.2.1) и затем заменяя переменные, получаем

$$\begin{aligned}
u(z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} (1-\rho^2)^{\alpha-1} \mathcal{D}_r^\alpha u(\rho^2 z) 2^n \rho d\rho \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{I^n} (1-\rho^2)^{\alpha-1} \mathcal{D}_r^\alpha \left\{ \int\limits_{T^n} P(z,\rho\eta) u(\rho\eta) dm_n(\eta) \right\} 2^n \rho d\rho \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} \int_{T^n} (1-\rho^2)^{\alpha-1} \mathcal{D}_r^\alpha P(z,\rho\eta) u(\rho\eta) 2^n \rho d\rho dm_n(\eta),
\end{aligned}$$

где интеграл сходится благодаря оценкам Леммы 38. Для остальных допустимых значений p, q, β доказательство теоремы следует из вложения $h(p,q,\alpha) \subset h(1,1,\beta)$, которое содержится в Теореме 40. ■

Представление (3.2.5) порождает линейные интегральные операторы типа Бергмана:

$$T_{\beta,\lambda}(f)(z) = \frac{(1-|z|^2)^\lambda}{\Gamma(\beta+\lambda)} \int_{U^n} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1} \, P_{\beta+\lambda}(z,\zeta) \, f(\zeta) \, dm_{2n}(\zeta),$$

$$S_{\beta,\lambda}(f)(z) = \frac{(1-|z|^2)^\lambda}{\Gamma(\beta+\lambda)} \int_{U^n} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1} \, |P_{\beta+\lambda}(z,\zeta)| \, f(\zeta) \, dm_{2n}(\zeta),$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Также, мы определим схожие интегральные операторы с "сопряженным" ядром Q_β типа Пуассона:

$$\widetilde{T}_{\beta,\lambda}(f)(z) = \frac{(1-|z|^2)^\lambda}{\Gamma(\beta+\lambda)} \int_{U^n} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1}\, Q_{\beta+\lambda}(z,\zeta)\, f(\zeta)\, dm_{2n}(\zeta),$$

$$\widetilde{S}_{\beta,\lambda}(f)(z) = \frac{(1-|z|^2)^\lambda}{\Gamma(\beta+\lambda)} \int_{U^n} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1}\, |Q_{\beta+\lambda}(z,\zeta)|\, f(\zeta)\, dm_{2n}(\zeta).$$

Естественно поставить вопрос об ограниченности этих операторов на пространствах со смешанной нормой. Следующая теорема типа Форелли–Рудина дает частичный ответ на этот вопрос.

Теорема 44 *(i) Пусть* $1 \le p, q \le \infty$, $\beta_j > \alpha_j > -\lambda_j\, (1 \le j \le n)$. *Тогда каждый из операторов* $T_{\beta,\lambda}, \widetilde{T}_{\beta,\lambda}, S_{\beta,\lambda}, \widetilde{S}_{\beta,\lambda}$ *непрерывно отображает пространство* $L(p,q,\alpha)$ *в себя. Более того, оператор* $T_{\beta,0}\, (\lambda_j = 0)$ *проектирует* $L(p,q,\alpha)$ *на* $h(p,q,\alpha)$.

(ii) Пусть $1 \le p, q < \infty$, $\alpha_j, \beta_j, \lambda_j \in \mathbb{R}$. *Тогда каждый из операторов* $T_{\beta,\lambda}, S_{\beta,\lambda}$ *ограничен в* $L(p,q,\alpha)$ *в том и только в том случае, если* $\beta_j > \alpha_j > -\lambda_j\, (1 \le j \le n)$.

Доказательство. (i) Достаточно доказать ограниченность оператора $S_{\beta,\lambda}$. Вместо теста Шура (см, например, [110]) мы применим Лемму 39. Пусть $f(z) \in L(p,q,\alpha)$, $1 \le q < \infty$. По неравенству Минковского и Лемме 38

$$\begin{aligned} M_p(S_{\beta,\lambda} f; r) &\le \frac{(1-r^2)^\lambda}{\Gamma(\beta+\lambda)} \int_{U^n} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1} |P_{\beta+\lambda}(r,\zeta)| M_p(f;\rho) dm_{2n}(\zeta) \\ &\le C\,(1-r)^\lambda \left(\int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_n} + \int_{r_1}^1 \cdots \int_{r_n}^1 \right) M_p(f;\rho) \frac{(1-\rho)^{\beta-1}}{(1-r\rho)^{\beta+\lambda}} d\rho. \end{aligned}$$

По неравенству треугольника и Лемме 39

$$\begin{aligned} &\|S_{\beta,\lambda} f\|_{p,q,\alpha} = \left\| (1-r)^\alpha M_p(S_{\beta,\lambda} f; r) \right\|_{L^q(dr/(1-r))} \\ &\le C \left\| (1-r)^{\alpha+\lambda} \int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_n} M_p(f;\rho) \frac{d\rho}{(1-\rho)^{1+\lambda}} \right\|_{L^q(dr/(1-r))} \\ &\quad + C \left\| (1-r)^{\alpha-\beta} \int_{r_1}^1 \cdots \int_{r_n}^1 (1-\rho)^{\beta-1} M_p(f;\rho) d\rho \right\|_{L^q(dr/(1-r))} \\ &\le C \left[\int_{I^n} (1-r)^{(\alpha+\lambda)q-1} \left(\frac{1-r}{(1-r)^{1+\lambda}} M_p(f;r) \right)^q dr \right]^{1/q} \\ &\quad + C \left[\int_{I^n} x^{(\alpha-\beta)q-1} \left(\int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} \eta^{\beta-1} M_p(f; 1-\eta) d\eta \right)^q dx \right]^{1/q} \le C\|f\|_{p,q,\alpha}. \end{aligned}$$

Случай $q = \infty$ доказывается проще. Конечно, ограниченность оператора $T_{\beta,0}$ $(\lambda_j = 0)$ означает, что $T_{\beta,0}$ — n-гармонический проектор из $L(p,q,\alpha)$ на $h(p,q,\alpha)$. Это завершает доказательство части (i) Теоремы 44.

Перейдем к доказательству части (ii) Теоремы 44. Достаточно доказать, что ограниченность оператора $T_{\beta,\lambda}$ на $L(p,q,\alpha)$ влечет $\beta_j > \alpha_j > -\lambda_j$. Пусть $T_{\beta,\lambda}$ — ограниченный оператор на $L(p,q,\alpha)$, т.е. $\|T_{\beta,\lambda}\|_{p,q,\alpha} \le C\|f\|_{p,q,\alpha}$ $\forall f \in L(p,q,\alpha)$, где постоянная

C не зависит от f. Взяв мультииндекс $N=(N_1,\dots,N_n)$ с достаточно большими компонентами N_j ($N_j+\alpha_j>0$, $N_j+\beta_j>0$) такими, что $f_N(z)=(1-|z|^2)^N\in L(p,q,\alpha)$, мы заключаем, что $T_{\beta,\lambda}(f_N)(z)=C(\beta,\lambda,N)(1-|z|^2)^{\lambda}$. Следовательно

$$+\infty>\|T_{\beta,\lambda}(f_N)\|^q_{p,q,\alpha}\geq C(\beta,\lambda,q,N,n)\int_{I^n}(1-r)^{(\alpha+\lambda)q-1}dr,$$

поэтому неравенство $\alpha_j+\lambda_j>0$ имеет место для всех $j\in[1,n]$. Далее, пусть $T^*_{\beta,\lambda}$ — сопряженный оператор к $T_{\beta,\lambda}$. Сопряженный оператор имеет явное представление

$$T^*_{\beta,\lambda}(f)(z)=\frac{(1-|z|^2)^{\beta-\alpha q}}{\Gamma(\beta+\lambda)}\int_{U^n}(1-|\zeta|^2)^{\lambda+\alpha q-1}P_{\beta+\lambda}(z,\zeta)f(\zeta)dm_{2n}(\zeta).$$

Согласно [46, с.304] сопряженное пространство $L^*(p,q,\alpha)$ к $L(p,q,\alpha)$ можно отождествить с $L(p',q',\alpha q/q')$. Ограниченность оператора $T_{\beta,\lambda}$ на $L(p,q,\alpha)$ равносильно ограниченности $T^*_{\beta,\lambda}$ на $L^*(p,q,\alpha)\cong L(p',q',\alpha q/q')$, т.е.

$$\|T^*_{\beta}f\|_{p',q',\alpha q/q'}\leq C\|f\|_{p',q',\alpha q/q'}\quad\forall f\in L(p',q',\alpha q/q'). \tag{3.2.6}$$

Теперь рассмотрим два случая.

Случай $1<q<\infty$. Действие оператора $T^*_{\beta,\lambda}$ относительно функции

$$f_N(z)=(1-|z|^2)^N\in L(p',q',\alpha q/q')$$

с достаточно большими компонентами N_j дает

$$T^*_{\beta,\lambda}(f_N)(z)=C(1-|z|^2)^{\beta-\alpha q}.$$

Следовательно

$$+\infty>\|T^*_{\beta,\lambda}(f_N)\|^{q'}_{p',q',\alpha q/q'}\geq C\int_{I^n}(1-r)^{q'(\beta-\alpha q)+\alpha q-1}dr,$$

где постоянная C зависит только от $\alpha,\beta,\lambda,q,N,n$. Поэтому отсюда следует, что $q'(\beta_j-\alpha_j q)+\alpha_j q>0$, или эквивалентно $\beta_j>\alpha_j$ для всех j, $1\leq j\leq n$.

Случай $q=1$. В этом случае неравенство (3.2.6) обращается в

$$\|T^*_{\beta,\lambda}f\|_{p',\infty,0}\leq C\|f\|_{p',\infty,0}\qquad\forall f\in L(p',\infty,0). \tag{3.2.7}$$

Действие $T^*_{\beta,\lambda}$ относительно функции $f_N(z)$ дает

$$+\infty>\|T^*_{\beta,\lambda}(f_N)\|_{p',\infty,0}=C\sup_{r\in I^n}(1-r^2)^{\beta-\alpha}.$$

Значит $\beta_j-\alpha_j\geq 0$ для всех $1\leq j\leq n$. Остается показать, что для $q=1, 1\leq p<\infty$ равенство $\beta_j=\alpha_j$ ложно для всех индексов j. Положим $\beta_1=\alpha_1$, для примера. Для заданного параметра $a\in U^n$ рассмотрим функции $g_a(z)=|P_{\beta+\lambda}(a,z)|/P_{\beta+\lambda}(a,z)$, где $\beta_j+\lambda_j\geq\alpha_j+\lambda_j>0$. Ясно, что $|g_a(z)|\equiv 1$ и $g_a(z)\in L(p',\infty,0)$ для каждого $a\in U^n$. Тогда в силу (3.2.7), $T^*_{\beta,\lambda}(g_a)\in L(p',\infty,0)$. Для $z=a$ имеем

$$T^*_{\beta,\lambda}(g_z)(z)=C\prod_{j=2}^{n}(1-|z_j|^2)^{\beta_j-\alpha_j}\prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{D}}(1-|\zeta_j|^2)^{\lambda_j+\alpha_j-1}\left|P_{\beta_j+\lambda_j}(z_j,\zeta_j)\right|dm_2(\zeta_j).$$

Ввиду ограниченности гармонического сопряжения на пространствах $h(1,1,\alpha)$ (см., например, [91], [76])

$$T^*_{\beta,\lambda}(g_z)(z) \geq C(\alpha,\beta,\lambda,n)\log\frac{1}{1-|z_1|}.$$

Устремляя здесь $|z_1|\to 1$, получаем противоречие с ограниченностью оператора $T^*_{\beta,\lambda}$ на $L(p',\infty,0)$. Таким образом, равенство $\beta_j=\alpha_j$ не имеет места ни для какого j. Это завершает доказательство Теоремы 44. ■

Замечание. Для функций, голоморфных в единичном круге или единичном шаре из $\mathbb{C}^n$, а также для голоморфных пространств Бергмана ($p=q$) результаты Теорем 43 и 44 известны даже для более общих весов, см., например, [117], [76], [29], [174], [110] и другие представленные там ссылки.

Далее, возникает вопрос: что является образом пространства $L(p,q,\alpha)$ с отрицательными α_j при отображениях $T_{\beta,\lambda}$ и $\widetilde{T}_{\beta,\lambda}$? Чтобы ответить на этот вопрос определим пространства Бесова достаточно гладких и n-гармонических функций.

Определение. Скажем, что функция $f(z)$, заданная в U^n, принадлежит пространству Бесова $\Lambda^{p,q}_\alpha$ $(0<p,q\leq\infty,\alpha_j\geq 0)$, если $\mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}}f(z)\in L(p,q,\widetilde{\alpha}-\alpha)$, где $\widetilde{\alpha}=(\widetilde{\alpha}_1,\dots,\widetilde{\alpha}_n)$, $\widetilde{\alpha}_j$ — наименьшее целое число, превосходящее α_j, и $\mathcal{D}^\alpha$ — оператор интегродифференцирования Римана–Лиувилля.

Пространство Бесова $\Lambda^{p,q}_\alpha$ снабжено (квази)нормой $\|f\|_{\Lambda^{p,q}_\alpha}=\|\mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}}f\|_{p,q,\widetilde{\alpha}-\alpha}$.

Пусть $h\Lambda^{p,q}_\alpha$ — подпространство $\Lambda^{p,q}_\alpha$, содержащее n-гармонические функции. Для функции $f\in h\Lambda^{p,q}_\alpha$ мультииндекс $\widetilde{\alpha}$ может быть заменен на любой мультииндекс $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, $\gamma_j>\alpha_j$, при этом получаются эквивалентные нормы: $\|f\|_{h\Lambda^{p,q}_\alpha}\approx\|\mathcal{D}^\gamma f\|_{p,q,\gamma-\alpha}$. В случае $p=q=\infty$ получаются пространства Липшица порядка α, и будем часто писать $\Lambda^{\infty,\infty}_\alpha=\Lambda_\alpha$ и $h\Lambda^{\infty,\infty}_\alpha=h\Lambda_\alpha$.

Теорема 45 *При* $1\leq p,q\leq\infty$, $\alpha_j\geq 0$, $\beta_j>0\,(1\leq j\leq n)$ *операторы*

$$T_{\beta,0}: L(p,q,-\alpha)\longrightarrow h\Lambda^{p,q}_\alpha, \tag{3.2.8}$$

$$\widetilde{T}_{\beta,0}: L(p,q,-\alpha)\longrightarrow h\Lambda^{p,q}_\alpha, \tag{3.2.9}$$

ограничены. Более того, отображение (3.2.8) *сюрьективно.*

Для доказательства Теоремы 45 нам потребуются еще несколько дополнителных лемм.

В работах [187], [142], [77] установлена инвариантность классов Липшица под действием проектора Бергмана. Ниже в Теореме 46 для схожего оператора

$$\Phi_{\widetilde{\alpha}}(f)(z)=\frac{1}{\Gamma(\widetilde{\alpha})}\int_{U^n}(1-|\zeta|^2)^{\widetilde{\alpha}-1}P(z,\zeta)\,\mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}}f(\zeta)\,dm_{2n}(\zeta),$$

мы изучаем ту же задачу в более общих пространствах Бесова.

Лемма 40 *Вложения*

$$h\Lambda^{p,q}_\alpha\subset h(1,1,\beta)\qquad и\qquad h\Lambda^{p,q}_\alpha\subset h\Lambda^{1,1}_0$$

непрерывны для любых $1\leq p\leq\infty$, $0<q\leq\infty$, $\alpha_j>0$, $\beta_j>0$.

Доказательство. Лемма непосредственно следует из вложений (ii) и (vi) Теоремы 40 и определения пространств Бесова. ■

Лемма 41 *Пусть функция $u(z)$ принадлежит $h\Lambda_\alpha^{p,q}$ для $1 \le p \le \infty, 0 < q \le \infty$, $\alpha_j > 0$, $1 \le j \le n$. Тогда для любого $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, $\delta_j > 0$, $1 \le j \le n$, функция $u(z)$ представима в виде $u(z) = \Phi_\delta(u)(z)$, $z \in U^n$.*

Доказательство. Согласно второму вложению из Леммы 40, $\mathcal{D}^\delta u(z) \in h(1,1,\delta)$ для любых $\delta_j > 0$. Достаточно представить $\mathcal{D}^\delta u(z) = T_{\delta,0}(\mathcal{D}^\delta u)(z)$ по Теореме 43, и затем проинтегрировать посредством оператора $\mathcal{D}^{-\delta}$ и с использованием (3.2.1). ■

Лемма 42 *При $\beta_j > 0$, $\gamma_j \ge 0\,(1 \le j \le n)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, $z = rw$, $r \in I^n$, $w \in T^n$ имеют место следующие тождества*

$$T_{\beta,\gamma}\big\{r^{|k|}w^k\big\} = (1-|z|^2)^\gamma\, \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(|k|+1+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)\,\Gamma(|k|+1+\beta)}\, r^{|k|}w^k, \tag{3.2.10}$$

$$T_{\beta,0}\big\{(1-|z|^2)^\gamma\, r^{|k|}w^k\big\} = \frac{\Gamma(\beta+\gamma)\,\Gamma(|k|+1+\beta)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(|k|+1+\beta+\gamma)}\, r^{|k|}w^k. \tag{3.2.11}$$

Доказательство. Подставляя разложение в ряд ядра $P_{\beta+\gamma} = \mathcal{D}^{\beta+\gamma}P$ в левую часть равенства (3.2.10), получаем тождество (3.2.10). Тождество (3.2.11) доказывается аналогичным образом. ■

Лемма 43 *При любых $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\alpha_j \ge 0$, $\beta_j > 0$, $\gamma_j \ge 0$, $1 \le j \le n$, оператор $T_{\beta,0} \circ T_{\beta,\gamma}$ есть тождественное отображение в $h\Lambda_\alpha^{p,q}$.*

Доказательство. Если $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k r^{|k|}w^k$ принадлежит $h\Lambda_\alpha^{p,q}$, то ввиду (3.2.10), оператор $T_{\beta,\gamma}$ можно записать в виде

$$T_{\beta,\gamma}(f)(z) = \frac{(1-|z|^2)^\gamma}{\Gamma(\beta+\gamma)} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(|k|+1+\beta+\gamma)}{\Gamma(|k|+1+\beta)} r^{|k|}w^k. \tag{3.2.12}$$

Из (3.2.11) следует, что $T_{\beta,0}\big(T_{\beta,\gamma}f(z)\big) = f(z)$. ■

Лемма 44 *При $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\alpha_j \ge 0$, $\beta_j > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+^n, m_j > \alpha_j$, $1 \le j \le n$, оператор $T_{\beta,m}$ непрерывно отображает $h\Lambda_\alpha^{p,q}$ в $L(p,q,-\alpha)$.*

Доказательство. Согласно представлению (3.2.12) имеем

$$\begin{aligned}\frac{T_{\beta,m}f(z)}{(1-|z|^2)^m} &= C\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big(|k|^m + C|k_1|^{m_1-1}|k_2|^{m_2}\cdots|k_n|^{m_n} + \cdots + C\Big)a_k r^{|k|}w^k \\ &= C\Big[\mathcal{D}^m f(z) + C_{\beta,m}\mathcal{D}^{(m_1-1,m_2,\dots,m_n)}f(z) + \cdots + C_{\beta,m}f(z)\Big].\end{aligned}$$

Таким образом, условие $(1-r)^m \mathcal{D}^m f(z) \in L(p,q,-\alpha)$ влечет $T_{\beta,m} f(z) \in L(p,q,-\alpha)$. ■

Доказательство Теоремы 45. Для заданной функции $\varphi(z) \in L(p,q,-\alpha)$, $1 \le p,q \le \infty$, $\alpha_j \ge 0\,(1 \le j \le n)$, докажем, что для любых $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\beta_j > 0$ $\|T_{\beta,0}(\varphi)\|_{h\Lambda_\alpha^{p,q}} \le C\|\varphi\|_{p,q,-\alpha}$. Пусть $f(z) = T_{\beta,0}(\varphi)(z)$, тогда для любых $\gamma_j > \alpha_j\,(1 \le j \le n)$ требуемое неравенство можно записать в виде $\|\mathcal{D}^\gamma f\|_{p,q,\gamma-\alpha} \le C\|\varphi\|_{p,q,-\alpha}$. Чтобы доказать эти неравенства, продифференцируем равенство $f(z) = T_{\beta,0}(\varphi)(z)$ посредством оператора $\mathcal{D}^\gamma$, и затем оценим по аналогии с доказательством Теоремы 44 (i), используя неравенство Минковского, Леммы 38 и 39.

Сюръективность оператора $T_{\beta,0} : L(p,q,-\alpha) \longrightarrow h\Lambda_\alpha^{p,q}$ следует из Лемм 43 и 44. ■

Замечание. Для $p = q = \infty$, $\alpha_j = 0$ Теорема 45 утверждает ограниченность оператора $T_{\beta,0}$ из $L^\infty(U^n)$ на пространство Блоха $\mathcal{B}h = h\Lambda_0^{\infty,\infty}$ n-гармонических функций. Это хорошо известно для (невесовых) проекторов Бергмана и голоморфных функций в различных областях, см., например, [76], [68], [240], [110], тогда как для $p = q$, $\alpha_j = 1/p$ и голоморфных функций соотношение (3.2.8) дано в работе Жу [240].

Теорема 46 *При $1 \le p,q \le \infty$, $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$ оператор $\Phi_{\widetilde{\alpha}}$ непрерывно проектирует $\Lambda_\alpha^{p,q}$ на $h\Lambda_\alpha^{p,q}$.*

Доказательство. Для заданной (не n-гармонической) функции $f(z) \in \Lambda_\alpha^{p,q}$, нам нужно доказать, что $\|\mathcal{D}^\gamma \Phi_{\widetilde{\alpha}}(f)\|_{p,q,\gamma-\alpha} \le C\|\mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}} f\|_{p,q,\widetilde{\alpha}-\alpha}$, где $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha_j < \widetilde{\alpha}_j \le \alpha_j + 1, \gamma_j > \alpha_j\,(1 \le j \le n)$. Оставшаяся часть доказательства проводится аналогично доказательству Теоремы 44 (i). ■

В конце раздела в качестве приложения мы находим сопряженное пространство $h(p,q,\alpha)$ при $1 \le p \le \infty$, $1 < q < \infty$.

Теорема 47 *При $1 \le p \le \infty$, $1 < q < \infty$, $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, имеем $\big(h(p,q,\alpha)\big)^* \cong h(p',q',\alpha q/q')$ с формулой интегрального спаривания*

$$\langle f,g\rangle = \int_{U^n} f(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^{\alpha q-1} dm_{2n}(z),$$

где $f \in h(p,q,\alpha)$, $g \in h(p',q',\alpha q/q')$.

Доказательство. Функция $g \in h(p',q',\alpha q/q')$ порождает ограниченный линейный функционал на $h(p,q,\alpha)$,

$$F(f) = \langle f,g\rangle \quad \forall\, f \in h(p,q,\alpha).$$

Действительно, дважды применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|F(f)| \le C(\alpha,q,n)\|f\|_{p,q,\alpha}\|g\|_{p',q',\alpha q/q'}.$$

Обратно, пусть $F \in \big(h(p,q,\alpha)\big)^*$. Тогда по теореме Хана–Банаха функционал F можно распространить до ограниченного линейного функционала на $L(p,q,\alpha)$ без изменения нормы. В силу двойственности пространств со смешанной нормой, см. [46, с.304],

$$\big(L(p,q,\alpha)\big)^* \cong L(p',q',\alpha q/q').$$

Существует функция g_0 в $L(p',q',\alpha q/q')$ такая, что

$$F(f) = \langle f, g_0\rangle \qquad \text{и} \qquad \|F\| = \|g_0\|_{p',q',\alpha q/q'}.$$

По Теореме 43 записав $f = T_{\alpha q,0} f$, получаем

$$F(f) = \langle T_{\alpha q,0}(f), g_0\rangle = \langle f, T_{\alpha q,0}(g_0)\rangle.$$

Беря $g = T_{\alpha q,0}(g_0)$ и используя Теорему 44, мы заключаем, что g принадлежит $L(p',q',\alpha q/q')$ и $F(f) = \langle f, g\rangle\ \forall f \in h(p,q,\alpha)$, так, что

$$\|g\|_{p',q',\alpha q/q'} \le C\|g_0\|_{p',q',\alpha q/q'} \le C\|F\|.$$

Это завершает доказательство Теоремы 47. ■

Замечание. Для голоморфных пространств $H(p,q,\alpha)$ в единичном круге аналогичные теоремы двойственности содержатся в [92], [34]. Для голоморфных пространств Бергмана в поликруге теорема о двойственности с более общими весами установлена в [29].

3.3 Интегральные представления и проекции Бергмана пространств $h(p,q,\alpha)$ в верхнем полупространстве

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, и $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $dx = dx_1 \cdots dx_n$. Пусть $\mathbb{R}^{n+1}_+$ обозначает верхнее полупространство $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Точки этого полупространства представим в виде $(x,y) = (x_1,\dots,x_n,y), x \in \mathbb{R}^n$, $y>0$. Иногда удобно будет положить $x_0 = y$. Для измеримой в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функции $f(x,y)$ ее интегральные средние обозначим через

$$M_p(f;y) = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,dx)}, \qquad y>0, \quad 0<p\le\infty.$$

Класс (комплекснозначных) гармонических функций $u(x,y)$, для которых

$$\|u\|_{h^p} = \sup_{y>0} M_p(u;y) < +\infty,$$

есть класс Харди $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Квазинормированное пространство $L(p,q,\alpha)\quad(0<p,q\le\infty, \alpha>0)$ — это множество тех функций $f(x,y)$, измеримых в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p,q,\alpha}=\begin{cases}\left(\int_0^{+\infty} y^{\alpha q-1}M_p^q(f;y)dy\right)^{1/q}, & 0<q<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{y>0}\ y^{\alpha}M_p(f;y), & q=\infty.\end{cases}\tag{3.3.1}$$

Пусть $h(p,q,\alpha)$ — подпространство $L(p,q,\alpha)$, содержащее гармонические функции. При $p=q<\infty$ пространства со смешанной нормой сводятся к весовым пространствам Бергмана. Гармонические пространства $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой и гармонические пространства Бергмана $h(p,p,\alpha)$ в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ были изучены несколькими авторами, см. [225], [89], [90], [61], [175], [8], [169].

Следующая лемма является n-мерным распространением аналогичного одномерного результата из [175, Предл.2.2]. Ее можно доказать аналогичными методами.

Лемма 45 *При* $0<p\le p_0\le\infty,\ 0<q\le q_0\le\infty,\ \alpha+n/p=\alpha_0+n/p_0$, *следующие вложения непрерывны*

$$h(p,q,\alpha)\subset h(p_0,q_0,\alpha_0)$$

Более того, если $u(x,y)\in h(p,q,\alpha)$ *с* $q<\infty$, *то*

$$y^{\alpha}M_p(u;y)=o(1)\qquad \textit{при}\qquad y\to+0\qquad \textit{или}\qquad y\to+\infty.$$

Вложение $h(p,q,\alpha)\subset h(p,\infty,\alpha)$, содержащееся в этой лемме, ведет к одному полезному свойству пространств $h(p,q,\alpha)$:

Лемма 46 *Если* $u(x,y)\in h(p,q,\alpha)\,(0<p,q\le\infty,\alpha>0)$, $u_\eta(x,y)=u(x,y+\eta)$, *то квазинорма* $\|u_\eta\|_{p,q,\alpha}$ *существенно возрастающая по* $\eta\ge0$, *т.е.*

$$\|u_{\eta_1}\|_{p,q,\alpha}\le C(p,q,\alpha,n)\|u_{\eta_2}\|_{p,q,\alpha},\qquad \eta_1>\eta_2\ge0.\tag{3.3.2}$$

Для функции $u(x,y)$, гармонической в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и удовлетворяющей условию $u(x,y)=O(y^{-\delta}),\ y\to+\infty,\delta>0$, преобразования Рисса функции u определяются как

$$u_j(x,y)=(R_ju)(x,y)=-\int_y^{+\infty}\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial x_j}d\eta,\qquad 1\le j\le n.$$

Вектор-функция $F=(u_0,u_1,\ldots,u_n),\ u=u_0$, является системой сопряженных гармонических функций, т.е. функции u_j удовлетворяют обобщенным уравнениям Коши–Римана

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_k}=\frac{\partial u_k}{\partial x_j},\qquad 0\le j,k\le n.$$

Теорема 48 *Пусть* $\alpha>0$ *и* $u\equiv u_0\in h(p,q,\alpha)$. *Если* $0<p,q\le\infty$, $\beta>\max\{\alpha+n/p-n,\ \alpha\}$, *либо* $p=1,\ 0<q\le1,\ \beta\ge\alpha$, *то для каждого* $j\in[0,n]$

$$u_j(x,y)=\frac{2^\beta}{\Gamma(\beta)}\iint_{\mathbb{R}^{n+1}_+}u(\xi,\eta)\,\mathcal{D}^\beta P_j(x-\xi,y+\eta)\,\eta^{\beta-1}d\xi d\eta,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\ y>0,\tag{3.3.3}$$

$$u_j(x,y)=\frac{2^\beta}{\Gamma(\beta)}\iint_{\mathbb{R}^{n+1}_+}u_j(\xi,\eta)\,\mathcal{D}^\beta P(x-\xi,y+\eta)\,\eta^{\beta-1}d\xi d\eta,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\ y>0.\tag{3.3.4}$$

Доказательство. Представление (3.3.3) с $j=0$ получено Ричи и Тейблсоном [175] для целых β и $n=1$ (см. также [8]). Для $j\in[1,n]$ и $0<p<\infty$ представление (3.3.3) следует из полугрупповой формулы, включающей сопряженные ядра Пуассона:

$$u_j(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}u(\xi,y/2)P_j(x-\xi,y/2)d\xi.$$

Доказательство представления (3.3.4) мы отложим до Раздела 7.3. Представление (3.3.4) немедленно следует из принадлежности $u_j\in h(p,q,\alpha)$, что будет доказано в Теореме 96. ■

Теперь рассмотрим оператор

$$T_{\alpha,j}(f)(x,y)=\iint_{\mathbb{R}^{n+1}_+}f(\xi,\eta)\,\mathcal{D}^\alpha P_j(x-\xi,y+\eta)\,\eta^{\alpha-1}d\xi d\eta,\quad \alpha>0,\ 0\le j\le n.$$

Следующая теорема является частично обратной к Теореме 48.

Теорема 49 *Если $1\le p,q\le\infty,\beta>\alpha>0,0\le j\le n$, то оператор $T_{\beta,j}$ является ограниченной проекцией из $L(p,q,\alpha)$ на $h(p,q,\alpha)$.*

Доказательство. Пусть $f(x,y)\in L(p,q,\alpha)$ и q конечна. По неравенству Минковского и Лемме 1

$$M_p(T_{\beta,j}f;y)\le C\int_0^{+\infty}\frac{\eta^{\beta-1}}{(y+\eta)^\beta}M_p(f;\eta)d\eta.$$

Последующее применение неравенства Харди (см., например, [23]) показывает, что

$$\|T_{\beta,j}f\|_{p,q,\alpha}\le C\|f\|_{p,q,\alpha},$$

что завершает доказательство. ■

Заметим, что утверждение Теоремы 49 с $j=0$ доказано в [8] для $p=q$ целых β.

Естественно здесь поставить вопрос: влечет ли конечность $\|u\|_{p,q,\alpha}$ конечность нормы $\|u_j\|_{p,q,\alpha}$ для сопряженных гармонических функций? Утвердительный ответ, включающий все значения $p,q\in(0,\infty]$ будет дан в Разделе 7.3, в Теореме 96.

Глава 4

Максимальные теоремы в гармонических пространствах Бергмана

Результаты этой главы опубликованы в [254], [258], [278] и в совместной с К. Гюрлебеком и В. Шпрёссигом статье [273].

4.1 Максимальные теоремы в гармонических пространствах Бергмана на единичном шаре из $\mathbb{R}^n$

Пусть $n \geq 2$ — целое число, и $B = B_n$ — открытый единичный шар в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, и $S = \partial B$ — его граница, единичная сфера. Обозначим через $h(B_n, \mathbb{R})$, $h(B_n, \mathbb{C})$ соответственно, множества вещественнозначных и комплекснозначных гармонических функций, заданных в единичном шаре. Для вещественнозначной или векторнозначной функции $f(x) = f(r\zeta)$ в B_n $(0 \leq r < 1, \zeta \in S)$, ее интегральные средние определяются как

$$M_p(f; r) = \|f(r\cdot)\|_{L^p(S,d\sigma)}, \qquad 0 \leq r < 1, \quad 0 < p \leq \infty,$$

где $d\sigma$ — нормированная мера Лебега на сфере S. Норма Бергмана измеримой функции в B_n определяется как

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{B_n} (1 - |x|)^\alpha |f(x)|^p dV_n(x) \right)^{1/p}, \qquad 0 < p < \infty,\ \alpha > -1,$$

где dV_n — мера Лебега на шаре B_n, нормированная так, чтобы $V_n(B_n) = 1$. В полярных координатах имеем $dV_n(x) = nr^{n-1} dr d\sigma(\zeta)$ ([42, с.6]). Определим соответствующие весовые пространства Бергмана h^p_α гармонических функций

$$h^p_\alpha = \Big\{ u \in h(B_n, \mathbb{R}) \text{ или } u \in h(B_n, \mathbb{C}) : \|u\|_{p,\alpha} < +\infty \Big\}.$$

Общую теорию гармонических пространств Бергмана можно найти в [42], [121], [153].

Нам потребуется несколько вспомогательных лемм.

Лемма 47 *Пусть $\beta > \alpha > -1$. Тогда для всех $x = r\zeta \in B_n$*

$$\int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - x|^{\beta+n}} \le C(\beta, n)\frac{1}{(1-|x|)^{\beta+1}}, \tag{4.1.1}$$

$$\int_{B_n} \frac{(1-|y|)^{\alpha}}{|\zeta - ry|^{\beta+n}} dV_n(y) \le C(\alpha, \beta, n)\frac{1}{(1-|x|)^{\beta-\alpha}}. \tag{4.1.2}$$

Оценки Леммы 47 хорошо известны и могут быть найдены, например, в [121, с.87-88], [153, с.29-30], [170, с.90].

Лемма 48 *(Неравенства Харди и типа Харди)*

(i) Если $1 \le p < \infty$, $\beta > -1$, $g(r) \ge 0$, то

$$\int_0^1 (1-r)^{\beta}\left(\int_0^r g(t)dt\right)^p dr \le C\int_0^1 (1-r)^{\beta+p} g^p(r)dr,$$

где постоянная C зависит только от β, p.

(ii) Если $0 < p < 1$, и $g(r)$ — положительная возрастающая функция, то

$$\left(\int_0^1 g(tr)dt\right)^p \le C_p\int_0^1 (1-t)^{p-1} g^p(tr)dt, \qquad 0 \le r < 1.$$

Эти неравенства (типа) Харди также хорошо известны, см., например, [23], [180, Лемма 8].

Лемма 49 *Пусть $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. Тогда для всех $u \in h(B_n)$*

$$\int_{B_n} (1-|x|)^{\alpha}|u(x)|^p dV_n(x) \approx \int_0^1 (1-r)^{\alpha} M_p^p(u; r)dr.$$

Доказательство. Для $p \ge 1$ результат очевиден ввиду субгармоничности функции $|u|^p$ и монотонности интегральных средних $M_p(u; r)$ по r. Поэтому, нам нужно доказать лемму лишь для $0 < p < 1$. Тем не менее, нижеследующее доказательство справедливо для всех $0 < p < \infty$. Достаточно доказать неравенство

$$\int_0^{1/2} (1-r)^{\alpha} M_p^p(u; r)dr \le C(p, \alpha, n)\int_0^1 (1-r)^{\alpha} M_p^p(u; r) r^{n-1} dr. \tag{4.1.3}$$

Для произвольной точки x, $|x| < \frac{1}{2}$, возьмем шар $B(x) = \left\{y \in B_n : |y - x| < \frac{1}{2}(1-|x|)\right\}$ и запишем неравенство Харди–Литтлвуда–Феффермана–Стейна [85, с.172] (часто называемое HL-свойством для $|u|^p$)

$$|u(x)|^p \le \frac{C(p, n)}{(1-|x|)^n}\int_{B(x)} |u(y)|^p dV_n(y).$$

Поскольку $1 - |y| \approx 1 - |x|$ для $y \in B(x)$, и $B(x) \subset \left\{y : |y| < \frac{3}{4}\right\}$, то получаем

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\le \frac{C(p, \alpha, n)}{(1-|x|)^{n+\alpha}}\int_{B(x)} (1-|y|)^{\alpha}|u(y)|^p dV_n(y) \\ &\le C(p, \alpha, n)2^{n+\alpha}\int_{|y|<3/4} (1-|y|)^{\alpha}|u(y)|^p dV_n(y). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{1/2}\int_S (1-r)^\alpha |u(r\zeta)|^p dr\, d\sigma(\zeta) \le C(\alpha,n)\sup_{|x|<1/2}|u(x)|^p$$
$$\le C(p,\alpha,n)\int_0^{3/4}(1-r)^\alpha M_p^p(u;r)r^{n-1}dr.$$

Таким образом, мы получили даже более строгое неравенство, чем (4.1.3). ■

Следующая лемма — хорошо известное разложение Уитни (см. [23, Гл.6]), записанное для единичного шара.

Лемма 50 *Существует семейство* $\{\Delta_{kj}\}_{k,j}(1\le j\le m_k,\ k=0,1,2,\dots)$ *замкнутых кубов* $\Delta_{kj}\subset B_n$ *таких, что*
(i) $\bigcup_{k=0}^\infty\bigcup_{j=1}^{m_k}\Delta_{kj}=B_n$ *и* $diam\Delta_{kj}\approx dist(\Delta_{kj},S)$.
(ii) *Внутренние области всех* Δ_{kj} *попарно не пересекаются.*
(iii) *Существует другое семейство расширенных кубов* Δ^*_{kj} *с тем же центром как у* Δ_{kj} *такое, что система* $\{\Delta^*_{kj}\}_{k,j}$ *образует конечнократное покрытие шара* B_n*. Точнее, каждый куб* Δ^*_{kj} *пересекает не более, чем* 12^n *кубов* Δ_{kj}.

Отметим, что мы можем явно определить Δ_{kj} как "куб"

$$\Delta_{kj}=\left\{x=r\zeta\in B_n : 1-\frac{1}{2^k}\le r\le 1-\frac{1}{2^{k+1}},\ \zeta\in S_{kj}\right\},$$

где S_{kj} — часть единичной сферы, выбранная так, что $\mathrm{diam} S_{kj}=c_n 2^{-k}$ с абсолютной постоянной c_n, зависящей лишь от n, и $\bigcup_{j=1}^{m_k}S_{kj}=S$ для каждого k. Далее, если y_{kj} ($y_{kj}=\rho_{kj}\xi_{kj}$) — центр куба Δ_{kj}, то $|\Delta_{kj}|\approx|\Delta^*_{kj}|\approx(1-|y_{kj}|)^n\approx 2^{-kn}$.

Лемма 51 *Пусть* Δ_{kj} *и* Δ^*_{kj} *— "кубы" из предыдущей леммы, и пусть* $y_{kj}=\rho_{kj}\xi_{kj}$ *— центр куба* Δ_{kj}*. Если функция и гармонична в* B_n*, то для всех* $0<p<\infty$ *и* $\alpha>-1$

$$(1-|y_{kj}|)^\alpha\max_{x\in\Delta_{kj}}|u(x)|^p\le\frac{C(p,\alpha,n)}{|\Delta^*_{kj}|}\int_{\Delta^*_{kj}}(1-|y|)^\alpha|u(y)|^p dV_n(y).$$

Доказательство. Для куба Δ_{kj} и произвольной точки $x\in\Delta_{kj}$ возьмем шар B_x с центром x и радиусом 2^{-k-3} так, что $B_x\subset\Delta^*_{kj}$. Тогда согласно HL-свойству для функции $|u|^p$

$$|u(x)|^p\le\frac{C(p,n)}{|B_x|}\int_{B_x}|u(y)|^p dV_n(y),\qquad x\in\Delta_{kj}.$$

Поскольку $|B_x|\approx|\Delta^*_{kj}|$, то

$$\max_{x\in\Delta_{kj}}|u(x)|^p\le\frac{C(p,n)}{|\Delta^*_{kj}|}\int_{\Delta^*_{kj}}|u(y)|^p dV_n(y).$$

Искомое неравенство следует, так как $1-|y_{kj}|\approx 1-|y|$ для $y\in\Delta^*_{kj}$. ■

Теперь определим весовое ядро Бергмана K_α для шара B_n, см. [121], [153], [170], [171],

$$K_\alpha(x,y) = \frac{2}{n\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)} Z_k(x,y), \quad x,y \in B_n, \tag{4.1.4}$$

где $\alpha > -1$, $Z_k(x,y)$ — расширенные зональные гармоники, см. [42, Гл.5 и 8].

Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать максимальные теоремы в весовых пространствах Бергмана.

Теорема 50 *Пусть $u(x) : B_n \longrightarrow \mathbb{R}$ — вещественнозначная гармоническая функция из пространства Бергмана h^p_α в единичном шаре B_n для некоторых $\alpha > -1$ и $0 < p < 1$. Тогда радиальная максимальная функция*

$$g(x) = \sup_{0<t<1} \left|\nabla u(y)|_{y=tx}\right| = \sup_{0<\rho<r} \left|(\nabla u)(\rho\zeta)\right|, \quad x = r\zeta, \tag{4.1.5}$$

удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{p+\alpha,\alpha} \le C(p,\alpha,n)\|u\|_{p,\alpha}.$$

Доказательство. Согласно [170, с.92] имеет место непрерывное вложение $h^p_\alpha \subset h^1_{(\alpha+n)/p-n}$. Для любого $\beta \ge (\alpha+n)/p - n$ функция $u \in h^1_{(\alpha+n)/p-n}$ допускает интегральное представление (см. [121], [153], [171])

$$u(x) = \int_{B_n} K_\beta(x,y)\, u(y)(1-|y|^2)^\beta dV_n(y), \qquad x \in B_n, \tag{4.1.6}$$

где K_β — ядро Бергмана (4.1.4). Градиент ядра Бергмана оценивается следующим образом ([171, Лем.2.2], [170, Теор.4.1], [121, Лем.2.8])

$$\left|\nabla_x K_\beta(x,y)\right| \le \frac{C(\beta,n)}{\left|\rho x - \xi\right|^{\beta+n+1}}, \qquad x = r\zeta, \quad y = \rho\xi.$$

Поэтому взяв градиент в (4.1.6), получаем

$$|\nabla_x u(x)| \le C(\beta,n) \int_{B_n} |u(y)| \frac{(1-|y|)^\beta}{\left|\rho x - \xi\right|^{\beta+n+1}} dV_n(y), \qquad x \in B_n.$$

Теперь введем параметр $t \in (0,1)$ и воспользуемся простым неравенством

$$|\xi - \rho x| \le 2|\xi - t\rho x|, \qquad x \in B_n, \quad 0 < \rho, t < 1, \quad \xi \in S,$$

которое доказывается неравенством треугольника:

$$|\xi - \rho x| \le |\xi - t\rho x| + \rho|x| - t\rho|x| \le |\xi - t\rho x| + 1 - t\rho|x| \le 2|\xi - t\rho x|.$$

Следовательно

$$g(x) = \sup_{0<t<1} \left|\nabla u(tx)\right| \le C(\beta,n) \int_{B_n} |u(y)| \frac{(1-|y|)^\beta}{\left|\rho x - \xi\right|^{\beta+n+1}} dV_n(y), \quad x \in B_n.$$

Теперь нам нужно разбиение единичного шара, разложение Уитни из Леммы 50

$$
\begin{aligned}
g(x) &\le C(\beta,n)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\int_{\Delta_{kj}}|u(y)|\frac{(1-|y|)^{\beta}}{\left|\rho x-\xi\right|^{\beta+n+1}}dV_n(y)\\
&\le C(\beta,n)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}(1-|y_{kj}|)^{\beta}|\Delta_{kj}|\sup_{y\in\Delta_{kj}}\frac{|u(y)|}{\left|\rho x-\xi\right|^{\beta+n+1}},
\end{aligned}
\tag{4.1.7}
$$

где $y_{kj}=\rho_{kj}\xi_{kj}$ — центр Δ_{kj}, и $y=\rho\xi$. Далее, так как $|y_{kj}|=1-\frac{3}{2^{k+2}}$, то

$$
1-|x|+\frac{1}{2^{k+1}}|x|\le 1-|y_{kj}||x|\le 1-|x|+\frac{1}{2^{k}}|x|\le 2\left(1-|x|+\frac{1}{2^{k+1}}|x|\right).
$$

Отсюда следует, что

$$
|\xi-\rho x|=|\zeta-ry|\approx|\zeta-ry_{kj}|=|\xi_{kj}-\rho_{kj}x|,\qquad x=r\zeta,\ y=\rho\xi.
$$

Возведем обе части (4.1.7) в степень p,

$$
g^p(x)\le C(p,\beta,n)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{(1-|y_{kj}|)^{p\beta}|\Delta_{kj}|^p}{\left|\xi_{kj}-\rho_{kj}x\right|^{p(\beta+n+1)}}\sup_{y\in\Delta_{kj}}|u(y)|^p,
$$

и затем проинтегрируем и оценим по Лемме 47, полагая β достаточно большим ($\beta>\frac{\alpha+n}{p}-n$)

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{p,\alpha+p}^p &\le C\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}(1-|y_{kj}|)^{p\beta}|\Delta_{kj}|^p\sup_{y\in\Delta_{kj}}|u(y)|^p\int\limits_{B_n}\frac{(1-|x|)^{\alpha+p}dV_n(x)}{\left|\xi_{kj}-\rho_{kj}x\right|^{p(\beta+n+1)}}\\
&\le C\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}(1-|y_{kj}|)^{p\beta}|\Delta_{kj}|^p\frac{\sup_{y\in\Delta_{kj}}|u(y)|^p}{(1-\rho_{kj})^{p(\beta+n+1)-\alpha-p-n}}\\
&= C\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}(1-|y_{kj}|)^{\alpha+n-pn}|\Delta_{kj}||\Delta_{kj}|^{p-1}\max_{y\in\Delta_{kj}}|u(y)|^p\\
&\le C\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}(1-|y_{kj}|)^{\alpha}|\Delta_{kj}|\max_{y\in\Delta_{kj}}|u(y)|^p.
\end{aligned}
$$

По Лемме 51,

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{p,\alpha+p}^p &\le C\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\int_{\Delta_{kj}^*}(1-|y|)^{\alpha}|u(y)|^p dV_n(y)\\
&\le C(p,\alpha,\beta,n)\int_{B_n}(1-|y|)^{\alpha}|u(y)|^p dV_n(y)\\
&= C(p,\alpha,\beta,n)\|u\|_{p,\alpha}^p.
\end{aligned}
$$

Это завершает доказательство Теоремы 50. ■

Следующая максимальная теорема уже не содержит градиента.

Теорема 51 *Пусть $u(x) : B_n \longrightarrow \mathbb{R}$ — вещественнозначная гармоническая функция из пространства Бергмана h^p_α в единичном шаре B_n для некоторых $\alpha > -1$ и $0 < p < 1$. Тогда радиальная максимальная функция*

$$u_+(x) = \sup_{0<t<1} \big|u(tx)\big| = \sup_{0<\rho<r} \big|u(\rho\zeta)\big|, \qquad x = r\zeta,$$

удовлетворяет неравенству

$$\|u_+\|_{p,\alpha} \le C(p, \alpha, n)\|u\|_{p,\alpha}.$$

Доказательство. Беря в рассчет интегральную формулу (4.1.6) и оценки ядра Бергмана ([171, Лем.2.2], [170, Теор.4.1], [121, Лем.2.7])

$$|K_\beta(x, y)| \le \frac{C(\beta, n)}{\big|\rho x - \xi\big|^{\beta+n}}, \qquad x = r\zeta, \quad y = \rho\xi,$$

мы затем можем доказать теорему аналогично доказательству предыдущей Теоремы 50. Детали доказательства опускаем. ■

Замечание. Теорема 51 недавно доказана в [78, Теор.4], но другим методом и в более общем контексте. Наш метод основан на разложении Уитни и был применен в [254] (см. также следующий раздел) в контексте верхнего полупространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Схожие максимальные теоремы для гармонических пространств Бергмана можно также найти в [254], [278], [79], [161], [195], [196].

4.2 Максимальные теоремы в гармонических пространствах Бергмана на верхнем полупространстве

В этом разделе мы установим максимальные теоремы для гармонических пространств Бергмана в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Для $0 < p < \infty, \alpha > -1$ обозначим через h^p_α гармоническое пространство Бергмана, содержащее все гармонические в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функции $u(x, y)$ такие, что

$$\|u\|_{p,\alpha} = \left(\iint_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y^\alpha |u(x, y)|^p dxdy \right)^{1/p} < +\infty.$$

Если $f(x, y)$ — измеримая в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функция, то ее интегральные средние определяются как

$$M_p(f; y) = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n, dx)}, \qquad y > 0, \quad 0 < p \le \infty.$$

Множество (комплекснозначных) гармонических функций $u(x, y)$, для которых

$$\|u\|_{h^p} = \sup_{y>0} M_p(u; y) < +\infty,$$

есть обычный класс Харди $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

В работе [89] Флетт установил максимальную теорему типа Харди–Литтлвуда.

Теорема Флетта. *Пусть $w(x,y)$ — положительная субгармоническая функция в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, удовлетворяющая условию*

$$\sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}^n} w(x,y)dx \le K < +\infty.$$

Пусть также $0<\delta<1$, $B(x,y;\delta)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ с центром (x,y) и радиусом δy,

$$B(x,y;\delta)=\Big\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}_+;|\xi-x|^2+(\eta-y)^2\le(\delta y)^2\Big\}.$$

Тогда максимальная функция

$$w^*_\delta(x,y)=\sup_{(\xi,\eta)\in B(x,y;\delta)} w(\xi,\eta),\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}_+.$$

удовлетворяет неравенству

$$\sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}^n} w^*_\delta(x,y)dx \le C(n,\delta)K.$$

В частности, Теорема Флетта верна для гармонического пространства Харди $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $p\ge 1$. В следующей теореме мы распространим Теорему Флетта на гармонические пространства Бергмана h^p_α с малыми $p<1$.

Теорема 52 *Пусть $\alpha>0, 0<p<\infty, 0<\delta<1, u(x,y)\in h(p,p,\alpha)$. Тогда максимальная функция*

$$u^*_\delta(x,y)=\sup_{(\xi,\eta)\in B(x,y;\delta)}|u(\xi,\eta)|,\qquad x\in\mathbb{R}^n, y>0$$

удовлетворяет неравенству

$$\|u^*_\delta\|_{p,p,\alpha}\le C(\alpha,p,n,\delta)\|u\|_{p,p,\alpha}. \tag{4.2.1}$$

Для доказательства этой максимальной теоремы нам нужны две предварительные леммы. Первая из них — известное разложение Уитни (см. [23, Гл.6]) для верхнего полупространства.

Лемма 52 *Существует система $\{\Delta_k\}_{k=1}^\infty$ замкнутых кубов $\Delta_k\subset\mathbb{R}^{n+1}_+$ со сторонами, параллельными координатным осям, такая, что*
(i) $\bigcup_{k=1}^\infty\Delta_k=\mathbb{R}^{n+1}_+$ *и $diam\ \Delta_k\approx dist\big(\Delta_k,\partial\mathbb{R}^{n+1}_+\big)$;*
(ii) *Внутренние области всех Δ_k попарно не пересекаются.*
(iii) *Существует другая система расширенных кубов Δ^*_k с тем же центром как у Δ_k, такая, что система $\{\Delta^*_k\}_{k=1}^\infty$ образует конечнократное покрытие полупространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Точнее, каждый куб Δ^*_k пересекает не более чем 12^{n+1} кубов Δ_k.*

Лемма 53 *Пусть Δ_k и Δ_k^* — кубы из предыдущей леммы, и пусть (ξ_k, η_k) — центр куба Δ_k. Если $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$, и функция u гармонична в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, то*

$$\eta_k^{\alpha p-1} \max_{(\xi,\eta)\in\Delta_k} |u(\xi,\eta)|^p \leq \frac{C(p,\alpha,n)}{|\Delta_k^*|} \iint_{\Delta_k^*} \eta^{\alpha p-1}|u(\xi,\eta)|^p d\xi d\eta.$$

Доказательство Леммы 53 можно найти в [8].

Заметим, что $|\Delta_k| \approx |\Delta_k^*| \approx \eta_k^{n+1}$.

Доказательство Теоремы 52. При $p \geq 1$ неравенство (4.2.1) немедленно следует из Теоремы Флетта. Случай малых p сопряжен с рядом сложностей ввиду того,что $|\nabla u|^p$ может не являться субгармонической при $p < (n-1)/n$, а интегральные средние $M_p(u;y)$, вообще говоря, не монотонны по $y > 0$. Пусть $0 < p < 1$. Согласно представлению (3.3.3) с $j = 0$ и $\beta > \alpha + n/p - n$,

$$\|u_\delta^*\|^p_{p,p,\alpha} = \frac{2^{\beta p}}{\Gamma^p(\beta)} \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y^{\alpha p-1} \sup_{\xi,\eta} \left| \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} u(t,\theta)\mathcal{D}^\beta P(\xi - t, \eta+\theta)\theta^{\beta-1} dt d\theta \right|^p dxdy$$

$$\leq C \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y^{\alpha p-1} \sup_{\xi,\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\iint\limits_{\Delta_k} |u(t,\theta)| \; |\mathcal{D}^\beta P(\xi-t,\eta+\theta)| \; \theta^{\beta-1} dt d\theta \right)^p dxdy.$$

Нетрудно проверить, что

$$\max_{(t,\theta)\in\Delta_k} |\mathcal{D}^\beta P(\xi-t,\eta+\theta)| \leq C(n,\beta) |\mathcal{D}^\beta P(\xi-\xi_k,\eta+\eta_k)|.$$

Следовательно

$$\|u_\delta^*\|^p_{p,p,\alpha} \leq C \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y^{\alpha p-1} \sup_{\xi,\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \max_{\Delta_k} |u(t,\theta)|^p \; |\mathcal{D}^\beta P(\xi-\xi_k,\eta+\eta_k)|^p \, \eta_k^{p(\beta-1)} |\Delta_k|^p dxdy$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k|^p \eta_k^{p(\beta-1)} \max_{\Delta_k} |u(t,\theta)|^p \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y^{\alpha p-1} \sup_{\xi,\eta} |\mathcal{D}^\beta P(\xi-\xi_k,\eta+\eta_k)|^p dxdy. \tag{4.2.2}$$

Обозначая последний интеграл через J и выбрав β достаточно большим, оценим интеграл J:

$$J \leq \int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha p-1} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sup_{|\xi-x|\leq\delta y,\ |\eta-y|\leq\delta y} |\mathcal{D}^\beta P(\xi-\xi_k,\eta+\eta_k)|^p dx \right] dy$$

$$\leq C \int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha p-1} \Bigg[\int\limits_{|x-\xi_k|\leq\delta y} \frac{dx}{((1-\delta)y+\eta_k)^{p(\beta+n)}} +$$

$$+ \int\limits_{|x-\xi_k|>\delta y} \frac{dx}{(|x-\xi_k| - \delta y + (1-\delta)y + \eta_k)^{p(\beta+n)}} \Bigg] dy \leq C \frac{1}{\eta_k^{p(\beta+n)-n-\alpha p}}.$$

Подставляя это в (4.2.2) и применяя Лемму 53, продолжим оценку

$$\begin{aligned}\|u_\delta^*\|_{p,p,\alpha}^p &\le C\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_k|^p\eta_k^{\alpha p+n-pn-p}\max_{\Delta_k}|u(\xi,\eta)|^p\\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_k|\eta_k^{\alpha p-1}\max_{\Delta_k}|u(\xi,\eta)|^p\\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_k|\frac{1}{|\Delta_k^*|}\iint\limits_{\Delta_k^*}\eta^{\alpha p-1}|u(\xi,\eta)|^p d\xi d\eta \le C\|u\|_{p,p,\alpha}^p.\end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы. ■

Приложения максимальной Теоремы 52 будут даны в Разделе 5.3.

Глава 5

Интегралы и производные в пространствах $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой

Результаты Разделов 5.1–5.3 этой главы опубликованы в [254], [268], [269], а результаты Разделов 5.4–5.5 — в совместных со С. Стевичем статьях [271], [272].

5.1 Интегралы и производные в весовых классах Харди $h(p, \infty, \alpha)$ на поликруге

Квазинормированное пространство $h(p, \alpha)$ $\big(0 < p \le \infty, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_j > 0\big)$ состоит из тех функций $f(z)$, n-гармонических в поликруге U^n, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p,\alpha} = \sup_{r \in I^n} \prod_{j=1}^{n} (1 - r_j)^{\alpha_j} M_p(f; r).$$

Соответствующие малые пространства $h_0(p, \alpha)$ определяются условиями

$$(1 - r_j)^{\alpha_j} M_p(f; r) = o(1) \qquad \text{при} \qquad r_j \to 1-$$

для каждого $j \in [1, n]$ по отдельности. Для подпространств $h(p, \alpha)$, состоящих из голоморфных функций обозначим

$$H(p, \alpha) = H(U^n) \cap h(p, \alpha), \qquad H_0(p, \alpha) = H(U^n) \cap h_0(p, \alpha).$$

Заметим, что пространства $h(p, \alpha)$ можно рассматривать по шкале пространств со смешанной нормой, именно

$$h(p, \alpha) = h(p, \infty, \alpha), \qquad H(p, \alpha) = H(p, \infty, \alpha), \qquad h_0(p, \alpha) = h_0(p, \infty, \alpha). \tag{5.1.1}$$

При $n = 1$ пространства $H(p, \alpha)$ и $h(p, \alpha)$ исследовались в работах Флетта [89], [91] в рамках пространств со смешанной нормой. Если градиент функции f имеет конечную норму в $h(\infty, 1)$ или $h_0(\infty, 1)$, то говорят, что f — функция из класса Блоха или малого класса Блоха, соответственно. Основные свойства пространств Блоха, включая высшие размерности, можно найти в [37], [227].

Обозначим через $h\bigl(p,\log(\alpha)\bigr)$ $\bigl(0<p\le\infty, \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n), \alpha_j>0\bigr)$ множество тех функций $f(z)$, n-гармонических в поликруге U^n, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p,\log(\alpha)}=\sup_{r\in I^n}\left(\prod_{j=1}^{n}\log\frac{e}{1-r_j}\right)^{-\alpha_j}M_p(f;r).$$

Для подпространств $h\bigl(p,\log(\alpha)\bigr)$, состоящих из голоморфных функций, обозначим

$$H\bigl(p,\log(\alpha)\bigr)=H(U^n)\cap h\bigl(p,\log(\alpha)\bigr).$$

Одномерные пространства $H\bigl(p,\log(\alpha)\bigr)$ и более общие "проинтегрированные" пространства типа Харди–Блоха были изучены в [95].

Лемма 54 *Если $\alpha_j>0\,(1\le j\le n), 0<p\le 2$, то для всех $u\in h(U^n)$*

$$\|\mathcal{D}^{-\alpha}u\|_{h^p}\le C\left(\int_{U^n}(1-|z|)^{\alpha p-1}|u(z)|^p dm_{2n}(z)\right)^{1/p}. \tag{5.1.2}$$

Одномерная версия (5.1.2) известна и может быть выведена из [89, Теор.2] и ограниченности гармонического сопряжения в пространствах Бергмана голоморфных функций, заданных в единичном круге, см. [91]. Неравенство (5.1.2) можно затем доказать итерацией одномерного неравенства.

Лемма 55 *Если $\alpha_j>0\,(1\le j\le n), 2\le p<\infty$, то для всех $u\in h(U^n)$*

$$\|\mathcal{D}^{-\alpha}u\|_{h^p}\le C\left(\int_{I^n}(1-r)^{2\alpha-1}M_p^2(u;r)dr\right)^{1/2}. \tag{5.1.3}$$

Доказательство. Модификация неравенства типа Литтлвуда–Пэли из Теоремы 9 приводит к

$$\|\mathcal{D}^{-\alpha}u\|_{h^p}\le C(p,\alpha,n)\left\|\bigl\|(1-r)^{\alpha}u\bigr\|_{L^2(dr/(1-r))}\right\|_{L^p(T^n)}$$

для всех $u\in h(U^n)$. Применяя неравенство Минковского, немедленно получаем

$$\|\mathcal{D}^{-\alpha}u\|_{h^p}\le C(p,\alpha,n)\left\|(1-r)^{\alpha}\bigl\|u\bigr\|_{L^p(T^n)}\right\|_{L^2(dr/(1-r))},$$

что совпадает с (5.1.3). ■

Теперь установим неравенства роста для весовых пространств $h(p,\alpha), h\bigl(p,\log(\alpha)\bigr)$. В частности, в нижеследующей теореме мы обобщим известное неравенство Клуни и Макгрегора [70], Макарова [150], а также неравенство Гирелы и Пелаеса [96]. Для всех неравенств мы даем короткие и простые доказательства.

Будем писать $T:X\longrightarrow Y$, если T — ограниченный оператор, действующий из X в Y, т.е. $\|Tf\|_Y\le C\|f\|_X\ \forall f\in X$.

Теорема 53 *При $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$ имеют место следующие соотношения*

$$
\begin{array}{rlll}
(i) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(p,\alpha) \longrightarrow h\big(p, \log(1/p)\big), & 0 < p \le 2, & (5.1.4)\\
(ii) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(p,\alpha) \longrightarrow h\big(p, \log(1/2)\big), & 2 \le p < \infty, & (5.1.5)\\
(iii) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(p,\alpha) \longrightarrow h(\infty, 1/p), & 0 < p < \infty, & (5.1.6)\\
(iv) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(\infty,\alpha) \longrightarrow h\big(p, \log(1/2)\big), & 0 < p < \infty, & (5.1.7)\\
(v) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(\infty,\alpha) \longrightarrow h\big(\infty, \log(1)\big). & & (5.1.8)
\end{array}
$$

Все соотношения (5.1.4)–(5.1.8) наилучшие в том смысле, что для каждого соотношения $\mathcal{D}^{-\alpha}: X \longrightarrow Y$ существует функция $f \in h(U^n)$ такая, что $\|\mathcal{D}^{-\alpha} f\|_Y \approx \|f\|_X$.

Замечание. В частном случае $n = 1$, $\alpha = 1$ и для обычных производных голоморфных функций аналогичные результаты известны: для соотношения (5.1.4) см. [96, с.461]; для соотношения (5.1.5) см. [95, Теор.1.1]; для соотношения (5.1.6) см. [96, с.467] ($p \ge 1/2$); для соотношения (5.1.7) см. [70, с.364] и [150, с.374]; для соотношения (5.1.8) см., например, [96, с.460].

Доказательство Теоремы 53.

(i). Пусть $u \in h(p,\alpha)$ для некоторых $0 < p \le 2$ и $\alpha_j > 0$. Вначале применим Лемму 54 по отношению к растянутой функции $u_\rho(z) = u(\rho z)$, $\rho \in I^n$,

$$M_p(\mathcal{D}^{-\alpha} u; \rho r) \le C \left(\int_{U^n} (1-|z|)^{\alpha p - 1} |u(\rho z)|^p dm_{2n}(z) \right)^{1/p}, \qquad \rho, r \in I^n.$$

Лемма Фату и последующая оценка ведут к

$$
\begin{aligned}
M_p^p(\mathcal{D}^{-\alpha} u; \rho) &\le C \int_{I^n} (1-r)^{\alpha p - 1} M_p^p(u; \rho r) dr \\
&\le C \|u\|_{p,\alpha}^p \int_{I^n} \frac{(1-r)^{\alpha p - 1}}{(1-\rho r)^{\alpha p}} dr \le C \|u\|_{p,\alpha}^p \prod_{j=1}^n \log \frac{e}{1-\rho_j}
\end{aligned}
$$

для всех $\rho \in I^n$. Таким образом,

$$\|\mathcal{D}^{-\alpha} u\|_{p, \log(1/p)} \le C \|u\|_{p,\alpha}, \qquad 0 < p \le 2. \tag{5.1.9}$$

Неравенство (5.1.9) наилучшее ввиду примера

$$f_1(z) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1-z_j)^{\alpha_j + 1/p}}, \qquad z \in U^n. \tag{5.1.10}$$

Легко посчитать, что

$$(1-r)^\alpha M_p(f_1; r) \approx 1, \qquad M_p(\mathcal{D}^{-\alpha} f_1; r) \approx \left(\prod_{j=1}^n \log \frac{e}{1-r_j} \right)^{1/p}.$$

(ii). Пусть $u \in h(p,\alpha)$ для некоторых $2 \le p < \infty$ и $\alpha_j > 0$. Лемма 55 вместе с леммой Фату приводят к

$$M_p^2(\mathcal{D}^{-\alpha}u;\rho) \le C \int_{I^n} (1-r)^{2\alpha-1} M_p^2(u;\rho r)dr$$
$$\le C\|u\|_{p,\alpha}^2 \int_{I^n} \frac{(1-r)^{2\alpha-1}}{(1-\rho r)^{2\alpha}} dr \le C\|u\|_{p,\alpha}^2 \prod_{j=1}^n \log \frac{e}{1-\rho_j}$$

для всех $\rho \in I^n$. Таким образом,

$$\|\mathcal{D}^{-\alpha}u\|_{p,\log(1/2)} \le C\|u\|_{p,\alpha}, \qquad 2 \le p < \infty. \tag{5.1.11}$$

Функция, заданная лакунарным рядом

$$f_2(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} 2^{\alpha_1 k_1} \cdots 2^{\alpha_n k_n}\, z_1^{2^{k_1}} \cdots z_n^{2^{k_n}}, \qquad z \in U^n, \tag{5.1.12}$$

предоставляет пример, показывающий точность неравенства (5.1.11). Действительно, по Теореме 30

$$M_p(f_2;r) \approx \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} 2^{2\alpha k}\, r^{2^{k+1}} \right)^{1/2} \approx \frac{r}{(1-r)^\alpha} \equiv \prod_{j=1}^n \frac{r_j}{(1-r_j)^{\alpha_j}}$$

при $r \in I^n$. Последнюю оценку можно найти, например, в [80, с.66]. С другой стороны,

$$\mathcal{D}^{-\alpha} f_2(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} 2^{\alpha k} \left(\int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha-1} \eta^{2^k} d\eta \right) z^{2^k},$$

и

$$M_p(\mathcal{D}^{-\alpha} f_2;r) \approx \left(\prod_{j=1}^n \log \frac{e}{1-r_j} \right)^{1/2}. \tag{5.1.13}$$

(iii). Пусть $u \in h(p,\alpha)$ для некоторых $0 < p < \infty$ и $\alpha_j > 0$. Тогда

$$M_\infty(\mathcal{D}^{-\alpha}u;r) \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} (1-r)^{\alpha-1} M_\infty(u;\eta r) d\eta$$
$$\le \|u\|_{\infty,\alpha+1/p} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} \frac{(1-\eta)^{\alpha-1}}{(1-\eta r)^{\alpha+1/p}} d\eta$$
$$\le C(\alpha,p,n)\|u\|_{\infty,\alpha+1/p} \frac{1}{(1-r)^{1/p}}.$$

Следовательно $\|\mathcal{D}^{-\alpha}u\|_{\infty,1/p} \le C\|u\|_{\infty,\alpha+1/p}$. Согласно непрерывному вложению $h(p,\alpha) \subset h(\infty,\alpha+1/p)$ из Теоремы 40(iv) имеем

$$\|\mathcal{D}^{-\alpha}u\|_{\infty,1/p} \le C\|u\|_{p,\alpha}.$$

Это неравенство наилучшее ввиду примера (5.1.10), что легко проверяется.

(iv). Пусть $u \in h(\infty, \alpha)$ для некоторых $0 < p < \infty$ и $\alpha_j > 0$. Согласно соотношению (5.1.5) и монотонности интегральных средних M_p по p,

$$\|\mathcal{D}^{-\alpha} u\|_{p,\log(1/2)} \leq \|\mathcal{D}^{-\alpha} u\|_{\max\{2,p\},\log(1/2)} \leq C\|u\|_{\max\{2,p\},\alpha} \leq C\|u\|_{\infty,\alpha}.$$

Неравенство точное ввиду примера (5.1.12). Действительно, оценивая как в доказательстве (ii), мы получаем (5.1.13) и

$$M_\infty(f_2; r) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} 2^{\alpha k} r^{2^k} \approx \frac{r}{(1-r)^\alpha}, \qquad r \in I^n.$$

Следовательно, $\|\mathcal{D}^{-\alpha} f_2\|_{p,\log(1/2)} \approx \|f_2\|_{\infty,\alpha}$.

(v). Пусть $u(z) \in h(\infty, \alpha)$ — произвольная функция. Тогда

$$\begin{aligned} M_\infty(\mathcal{D}^{-\alpha} u; r) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha-1} M_\infty(u; \eta r) d\eta \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|u\|_{\infty,\alpha} \int_{I^n} \frac{(1-\eta)^{\alpha-1}}{(1-\eta r)^\alpha} d\eta \leq C_\alpha \|u\|_{\infty,\alpha} \prod_{j=1}^n \log \frac{e}{1-r_j}. \end{aligned}$$

Поэтому $\|\mathcal{D}^{-\alpha} u\|_{\infty,\log(1)} \leq C\|u\|_{\infty,\alpha}$. Неравенство точное ввиду примера

$$f_3(z) = 1/(1-z)^\alpha, \quad \alpha_j > 0.$$

Это завершает доказательство Теоремы 53. ■

5.2 Интегралы и производные в классах $h(p, q, \alpha)$, Блоха, Харди, BMO, Липшица на поликруге

Как было отмечено во Введении, первые результаты о пространствах со смешанной нормой появились в классических работах Харди и Литтлвуда [104], [106], [107], рассматривавшие функции, голоморфные в единичном круге $\mathbb{D} = U^1$. Они, в частности, установили, что

$$\mathcal{D}^\beta\big(H(p, q, \alpha)\big) = H(p, q, \alpha + \beta), \quad 0 < p, q \leq \infty,\ \alpha > 0,\ \alpha + \beta > 0, \tag{5.2.1}$$

где $\mathcal{D}^\beta$ — оператор дробного интегродифференцирования. Позднее, Флетт [91] существенно усовершенствовал и развил методы [104], [106], [107]. Соотношение (5.2.1) было многократно переоткрыто и обобщено в различных областях из $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$, а также для общих весовых функций. Голоморфные и плюригармонические пространства со смешанной нормой в единичном шаре и в более общих областях из $\mathbb{C}^n$ исследовались, например, в [118], [154], [172], [179], [180], [222]. Случай поликруга см. [3], [29], [200], [201], [203], [210], [240].

Наша первая цель — распространить и обобщить соотношение (5.2.1) на n-гармонические функции в поликруге. Следует отметить несколько важных различий с ранее известными случаями.

Если функция $f(z)$ голоморфна, то функция $|f|^p$ n-субгармонична для любого $p > 0$, а ее интегральные средние $M_p(f; r)$ возрастают по r. Этот факт намного облегчает доказательство (5.2.1) для голоморфных функций.

Если функция $u(z)$ плюригармонична, т.е. является вещественной частью голоморфной функции, то, как известно, оператор плюригармоничного сопряжения ограничен в $h(p, q, \alpha)$ для всех $0 < p, q \leq \infty$, см. [118], [154], [29], [179], [180], [222]. Поэтому для плюригармонических функций доказательства фактически сводятся к случаю голоморфных функций.

Мы будем рассматривать n-гармонические функции u, для которых функция $|u|^p$ $(0 < p < 1)$ не обязательно n-субгармоническая, а интегральные средние $M_p(u; r)$, вообще говоря, не монотонны по r. Переход от n-гармонических функций к голоморфным невозможен, поскольку n-гармонические функции, вообще говоря, не являются вещественными частями голоморфных функций. Поэтому нам нужна независимая теория n-гармонических пространств $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой.

Другая особенность состоит в том, что оператор $\mathcal{D}^\beta$ дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля может действовать как дифференциальный оператор по некоторым переменным z_j и одновременно как интегральный оператор по другим переменным z_k.

Известно необычное явление (см. Лемму 36), состоящее в том, что в отличие от $H(p, q, \alpha)$, пространства $h(p, q, \alpha)$ не тривиальны для $0 < p < 1$ и некоторых мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с неположительными компонентами $\alpha_j \leq 0$ (ср. [2], [159], [160]). Этот случай также рассмотрен.

Теорема 54 *Если $\alpha_j > 0, -\infty < \beta_j < \alpha_j$ $(1 \leq j \leq n), 0 < p \leq \infty,\ 0 < q \leq \infty$, то для всех n-гармонических функций в U^n*

$$\|\mathcal{D}^{-\beta} u\|_{p,q,\alpha-\beta} \approx \|u\|_{p,q,\alpha}. \tag{5.2.2}$$

Заметим, что Теорема 54 включает и дробное интегрирование, и дробное дифференцирование. Естественно спросить, останется ли верной соотношение (5.2.2) для мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с неположительными $\alpha_j \leq 0$. Следующая теорема дает частичный ответ на этот вопрос.

Теорема 55 *Если $\alpha_j \leq 0 \leq \beta_j$ $(1 \leq j \leq n), 0 < p < 1,\ 0 < q \leq \infty$, то для всех n-гармонических функций в U^n*

$$\|\mathcal{D}^{\beta} u\|_{p,q,\alpha+\beta} \leq C(p, q, \alpha, \beta, n)\|u\|_{p,q,\alpha}. \tag{5.2.3}$$

Замечание. Теорема 55 является новой даже в одномерном случае, тогда как для весовых пространств Харди, $q = \infty$, $\alpha + \beta > 0$, и функций, гармонических в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$, Теорема 55 установлена Павловичем [160, Теор.1].

Чтобы доказать Теоремы 54 и 55, мы начнем с некоторых полугрупповых формул для оператора $\mathcal{D}^\alpha$ и другого схожего дробного оператора $\widetilde{\mathcal{D}}^{-\gamma}$ на единичном круге $\mathbb{D}$:

$$\widetilde{\mathcal{D}}^{-\gamma} f(z) := \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^1 (1-\eta)^{\gamma-1} \eta^\beta f(\eta z) d\eta, \qquad \gamma, \beta > 0, \quad z = r\zeta \in \mathbb{D}. \tag{5.2.4}$$

Мы можем распространить это определение на поликруг U^n формулой разложения $\widetilde{\mathcal{D}}^\alpha f = \widetilde{\mathcal{D}}^{\alpha_1}_{r_1} \widetilde{\mathcal{D}}^{\alpha_2}_{r_2} \ldots \widetilde{\mathcal{D}}^{\alpha_n}_{r_n} f$.

Лемма 56 *Для функции $f(z)$, непрерывной в единичном круге $\mathbb{D}$ имеют место полугрупповые формулы*

$$
\begin{aligned}
&(i) && \mathcal{D}^{-\alpha-\beta} f = r^{-\beta} \mathcal{D}^{-\alpha}\big\{r^{\beta}\mathcal{D}^{-\beta} f\big\} = \widetilde{\mathcal{D}}^{-\alpha}\mathcal{D}^{-\beta} f, && \alpha,\beta>0, && (5.2.5)\\
&(ii) && \mathcal{D}^{-\alpha}\mathcal{D}^{\beta} f = r^{-\beta}\mathcal{D}^{-(\alpha-\beta)}\big\{r^{\beta} f\big\} = \widetilde{\mathcal{D}}^{-(\alpha-\beta)} f, && \alpha>\beta>0, && (5.2.6)\\
&(iii) && \mathcal{D}^{-\alpha}\mathcal{D}^{\beta} f = r^{-\alpha}\mathcal{D}^{\beta-\alpha}\big\{r^{\alpha} f\big\}, && \beta>\alpha>0, && (5.2.7)\\
&(iv) && \mathcal{D}^{-\alpha}\mathcal{D}^{m} f = \mathcal{D}^{m}\mathcal{D}^{-\alpha} f, && m\in\mathbb{Z}_+,\ \alpha>0. && (5.2.8)
\end{aligned}
$$

Доказательство. (i) По определениям операторов $D^{\alpha}, \mathcal{D}^{\alpha}, \widetilde{\mathcal{D}}^{-\alpha}$ имеем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-\alpha-\beta} f &= r^{-\alpha} r^{-\beta} D^{-\alpha} D^{-\beta} f = r^{-\beta}\mathcal{D}^{-\alpha}\big\{r^{\beta} r^{-\beta} D^{-\beta} f\big\} = r^{-\beta}\mathcal{D}^{-\alpha}\big\{r^{\beta}\mathcal{D}^{-\beta} f\big\}\\
&= r^{-\beta}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\eta)^{\alpha-1}\eta^{\beta} r^{\beta}\mathcal{D}^{-\beta} f(\eta z)\,d\eta = \widetilde{\mathcal{D}}^{-\alpha}\,\mathcal{D}^{-\beta} f.
\end{aligned}
$$

(ii) Используя формулы обращения (3.2.1)–(2.1.5) и (5.2.4)–(5.2.5), получаем для $\alpha > \beta > 0$

$$
\mathcal{D}^{-\alpha}\mathcal{D}^{\beta} f = \mathcal{D}^{-(\alpha-\beta)-\beta}\mathcal{D}^{\beta} f = r^{-\beta}\mathcal{D}^{-(\alpha-\beta)}\big\{r^{\beta}\mathcal{D}^{-\beta}\mathcal{D}^{\beta} f\big\} = \widetilde{\mathcal{D}}^{-(\alpha-\beta)} f.
$$

(iii) Вновь по формулам обращения (3.2.1)–(2.1.5) для $\beta > \alpha > 0$ имеем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-\alpha}\mathcal{D}^{\beta} f &= r^{-\alpha} D^{\beta-\alpha} D^{-(\beta-\alpha)} D^{-\alpha}\big\{\mathcal{D}^{\beta} f\big\} = r^{-\alpha} D^{\beta-\alpha} D^{-\beta}\big\{\mathcal{D}^{\beta} f\big\}\\
&= r^{-\alpha} D^{\beta-\alpha}\big\{r^{\beta}\mathcal{D}^{-\beta}\mathcal{D}^{\beta} f\big\} = r^{-\alpha} D^{\beta-\alpha}\big\{r^{\beta} f\big\} = r^{-\alpha}\mathcal{D}^{\beta-\alpha}\big\{r^{\alpha} f\big\}.
\end{aligned}
$$

(iv) Искомая формула получается разлагая обе части (5.2.7) и используя соотношение коммутативности $\mathcal{D}^{-\alpha}\big\{r^{m} D^{m} f\big\} = r^{m} D^{m}\mathcal{D}^{-\alpha} f$. Рутинные детали опускаем. ■

Замечание. Итерацией можно легко вывести аналоги (5.2.5)–(5.2.8) в высших размерностях.

Доказательство Теорем 54 и 55.

Без ограничивая общности, можно в доказательствах считать, что $n = 2$. Во-первых, заметим, что для пространств Бергмана $h(p,p,\alpha)$ результаты Теоремы 54 немедленно следуют итерацией одномерного результата. Однако при $p \neq q$ итерация не работает. Во-вторых, основное внимание мы уделим на малые значения p, q ($0 < p < 1$ или $0 < q < 1$), так как для $p, q \geq 1$ существует несколько доказательств, подходящих к нашей ситуации. Тем не менее, мы дадим простое и короткое доказательство также и в случае $p, q \geq 1$.

Начнем с дробных интегралов, т.е. когда $\beta_j > 0$ $(1 \leq j \leq 2)$.

Случай $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty$. Применим старый результат Харди и Литтлвуда [104], [106], [88, с.490] об интеграции в весовых пространствах Лебега

$$
\int_{I^2} (1-r)^{(\alpha-\beta)q-1}\left(\mathcal{D}^{-\beta} g(r)\right)^{q} dr \leq C(\alpha,\beta,q)\int_{I^2}(1-r)^{\alpha q-1} g(r)^{q} dr, \qquad (5.2.9)
$$

где $g(r) \geq 0\,(r \in I^2)$, $1 \leq q < \infty$, $\alpha_j > \beta_j > 0$.

В силу неравенства Минковского и (5.2.9) будем иметь

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}^{-\beta}u\|^q_{p,q,\alpha-\beta} &= \int_{I^2}(1-r)^{(\alpha-\beta)q-1}\big\|\mathcal{D}^{-\beta}u\big\|^q_{L^p(T^2)}dr\\ &\le \int_{I^2}(1-r)^{(\alpha-\beta)q-1}\left(\mathcal{D}^{-\beta}\|u\|_{L^p(T^2)}\right)^q dr\\ &\le C\int_{I^2}(1-r)^{(\alpha-\beta)q-1}\|u\|^q_{L^p(T^2)}dr = \|u\|^q_{p,q,\alpha}.\end{aligned}$$

Случай $1\le p\le\infty, q=\infty$. Полагая $u\in h(p,\infty,\alpha)$, имеем

$$(1-r)^\alpha M_p(u;r)\le\|u\|_{p,\infty,\alpha},\qquad r=(r_1,r_2)\in I^2.$$

По неравенству Минковского

$$\begin{aligned}M_p(\mathcal{D}^{-\beta}u;r) &\le \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{I^2}(1-\eta)^{\beta-1}M_p(u;\eta r)d\eta\\ &\le \|u\|_{p,\infty,\alpha}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{I^2}\frac{(1-\eta)^{\beta-1}}{(1-r\eta)^\alpha}d\eta\le C(\alpha,\beta)\frac{\|u\|_{p,\infty,\alpha}}{(1-r)^{\alpha-\beta}}.\end{aligned}$$

Следовательно $\|\mathcal{D}^{-\beta}u\|_{p,\infty,\alpha-\beta}\le C\|u\|_{p,\infty,\alpha}$, что и требовалось.

Случай $0<q<1,\ 0<q\le p\le\infty$. Пусть $u(z_1,z_2)\in h(p,q,\alpha)$, и u_ρ — растянутая функция, определенная по формуле $u_\rho(z)=u(\rho z)=u(\rho_1z_1,\rho_2z_2)$, $\rho\in I^2$. Поскольку $q\le\min\{2,p\}$ и пространства $h(p,q,\alpha)$ расширяются по q (см. Теор. 40(iii)), то по Леммам 54 и 55 получаем

$$\|\mathcal{D}^{-\beta}u_\rho\|_{h^p}\le C\|u_\rho\|_{p,q,\beta},\qquad \rho\in I^2,$$

или эквивалентно

$$M_p\big(\mathcal{D}^{-\beta}u;\rho r\big)\le C\|u_\rho\|_{p,q,\beta},\qquad r,\rho\in I^2,$$

для любых $\beta_j>0, j=1,2$. По лемме Фату

$$\begin{aligned}M^q_p\big(\mathcal{D}^{-\beta}u;\rho\big) &\le \liminf_{r_1,r_2\to1-}M^q_p\big(\mathcal{D}^{-\beta}u;\rho r\big)\\ &\le C\int_{I^2}(1-r)^{\beta q-1}M^q_p(u;\rho r)dr = C\,\mathcal{D}^{-\beta q}\big\{M^q_p(u;\rho)\big\}.\end{aligned}$$

Интегрирование с весом по неравенству (5.2.9) ведет к

$$\|\mathcal{D}^{-\beta}u\|^q_{p,q,\alpha-\beta}\le C\int_{I^2}(1-\rho)^{(\alpha-\beta)q-1}\,\mathcal{D}^{-\beta q}\big\{M^q_p(u;\rho)\big\}d\rho\le C\|u\|^q_{p,q,\alpha}.$$

Случай $0<p<1, 0<p\le q<\infty$. Неравенство (5.1.2) Леммы 54 приводит к

$$M_p\big(\mathcal{D}^{-\beta}u;\rho r\big)\le C\|u_\rho\|_{p,p,\beta},\qquad r,\rho\in I^2.$$

для любых $\beta_j>0, j=1,2$. По лемме Фату

$$M^p_p\big(\mathcal{D}^{-\beta}u;\rho\big)\le C\int_{I^2}(1-r)^{\beta p-1}M^p_p(u;\rho r)dr = C\,\mathcal{D}^{-\beta p}\big\{M^p_p(u;\rho)\big\}.$$

Возведя обе части этого неравенства в степень $q/p \geq 1$ и затем интегрируя с применением (5.2.9), получаем

$$\|\mathcal{D}^{-\beta}u\|^q_{p,q,\alpha-\beta} \leq C \int_{I^2} (1-\rho)^{p(\alpha-\beta)q/p-1} \left[\mathcal{D}^{-\beta p} M_p^p(u;\rho)\right]^{q/p} d\rho \leq C\|u\|^q_{p,q,\alpha}.$$

Случай $0 < p < 1, q = \infty$ доказывается проще. Таким образом, доказательство для дробных интегралов завершено.

Теперь приступим к доказательству случая дробных производных, т.е. когда $\beta_j \geq 0\,(1 \leq j \leq 2)$. Мы совместим доказательства этого случая и Теоремы 55. Для любого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2),\ \ \alpha_j \in \mathbb{R}$ и функции $u(z) = u(r\zeta) \in h(p,q,\alpha)$ нам нужно доказать неравенство

$$\|\mathcal{D}^{\beta}u\|_{p,q,\alpha+\beta} \leq C\|u\|_{p,q,\alpha}. \tag{5.2.10}$$

Вначале докажем (5.2.10) для мультииндексов $\beta = m = (m_1, m_2)$ с целыми $m_j \in \mathbb{Z}_+$.

Случай $0 < p \leq q < \infty$. Для заданной точки $z = (z_1, z_2) = (r_1 w_1, r_2 w_2) \in U^2$ определим бикруг $B_z = B_{z_1} \times B_{z_2}$, где $B_{z_j} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta_j - z_j| < (1-r_j)/2\}$, $j = 1, 2$. Неравенства Коши для n-гармонических функций и известное неравенство Харди-Литтлвуда-Фефферманa-Стейна о субгармоническом поведении функции $|u|^p$ ведут к "дифференцированному" варианту (ср. [2], [89], [200], [201]):

$$|\mathcal{D}^m u(z_1,z_2)|^p \leq \frac{C(p,m)}{|B_{z_1}||B_{z_2}|(1-r_1)^{m_1 p}(1-r_2)^{m_2 p}} \iint\limits_{B_{z_1}\times B_{z_2}} |u(\zeta_1,\zeta_2)|^p dm_4(\zeta),$$

где $|B_{z_j}|$ — площадь круга B_{z_j}. При $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in B_z$ имеем

$$\rho_j' < |\zeta_j| = \rho_j < \rho_j'', \qquad \text{where} \qquad \rho_j' = \max\left\{0, \frac{3r_j - 1}{2}\right\}, \qquad \rho_j'' = \frac{1+r_j}{2},$$

для $j = 1, 2$. Следовательно

$$\frac{1}{2}(1-r_j) < 1 - |\zeta_j| < \frac{3}{2}(1-r_j), \qquad j = 1, 2.$$

Отсюда и из простого неравенства

$$|1 - \zeta_j \bar{z}_j| < 3(1 - |\zeta_j|), \qquad |z_j| < 1,\ \zeta_j \in B_{z_j},$$

следует, что

$$|\mathcal{D}^m u(z_1,z_2)|^p \leq C(m,p) \int\limits_{B_{z_1}} \int\limits_{B_{z_2}} \frac{|u(\zeta_1,\zeta_2)|^p\, dm_2(\zeta_1)\, dm_2(\zeta_2)}{|1-\zeta_1\bar{z}_1|^{2+m_1 p}|1-\zeta_2\bar{z}_2|^{2+m_2 p}}. \tag{5.2.11}$$

Затем расширим область интегрирования в (5.2.11) до колец $\rho_j' < |\zeta_j| < \rho_j''$ $(j = 1, 2)$ и проинтегрируем по тору T^2:

$$M_p^p(\mathcal{D}^m u; r_1, r_2) \leq \frac{C(m,p)}{(1-r_1)^{1+m_1 p}(1-r_2)^{1+m_2 p}} \int\limits_{\rho_1'}^{\rho_1''} \int\limits_{\rho_2'}^{\rho_2''} M_p^p(u; \rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2.$$

По неравенству Гельдера с индексами $q/p \geq 1$ и $q/(q-p)$ получаем

$$M_p^p(\mathcal{D}^m u; r_1, r_2) \leq \frac{C(m,p)}{(1-r_1)^{m_1 p}(1-r_2)^{m_2 p}} \left[\int\limits_{\rho_1'}^{\rho_1''} \int\limits_{\rho_2'}^{\rho_2''} \frac{M_p^q(u; \rho_1, \rho_2)\, d\rho_1\, d\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)} \right]^{p/q},$$

и

$$\prod_{j=1}^{2} (1-r_j)^{(\alpha_j+m_j)q-1} M_p^q(\mathcal{D}^m u; r) \leq C \prod_{j=1}^{2} (1-r_j)^{\alpha_j q-1} \int\limits_{\rho_1'}^{\rho_1''} \int\limits_{\rho_2'}^{\rho_2''} \frac{M_p^q(u;\rho) d\rho_1\, d\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}.$$

Проинтегрируем по I^2 и применим теорему Фубини

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}^m u\|_{p,q,\alpha+m}^q &\leq C \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \prod_{j=1}^{2} (1-r_j)^{\alpha_j q-1} \left[\int\limits_{\rho_1'}^{\rho_1''} \int\limits_{\rho_2'}^{\rho_2''} \frac{M_p^q(u;\rho)\, d\rho_1\, d\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)} \right] dr_1 dr_2 \\
&\leq C \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 M_p^q(u;\rho) \prod_{j=1}^{2} \left[\int\limits_{\max\{0, 2\rho_j - 1\}}^{(2\rho_j+1)/3} (1-r_j)^{\alpha_j q-1} dr_j \right] \frac{d\rho_1\, d\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)} \\
&\leq C \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 M_p^q(u;\rho) \prod_{j=1}^{2} (1-\rho_j)^{\alpha_j q} \frac{d\rho_1\, d\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)} \leq C(p,q,\alpha,m) \|u\|_{p,q,\alpha}^q.
\end{aligned}$$

Случай $0 < q < p \leq \infty$. Запишем неравенство (5.2.11) с q вместо p

$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}^m u(z_1, z_2)|^q &\leq C(m,q) \int\limits_{B_{z_1}} \int\limits_{B_{z_2}} \frac{|u(\zeta_1, \zeta_2)|^q\, dm_2(\zeta_1)\, dm_2(\zeta_2)}{|1-\zeta_1 \bar{z}_1|^{2+m_1 q}\, |1-\zeta_2 \bar{z}_2|^{2+m_2 q}} \\
&\leq C(m,q) \int\limits_{\rho_1'}^{\rho_1''} \int\limits_{\rho_2'}^{\rho_2''} \left[\int_{T^2} \frac{|u(\rho_1 t_1 w_1, \rho_2 t_2 w_2)|^q\ dm_2(t)}{|1-\rho_1 r_1 t_1|^{2+m_1 q} |1-\rho_2 r_2 t_2|^{2+m_2 q}} \right] \rho_1 \rho_2 d\rho_1 d\rho_2,
\end{aligned}$$

где $z = rw, \zeta = \rho t,\ r, \rho \in I^2,\ w, t \in T^2$. Применим неравенство Минковского с показателем $p/q \geq 1$

$$M_p^q(\mathcal{D}^m u; r_1, r_2) \leq \frac{C(m,q)}{(1-r_1)^{1+m_1 q}(1-r_2)^{1+m_2 q}} \int\limits_{\rho_1'}^{\rho_1''} \int\limits_{\rho_2'}^{\rho_2''} M_p^q(u; \rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2.$$

Остается проинтегрировать и применить теорему Фубини.

Случай $q = \infty$ проще, поэтому его пропустим.

Таким образом, для $m = (m_1, m_2),\ m_j \in \mathbb{Z}_+$ мы доказали, что

$$\|\mathcal{D}^m u\|_{p,q,\alpha+m} \leq C \|u\|_{p,q,\alpha}.$$

Возьмем теперь произвольный мультииндекс $\beta = (\beta_1, \beta_2), \beta_j \geq 0$ и положим $m_j - 1 < \beta_j \leq m_j$ $(m_j \in \mathbb{Z}_+)$.

Воспользуемся полугрупповыми формулами из Леммы 56. Как легко видеть, интеграл (5.2.4) отличается от $\mathcal{D}^{-\gamma}$ только несущественным множителем η^{β} в подынтегральном выражении. Поэтому утверждения предыдущей части настоящей теоремы справедливы также для $\widetilde{\mathcal{D}}^{-\beta}$. Следовательно

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{D}^{(\beta_1,\beta_2)}u\right\|_{p,q,\alpha+\beta} &= \left\|\widetilde{\mathcal{D}}^{(-(m_1-\beta_1),-(m_2-\beta_2))}\mathcal{D}^{(m_1,m_2)}u\right\|_{p,q,\alpha+\beta}\\ &\le C\left\|\mathcal{D}^{(m_1,m_2)}u\right\|_{p,q,\alpha+m} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}.\end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим смешанный случай, когда $\beta_1 \le 0 \le \beta_2$, т.е. оператор $\mathcal{D}^{(\beta_1,\beta_2)}$ действует как первообразная по r_1 и как производная по r_2. Пусть $0 < p \le \infty, 0 < q < \infty, \beta_j < \alpha_j$ и обозначим $v(z_1,z_2) := \mathcal{D}^{-\beta_2}u(z_1,z_2)$. Тогда в силу доказанной части данной теоремы и по теореме Фубини

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{D}^{-\beta}u\|^q_{p,q,\alpha-\beta}\\ &= \int_0^1 (1-r_2)^{(\alpha_2-\beta_2)q-1}\left[\int_0^1 (1-r_1)^{(\alpha_1-\beta_1)q-1} M_p^q(\mathcal{D}_{r_1}^{-\beta_1}v;r_1,r_2)dr_1\right]dr_2\\ &\le C\int_0^1 (1-r_2)^{(\alpha_2-\beta_2)q-1}\left[\int_0^1 (1-r_1)^{\alpha_1 q-1} M_p^q(v;r_1,r_2)dr_1\right]dr_2 \le C\|u\|^q_{p,q,\alpha}.\end{aligned}$$

Таким образом, доказаны обе Теоремы 54 и 55. ■

Следующие две теоремы доказываются аналогичным образом. Первая из них "о-малая" версия Теоремы 54.

Теорема 56 *Пусть $u(z)$ — n-гармоническая функция в U^n, и $\alpha_j > 0$, $\alpha_j > \beta_j$ $(1 \le j \le n)$, $0 < p \le \infty$.*

(i) Если $0 < q < \infty$ и $u \in h(p,q,\alpha)$, то для каждого $j \in [1,n]$

$$(1-r)^{\alpha-\beta}M_p(\mathcal{D}^{-\beta}u;r) = o(1) \qquad \text{при} \qquad r_j \to 1-\,.$$

(ii) Следующие два утверждения равносильны для каждого $j \in [1,n]$

$$\begin{aligned}(1-r)^{\alpha}M_p(u;r) &= o(1) \qquad \text{при} \qquad r_j \to 1-,\\ (1-r)^{\alpha-\beta}M_p\big(\mathcal{D}^{-\beta}u;r\big) &= o(1) \qquad \text{при} \qquad r_j \to 1-\,.\end{aligned}$$

Теорема 57 *Теоремы 54–56 остаются в силе для интегральных операторов $D^{-\beta}$ или $\widetilde{\mathcal{D}}^{-\beta}$ взамен $\mathcal{D}^{-\beta}$, и для дифференциальных операторов D^{β} взамен $\mathcal{D}^{\beta}$, а также для обычных частных производных. В частности,*

$$\begin{aligned}&\|D^{-\beta}u\|_{p,q,\alpha-\beta} \approx \|u\|_{p,q,\alpha}, && \alpha_j > \beta_j > 0,\ 0 < p,q \le \infty,\\ &\|\widetilde{\mathcal{D}}^{-\beta}u\|_{p,q,\alpha-\beta} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}, && \alpha_j > \beta_j > 0,\ 0 < p,q \le \infty,\\ &\|\partial^{\lambda}u\|_{p,q,\alpha+\lambda} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}, && \alpha_j \le 0,\ 0 < p < 1,\ 0 < q \le \infty,\\ &\|\partial^{\lambda}u\|_{p,q,\alpha+\lambda} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}, && \alpha_j > 0,\ 0 < p,q \le \infty,\end{aligned}$$

где $\partial^{\lambda} = \partial^{\lambda_1}\cdots\partial^{\lambda_n}$, и ∂^{λ_j} обозначает смешанную частную производную порядка $\lambda_j \in \mathbb{Z}_+$ по переменным r_j и θ_j $(z_j = r_j e^{i\theta_j})$.

В качестве приложения Теорем 54–57 теперь определим и изучим два различных пространства Блоха $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}h$ функций, n-гармонических в U^n. Первое пространство $\mathcal{B}$ соответствует введенному Тимони [227] для голоморфных функций в U^n (см. также [65]), тогда как второе пространство $\mathcal{B}h$ согласовано с определением пространств $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой при $p=q=\infty$ (см. также [65], [240]).

Определение. Скажем, что функция $u(z)$, n-гармоническая в U^n, принадлежит пространству Блоха $\mathcal{B}=\mathcal{B}(U^n)$ или $\mathcal{B}h=\mathcal{B}h(U^n)$, если

$$\|u\|_{\mathcal{B}} = |u(0)| + \max_{1\le j\le n}\sup_{z\in U^n}(1-|z_j|)\left|\frac{\partial}{\partial r_j}u(z)\right| < +\infty,$$
$$\|u\|_{\mathcal{B}h} = \sup_{z\in U^n}(1-|z|)|\mathcal{D}^1 u(z)| < +\infty,$$

соответственно. Здесь $\quad \mathcal{D}^1 u(z) = D^1\{ru(z)\} = \dfrac{\partial^n}{\partial r_1\cdots\partial r_n}\{r_1\cdots r_n u(r\zeta)\}$.

Легко видеть, что

$$\|u\|_{\mathcal{B}} \approx |u(0)| + \sum_{j=1}^{n}\sup_{z\in U^n}(1-|z_j|)\left|\frac{\partial}{\partial r_j}u(z)\right|,$$

$$\|u\|_{\mathcal{B}h} = \|\mathcal{D}^1 u\|_{\infty,\infty,1} \approx \sup_{1/2<r_1,\cdots,r_n<1}\prod_{j=1}^{n}(1-r_j)M_\infty(\mathcal{D}^1 u; r).$$

Следующая теорема показывает, что пространство $\mathcal{B}h$ строго шире, чем $\mathcal{B}$.

Теорема 58 *Вложение $\mathcal{B}\subset\mathcal{B}h$ непрерывно и строго.*

Доказательство. Положим $u\in\mathcal{B}(U^2)$. Поскольку

$$\mathcal{D}^1 = 1 + r_1\frac{\partial}{\partial r_1} + r_2\frac{\partial}{\partial r_2} + r_1r_2\frac{\partial^2}{\partial r_1\partial r_2},$$

то

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{B}h} &= \sup_{z\in U^2}(1-|z_1|)(1-|z_2|)|\mathcal{D}^1 u(z_1,z_2)| \\ &\le \sup_{z\in U^2}(1-r_1)(1-r_2)\left|\frac{\partial u}{\partial r_1}\right| + \sup_{z\in U^2}(1-r_1)(1-r_2)\left|\frac{\partial u}{\partial r_2}\right| \\ &\quad + \sup_{z\in U^2}(1-r_1)(1-r_2)|u(z_1,z_2)| + \sup_{z\in U^2}(1-r_1)(1-r_2)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial r_1\partial r_2}\right| \\ &\equiv I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}$$

Ясно, что выражения I_1 и I_2 мажорируются нормой $\|u\|_{\mathcal{B}}$. Для оценки I_3 и I_4 воспользуемся Теоремой 57,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \sup_{0<r_2<1}(1-r_2)\Big[\sup_{0<r_1<1}(1-r_1)|u(z_1,z_2)|\Big] \\
&\le C\sup_{0<r_2<1}(1-r_2)\left(|u(0,z_2)| + \sup_{0<r_1<1}(1-r_1)^2\left|\frac{\partial u(z_1,z_2)}{\partial r_1}\right|\right) \\
&\le C|u(0,0)| + C\sup_{0<r_2<1}(1-r_2)^2\left|\frac{\partial u(0,z_2)}{\partial r_2}\right| + C\sup_{0<r_1,r_2<1}(1-r_1)\left|\frac{\partial u(z_1,z_2)}{\partial r_1}\right| \\
&\le C\|u\|_{\mathcal{B}}, \\
I_4 &= \sup_{z\in U^2}(1-r_1)(1-r_2)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial r_1\partial r_2}\right| \le C\sup_{z\in U^2}(1-r_1)\left|\frac{\partial u}{\partial r_1}\right| \le C\|u\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\|u\|_{\mathcal{B}h} \le C\|u\|_{\mathcal{B}}$. Обратное вложение ложно ввиду примера $f_0(z_1,z_2) = \prod_{j=1}^{2}\log\frac{e}{1-z_j}$, который принадлежит $\mathcal{B}h(U^2)$, но не $\mathcal{B}(U^2)$. Доказательство завершено. ■

Более широкое пространство Блоха $\mathcal{B}h$ обладает рядом преимуществ. В отличие от $\mathcal{B}$, пространство Блоха $\mathcal{B}h$ является образом $L^\infty(U^n)$ при действии оператора типа Бергмана

$$T_{\beta,\gamma}(u)(z) = \frac{(1-|z|^2)^\gamma}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_{U^n}(1-|\zeta|^2)^{\beta-1}P_{\beta+\gamma}(z,\zeta)u(\zeta)dm_{2n}(\zeta),$$

где $P_{\beta+\gamma} = \mathcal{D}^{\beta+\gamma}P$ — ядро Пуассона–Бергмана, см. (3.2.2). Именно, отображение $T_{\beta,0} : L^\infty(U^n) \longrightarrow \mathcal{B}h$ ограничено и сюръективно. А отображение $T_{\beta,\gamma} : \mathcal{B}h \longrightarrow L^\infty(U^n)$ ограничено при $\beta_j, \gamma_j > 0\,(1 \le j \le n)$, см. Раздел 3.2.

Теорема 59 *Если $\alpha_j > 0\,(1 \le j \le n)$, то $\mathcal{D}^{-\alpha}\Big(h(\infty,\infty,\alpha)\Big) = \mathcal{B}h$ с эквивалентными нормами.*

Доказательство. Докажем типичный случай $0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2$. В силу полугрупповых формул Леммы 56

$$\mathcal{D}^{(1,1)}\mathcal{D}^{-(\alpha_1,\alpha_2)}u = \mathcal{D}_{r_1}^{-\alpha_1}\mathcal{D}_{r_2}^{-\alpha_2}\mathcal{D}_{r_1}^{1}\mathcal{D}_{r_2}^{1}u = r_1^{-\alpha_1}\widetilde{\mathcal{D}}_{r_2}^{-(\alpha_2-1)}\mathcal{D}_{r_1}^{1-\alpha_1}\big\{r_1^{\alpha_1}u\big\}.$$

Следовательно по Теоремам 54 и 57

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}^{-(\alpha_1,\alpha_2)}u\|_{\mathcal{B}h} &= \|\mathcal{D}^{(1,1)}\mathcal{D}^{-(\alpha_1,\alpha_2)}u\|_{\infty,\infty,(1,1)} \\
&\approx \big\|\widetilde{\mathcal{D}}_{r_2}^{-(\alpha_2-1)}\mathcal{D}_{r_1}^{1-\alpha_1}\big\{r_1^{\alpha_1}u\big\}\big\|_{\infty,\infty,(1,1)} \\
&\approx \big\|\mathcal{D}_{r_1}^{1-\alpha_1}\big\{r_1^{\alpha_1}u\big\}\big\|_{\infty,\infty,(1,\alpha_2)} \approx \|u\|_{\infty,\infty,(\alpha_1,\alpha_2)}.
\end{aligned}$$

■

Наш следующий результат о дифференцировании в классах Харди n-гармонических функций.

Теорема 60 *Если* $\alpha_j > 0$ $(1 \le j \le n)$, $1 < p \le q \le \infty$, $2 \le q \le \infty$, $1 < p \le p_1 \le \infty$, *то*

$$\mathcal{D}^\alpha : h^p \longrightarrow h(p,q,\alpha), \tag{5.2.12}$$
$$\mathcal{D}^\alpha : h^p \longrightarrow h(p_1,q,\alpha + 1/p - 1/p_1), \tag{5.2.13}$$
$$\mathcal{D}^\alpha : h^p \longrightarrow h(p,\infty,\alpha), \qquad 0 < p \le \infty. \tag{5.2.14}$$

Доказательство. Первое соотношение (5.2.12) вытекает из неравенства типа Литтлвуда–Пэли (см. Теорему 8)

$$\Big\| \|(1-r)^\alpha \mathcal{D}^\alpha u\|_{L^q(dr/(1-r))} \Big\|_{L^p(T^n)} \le C(p,q,\alpha,n)\|u\|_{h^p},$$

и интегрального неравенства Минковского в форме

$$\Big\| \|F(\xi,\eta)\|_{L^p(d\xi)} \Big\|_{L^q(d\eta)} \le \Big\| \|F(\xi,\eta)\|_{L^q(d\eta)} \Big\|_{L^p(d\xi)}, \qquad 0 < p \le q \le \infty. \tag{5.2.15}$$

Действительно, для произвольной функции $u(z)$ из h^p $(p < \infty)$ имеем

$$\|\mathcal{D}^\alpha u\|_{p,q,\alpha} \le \Big\| \|(1-r)^\alpha \mathcal{D}^\alpha u\|_{L^q(dr/(1-r))} \Big\|_{L^p(T^n)} \le C\|u\|_{h^p}.$$

Второе соотношение (5.2.13) немедленно получается совмещением (5.2.12) и вложения (iv) Теоремы 40.

Третье соотношение (5.2.14) содержится в Теоремах 8 (при $1 \le p \le \infty$) и 55 (при $0 < p < 1$). ∎

Замечание. Один из предельных случаев в Теореме 60

$$\mathcal{D}^1 : h^1 \longrightarrow h(1,1,1)$$

не имеет места даже для голоморфных в единичном круге функций. Мергелян [19] и позднее Рудин [176] (см. также упражнения к Главе 6 из [4]) построили пример ограниченной голоморфной функции (произведения Бляшке), у которой производная неинтегрируема в круге, т.е. не принадлежит классу $H(1,1,1)$.

Теперь перейдем к интегрированию в пространствах со смешанной нормой.

Теорема 61 *Если* $\alpha_j > 0$ $(1 \le j \le n)$, *то*

$$\mathcal{D}^{-\alpha} : h(p,p,\alpha) \longrightarrow h^p, \qquad 0 < p \le 2, \tag{5.2.16}$$
$$\mathcal{D}^{-\alpha} : h(p,2,\alpha) \longrightarrow h^p, \qquad 2 \le p < \infty, \tag{5.2.17}$$

или, объединяя,

$$\mathcal{D}^{-\alpha} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h^p, \qquad 0 < p < \infty,\ 0 < q \le \min\{2,p\}. \tag{5.2.18}$$

При этом эти соотношения точны в том смысле, что индекс q *нельзя увеличить.*

Доказательство. Соотношения (5.2.16), (5.2.17), (5.2.18) фактически совпадают с утверждениями Лемм 54 и 55. Покажем точность этих соотношений.

При $0 < p \leq 2$, $q > p$ ложность соотношения (5.2.18) можно доказать контрпримером, см. (2.3.10),

$$F_{\alpha+1/p,\lambda}(z) = (1-z)^{-\alpha-1/p}\left(\log\frac{e}{1-z}\right)^{-\lambda} = \prod_{j=1}^{n}(1-z_j)^{-\alpha_j-1/p}\left(\log\frac{e}{1-z_j}\right)^{-\lambda_j}, \ z \in U^n,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\alpha_j > 0$, $1/q < \lambda_j < 1/p$, $1 \leq j \leq n$. По Лемме 31(a) функция $F_{\alpha+1/p,\lambda}(z) \in H(p,q,\alpha)$, но, с другой стороны, ее первообразная порядка α

$$\mathcal{D}^{-\alpha}F_{\alpha+1/p,\lambda}(z) \approx F_{1/p,\lambda}(z) = (1-z)^{-1/p}\left(\log\frac{e}{1-z}\right)^{-\lambda}, \qquad z \in U^n,$$

не принадлежит классу Харди $H^p(U^n)$. Действительно, по Лемме 30

$$M_p^p\big(\mathcal{D}^{-\alpha}F_{\alpha+1/p,\lambda}; r\big) = \int_{T^n}\frac{dm_n(\zeta)}{|1-r\zeta|\left|\log\frac{e}{1-r\zeta}\right|^{\lambda p}} \approx \left(\log\frac{e}{1-r}\right)^{1-\lambda p} \to +\infty$$

при $r_j \to 1-$.

При $2 < p < \infty$, $q > 2$ ложность соотношения (5.2.18) можно доказать контрпримером

$$f_0(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{2^{\alpha k}}{\sqrt{k+1}}\, z^{2^k}, \qquad z \in U^n.$$

С одной стороны, функция $f_0(z) \in H(p,q,\alpha)$ по Теореме 36, так как ее коэффициенты $a_k = \frac{2^{\alpha k}}{\sqrt{k+1}}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{|a_k|^q}{2^{\alpha kq}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{1}{(k+1)^{q/2}} < +\infty.$$

С другой стороны, первообразная функции f_0 порядка α

$$\mathcal{D}^{-\alpha}f_0(z) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\, z^{2^k},$$

по Теореме 30 не принадлежит классу $H^2(U^n)$, ибо ее коэффициенты $b_k = (k+1)^{-1/2}$ не принадлежат малому классу ℓ^2, и значит $\mathcal{D}^{-\alpha}f_0$ не принадлежит ни какому классу Харди $H^p(U^n)$. ■

Теорема 62 *Если $\beta_j > 0$, $\alpha_j < \beta_j < \alpha_j + 1/p$ $(1 \leq j \leq n)$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $p_0 = \min\limits_{1\leq j\leq n} 1/(\alpha_j + 1/p - \beta_j)$, то имеют место точные соотношения*

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h^s, \qquad 0 < s < p_0, \qquad (5.2.19)$$

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h^{p_0}, \qquad 0 < q \leq p_0. \qquad (5.2.20)$$

Доказательство. Докажем лишь (5.2.19), так как соотношение (5.2.20) можно доказать аналогичным образом.

Пусть вначале $1 \le p \le \infty$. Достаточно доказать (5.2.19) для наиболее широких классов $h(p,q,\alpha)$, $1 \le q \le \infty$, и наиболее узких классов h^s, $1 < s < p_0$. Заметим, что $p < p_0$, так как $p < 1/(\alpha_j + 1/p - \beta_j)$, $j = 1, 2$. Поэтому можем считать, что $1 \le p < s < p_0$. Пусть $u(z_1, z_2) \in h(p,q,\alpha)$ — произвольная функция в U^2. Для любого $r \in I^2$ определим линейный функционал на $L^{s'}(T^2)$, порожденный функцией $\varphi(z_1, z_2) = \mathcal{D}^{-\beta} u(z_1, z_2)$:

$$F_\varphi(g) = \int_{T^2} \varphi(r_1\zeta_1, r_2\zeta_2)\, g(\zeta_1, \zeta_2)\, dm_2(\zeta), \qquad g \in L^{s'}(T^2).$$

Функционал F_φ можно записать в виде

$$F_\varphi(g) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{I^2} (1-\eta)^{\beta-1} \left(\int_{T^2} u(\eta_1 r_1 \zeta_1, \eta_2 r_2 \zeta_2)\, g(\zeta_1, \zeta_2)\, dm_2(\zeta) \right) d\eta.$$

Интеграл Пуассона функции g обозначим через $v(z_1, z_2)$. Применяя теорему Фубини, для внутреннего интеграла получаем

$$\begin{aligned} &\int_{T^2} u(\eta_1 r_1 \zeta_1, \eta_2 r_2 \zeta_2)\, g(\zeta_1, \zeta_2)\, dm_2(\zeta) \\ &\qquad = \int_{T^2} g(\zeta_1, \zeta_2) \left[\int_{T^2} P(\sqrt{\eta}\, r\, \zeta, w)\, u(\sqrt{\eta}\, w)\, dm_2(w) \right] dm_2(\zeta) \\ &\qquad = \int_{T^2} u(\sqrt{\eta}\, w)\, v(\sqrt{\eta}\, r\, w)\, dm_2(w). \end{aligned}$$

Подставляя будем иметь

$$F_\varphi(g) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{I^2} (1-\eta)^{\beta-1} \left(\int_{T^2} u(\sqrt{\eta}\, \zeta)\, v(\sqrt{\eta}\, r\, \zeta)\, dm_2(\zeta) \right) d\eta.$$

Затем дважды применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\begin{aligned} |F_\varphi(g)| &\le \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{I^2} (1-\eta)^{\beta-1} M_p(u; \sqrt{\eta})\, M_{p'}(v; \sqrt{\eta}\, r)\, d\eta \\ &\le C_\beta \int_{I^2} (1-\eta)^{\beta-1} (1-\eta)^{\beta-\alpha} M_p(u;\eta)\, M_{p'}(v;\eta)\, \frac{d\eta}{1-\eta} \\ &\le C_\beta \|u\|_{p,q,\alpha} \|v\|_{p',q',\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Согласно вложениям (i) и (ix) Теоремы 40

$$\|v\|_{p',q',\beta-\alpha} \le \|v\|_{p',q',\min\{\beta_1-\alpha_1, \beta_2-\alpha_2\}} \le C\|v\|_{h^{s'}},$$

поскольку $1 < s' < p' \le \infty$, и условие $\min\{\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2\} > 1/s' - 1/p'$ равносильно условию $s < p_0$. Поэтому

$$|F_\varphi(g)| \le C_\beta \|u\|_{p,q,\alpha} \|v\|_{h^{s'}}.$$

В силу двойственности $\left(L^{s'}\right)^* = L^s$ имеем

$$\|\varphi\|_{h^s} = \|F_\varphi\| = \sup\left\{ |F_\varphi(g)|; \|g\|_{L^{s'}} = 1 \right\} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}.$$

Теперь пусть $0 < p < 1$. Обозначим $\varepsilon := p_0 - s > 0$ и будем рассматривать два случая.

Случай $1 \le p_0 < \infty$. Поскольку

$$s = p_0 - \varepsilon = \min_{1\le j\le 2} \frac{1}{(\alpha_j + 1/p - 1/p_0) + 1/p_0 - \beta_j} - \varepsilon,$$

то мы вправе применить доказанную часть данной теоремы (ибо $p_0 \ge 1$), а также вложение (iv) Теоремы 40

$$\|\mathcal{D}^{-\beta} u\|_{h^s} \le C\|u\|_{p_0,q,\alpha+1/p-1/p_0} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}.$$

Случай $0 < p_0 \le 1$. Легко видеть, что $p < p_0$. Далее, можем считать, что $s > p$, ибо достаточно рассматривать узкие классы h^s. Поэтому $0 < p < s < p_0 \le 1$. Согласно Теореме 61, (5.2.16) и вложениям (iv), (vi), (i) Теоремы 40, получаем

$$\|\mathcal{D}^{-\beta} u\|_{h^s} \le C\|u\|_{s,s,\beta} \le C\|u\|_{p,s,\beta-1/p+1/s} \le C\|u\|_{p,q,\alpha},$$

где последнее неравенство обосновано ввиду $\beta_j - 1/p + 1/p_0 > \alpha_j$ $(1 \le j \le 2)$, что и требовалось доказать.

Теперь убедимся в том, что соотношение (5.2.20) точно в смысле, что для $p_0 < q \le \infty$ соотношение (5.2.20) перестает быть верным. Пригодным контрпримером может служить функция

$$F_{\alpha+1/p,\lambda}(z) = \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1/p}\left(\log\frac{e}{1-z}\right)^{\lambda}}, \qquad \frac{1}{q} < \lambda_j < \frac{1}{p_0}, \qquad z \in U^2.$$

Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве Теоремы 61, можно показать, что

$$F_{\alpha+1/p,\lambda}(z) \in H(p,q,\alpha), \qquad \text{но} \qquad \mathcal{D}^{-\beta} F_{\alpha+1/p,\lambda}(z) \notin H^s(U^n).$$

А соотношение (5.2.19) в общем случае нельзя распространить на $s = p_0$. Точнее, соотношение (5.2.19) с $s = p_0$ справедливо для $q \le p_0$ и ложно для $q > p_0$, как доказано выше. ■

Замечание. Для функций, голоморфных в единичном круге и для $0 < p, \alpha < 1$, $s = p$, $q = \infty$, $\beta = 1$ соотношение (5.2.19) доказано в [96].

Теорема 63 *Если* $0 < p \le \infty,\ 0 < q \le 1,\ \alpha_j + 1/p > 0$ $(1 \le j \le n)$, *то*

$$\mathcal{D}^{-\alpha-1/p} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h^{\infty}, \tag{5.2.21}$$

Более того, при произвольном $u \in h(p,q,\alpha)$ *функцию* $\mathcal{D}^{-\alpha-1/p}u$ *можно непрерывно продолжить вплоть до топологической границы поликруга* U^n, *т.е.*

$$\mathcal{D}^{-\alpha-1/p} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h(U^n) \cap C(\overline{U^n}).$$

При этом соотношение (5.2.21) *точное, а именно при* $1 < q \le \infty$ *существуют неограниченные функции из* $\mathcal{D}^{-\alpha-1/p}\big(h(p,q,\alpha)\big)$.

Доказательство. Пусть $u(r\zeta)$ — произвольная функция класса $h(p,q,\alpha)$. При $p=\infty$ очевидно, что

$$M_\infty(\mathcal{D}^{-\alpha}u;r) \le C_\alpha \|u\|_{\infty,1,\alpha} \le C\|u\|_{\infty,q,\alpha}. \tag{5.2.22}$$

Если же $0<p<\infty$, то из (5.2.22) и вложения (iv) Теоремы 40 получаем

$$\|\mathcal{D}^{-\alpha-1/p}u\|_{h^\infty} \le C(\alpha,p)\|u\|_{\infty,1,\alpha+1/p} \le C\|u\|_{\infty,1,\alpha} \le C\|u\|_{\infty,q,\alpha}.$$

Из равномерной сходимости интеграла

$$\mathcal{D}^{-\alpha-1/p}u(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1/p)}\int_{I^n}(1-\eta)^{\alpha+1/p-1}u(\eta z)d\eta, \qquad z\in U^n,$$

по $z\in\overline{U^n}$, следует непрерывность функции $\mathcal{D}^{-\alpha-1/p}u(z)$ в $\overline{U^n}$.

Соотношение (5.2.21) нельзя распространить на значения $1<q\le\infty$. Функция

$$F_{\alpha+1/p,\gamma}(z) = \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1/p}\left(\log\frac{e}{1-z}\right)^\gamma}, \qquad \frac{1}{q}<\gamma_j\le 1, \qquad z\in U^n,$$

может служить соответствующим контрпримером. Как и в предыдущих двух теоремах, показываем, что

$$F_{\alpha+1/p,\gamma}(z)\in H(p,q,\alpha), \qquad \text{но} \qquad \mathcal{D}^{-\alpha-1/p}F_{\alpha+1/p,\gamma}(z)\notin H^\infty(U^n),$$

ибо

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{-\alpha-1/p}F_{\alpha+1/p,\gamma}(z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1/p)}\int_{I^n}\frac{(1-\eta)^{\alpha+1/p-1}}{(1-\eta z)^{\alpha+1/p}\left(\log\frac{e}{1-\eta z}\right)^\gamma}d\eta \\ &\sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1/p)}\int_{I^n}\frac{1}{(1-\eta)\left(\log\frac{e}{1-\eta}\right)^\gamma}d\eta = +\infty\end{aligned}$$

при $z\to(1,1,\dots,1)$. ■

Определение. Скажем, что n-гармоническая в U^n функция $u(z)$ принадлежит пространству Липшица $h\Lambda_\alpha$ $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\alpha_j>0$, если $\mathcal{D}^\beta u(z)\in h(\infty,\infty,\beta-\alpha)$ для некоторого мультииндекса $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n),\beta_j>\alpha_j$. Норма в $h\Lambda_\alpha$ задается как

$$\|u\|_{\Lambda_\alpha} = \|\mathcal{D}^\beta u\|_{\infty,\infty,\beta-\alpha}.$$

Для различных $\beta,\beta_j>\alpha_j$, согласно Теореме 54, появляются эквивалентные нормы. Обозначим через $H\Lambda_\alpha$ подпространство $h\Lambda_\alpha$, состоящее из голоморфных функций в U^n. В терминах пространств Бесова

$$h\Lambda_\alpha = h\Lambda_\alpha^{\infty,\infty}, \qquad H\Lambda_\alpha = H\Lambda_\alpha^{\infty,\infty}.$$

Теорема 64 *Если $\beta_j>0$, $\beta_j>\alpha_j+1/p$ $(1\le j\le n), 0<p,q\le\infty$, то*

$$\mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\longrightarrow h\Lambda_{\beta-\alpha-1/p}.$$

Более того, для $0<p,q\le\infty$, $\alpha_j,\beta_j,\gamma_j>0$,

$\mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\longrightarrow h\Lambda_\gamma$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma_j\le\beta_j-\alpha_j-1/p$ $(1\le j\le n)$.

Доказательство. Пусть $u \in h(p,q,\alpha)$ — произвольная функция. Согласно непрерывным вложениям (iii) и (iv) Теоремы 40, $h(p,q,\alpha) \subset h(\infty,\infty,\alpha+1/p)$. Следовательно

$$(1-r)^{\beta-(\beta-\alpha-1/p)} M_\infty\big(\mathcal{D}^\beta \mathcal{D}^{-\beta} u; r\big) = O(1), \qquad r \in I^n.$$

Таким образом, $\mathcal{D}^{-\beta} u \in h\Lambda_{\beta-\alpha-1/p}$, при этом $\|\mathcal{D}^{-\beta} u\|_{\Lambda_{\beta-\alpha-1/p}} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}$.

Обратно, предположим, что существует индекс $j \in [1,n]$, скажем $j=1$, такой, что $\gamma_1 > \beta_1 - \alpha_1 - 1/p$. Покажем, что для любой положительной постоянной C неравенство $\|\mathcal{D}^{-\beta} u\|_{\Lambda_\gamma} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}$ ложно. Действительно, для произвольной точки $a = (a_1,\ldots,a_n) \in U^n$ и мультииндекса $\delta = (\delta_1,\ldots,\delta_n)$, $\delta_j > \alpha_j + 1/p$, $1 \le j \le n$, определим функцию $f_{\delta,a}(z) = 1/(1-\bar{a}z)^\delta$. Простая оценка показывает, что

$$\frac{\|\mathcal{D}^{-\beta} f_{\delta,a}\|_{h\Lambda_\gamma}}{\|f_{\delta,a}\|_{p,q,\alpha}} \approx \frac{1}{(1-|a|)^{\gamma-(\beta-\alpha-1/p)}}.$$

Устремляя $|a_1| \to 1$, получаем противоречие с $\|\mathcal{D}^{-\beta} u\|_{\Lambda_\gamma} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}$. ■

Определение. Скажем, что n-гармоническая в U^n функция $u(z)$ принадлежит пространству BMOh, если конечна норма

$$\|u\|_{BMOh} = \sup_{w \in U^n} \left(\int_{U^n} \frac{(1-|w|^2)^\beta (1-|z|^2)^{2k-1}}{|1-z\bar{w}|^{\beta+1}} |\mathcal{D}^k u(z)|^2 dm_{2n}(z) \right)^{1/2},$$

где $k_j > 0, \beta_j > 0, 1 \le j \le n$.

Для различных k и β появляются эквивалентные нормы.

При $n=1$ эта норма эквивалентна обычной норме в BMO для гармонических функций (см. [4]), т.е. $u \in BMOh$ означает, что $u(z)$ — вещественная часть голоморфной BMO-функции.

Теорема 65 *Если* $0<p<\infty$, $0<q\le\infty$, $\beta_j = \alpha_j + 1/p > 0$ $(1 \le j \le n)$, *то*

$$\mathcal{D}^{-\alpha-1/p} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow BMOh. \tag{5.2.23}$$

На значение $p=\infty$ это соотношение распространить нельзя.

Доказательство. Достаточно доказать теорему для наиболее широкого (по q) пространства $h(p,\infty,\alpha)$, т.е. докажем, что

$$\|\mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u\|_{BMOh} \le C\|u\|_{p,\infty,\alpha}$$

для всех функций $u(z_1,z_2) \in h(p,\infty,\alpha)$.

Чтобы оценить выражение

$$\left\|\mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u\right\|_{BMOh}^2 = \sup_{w\in U^n} (1-|w|^2)^\beta \int_{U^n} \frac{(1-|z|^2)^{2k-1}}{|1-z\bar{w}|^{\beta+1}} |\mathcal{D}^k \mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u(z)|^2 \, dm_{2n}(z), \tag{5.2.24}$$

рассмотрим два случая.

Случай $2 < p < \infty$**.** Тогда по неравенству Гельдера с индексами $p/2$ и $(p/2)' = \frac{p}{p-2}$

$$\begin{aligned}
&\int_{T^n} \frac{|\mathcal{D}^k \mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u(r\zeta)|^2}{|1-r\zeta\bar{w}|^{\beta+1}}\, dm_n(\zeta) \\
&\quad \le \left(\int_{T^n} |\mathcal{D}^k \mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u(r\zeta)|^p \, dm_n(\zeta) \right)^{2/p} \left(\int_{T^n} \frac{dm_n(\zeta)}{|1-r\zeta\bar{w}|^{(\beta+1)p/(p-2)}} \right)^{(p-2)/p} \\
&\quad \le M_p^2\big(\mathcal{D}^k \mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u; r\big) \frac{C(p,\beta,n)}{(1-r|w|)^{\beta+2/p}}.
\end{aligned}$$

Полагая $k \in \mathbb{Z}^n_+$, получаем

$$\begin{aligned}
\big\|\mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u\big\|^2_{BMOh} &\le C \sup_{w\in U^n} (1-|w|)^\beta \int_{I^n} \frac{(1-r)^{2k-1}}{(1-r|w|)^{\beta+2/p}} M_p^2\big(\mathcal{D}^k \mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u; r\big)\, dr \\
&\le C \big\|\mathcal{D}^k \mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u\big\|^2_{p,\infty,k-1/p} \sup_{w\in U^n} (1-|w|)^\beta \int_{I^n} \frac{(1-r)^{2/p-1}}{(1-r|w|)^{\beta+2/p}}\, dr \\
&\le C \big\|\mathcal{D}^k \mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u\big\|^2_{p,\infty,k-1/p} = C \big\|\mathcal{D}^{-\alpha-1/p} \mathcal{D}^k u\big\|^2_{p,\infty,k-1/p}.
\end{aligned}$$

Тогда по Теоремам 54 и 55 о дробном интегрировании и дифференцировании

$$\big\|\mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u\big\|^2_{BMOh} \le C \big\|\mathcal{D}^k u\big\|^2_{p,\infty,k-1/p+\alpha+1/p} = C \big\|\mathcal{D}^k u\big\|^2_{p,\infty,k+\alpha} \le C \|u\|^2_{p,\infty,\alpha}.$$

Случай $0 < p \le 2$**.** Возведем обе части (5.2.24) в степень $p/2$, затем применим правила интегрирования и дифференцирования по Теоремам 54 и 55, а также из работы Ортега и Фабрега [156, с.179,186],

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u\big\|^p_{BMOh} = \\
&\qquad = \sup_{w\in U^n} (1-|w|^2)^{\beta p/2} \left(\int_{U^n} \frac{(1-|z|^2)^{2k-1}}{|1-z\bar{w}|^{\beta+1}} |\mathcal{D}^k \mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u(z)|^2 \, dm_{2n}(z) \right)^{p/2} \\
&\qquad \le C \sup_{w\in U^n} (1-|w|)^{\beta p/2} \int_{U^n} \frac{(1-|z|)^{(2k+1)p/2-2}}{|1-z\bar{w}|^{(\beta+1)p/2}} |\mathcal{D}^k \mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u(z)|^p \, dm_{2n}(z) \\
&\qquad \le C \sup_{w\in U^n} (1-|w|)^{\beta p/2} \int_{I^n} \frac{(1-r)^{(2k+1)p/2-2}}{(1-|w|r)^{(\beta+1)p/2}} M_p^p(\mathcal{D}^k \mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u; r)\, dr \\
&\qquad \le C \big\|\mathcal{D}^k \mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u\big\|^p_{p,\infty,k-1/p} \sup_{w\in U^n} (1-|w|)^{\beta p/2} \int_{I^n} \frac{(1-r)^{p/2-1}}{(1-|w|r)^{(\beta+1)p/2}}\, dr \\
&\qquad \le C \big\|\mathcal{D}^k \mathcal{D}^{-\alpha-1/p} u\big\|^p_{p,\infty,k-1/p} = C \big\|\mathcal{D}^{-\alpha-1/p} \mathcal{D}^k u\big\|^p_{p,\infty,k-1/p} \\
&\qquad \le C \big\|\mathcal{D}^k u\big\|^p_{p,\infty,k+\alpha} \le C \|u\|^p_{p,\infty,\alpha}.
\end{aligned}$$

Соотношение (5.2.23) нельзя распространить на значения $p = q = \infty$, как это видно из Теоремы 59. Для остальных значений q смотри Теорему 67 ниже. ■

Теорема 66 *Если* $\beta_j > \alpha_j > 0$ $(1 \le j \le n)$, $0 < p, q \le \infty$, *то*

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h^p. \tag{5.2.25}$$

Для других β_j *и произвольных* p, q *соотношение* (5.2.25) *не имеет места.*

Доказательство. Ввиду монотонного расширения классов $h(p,q,\alpha)$ по q (см. вложение (iii) Теоремы 40), теорему достаточно доказать только для $q=\infty$, т.е. для наиболее широкого по q класса $h(p,\infty,\alpha)$.

Пусть вначале $1\le p\le\infty$, и функция $u(z)\in h(p,\infty,\alpha)$ произвольна. Применим неравенство Минковского по отношению к тождеству ($\beta_j>\alpha_j$)

$$\mathcal{D}^{-\beta}u(z)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{I^n}(1-\eta)^{\beta-1}u(\eta z)d\eta$$

и получим

$$\begin{aligned}M_p(\mathcal{D}^{-\beta}u;r)&\le\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{I^n}(1-\eta)^{\beta-1}M_p(u;\eta r)d\eta\\&\le\|u\|_{p,\infty,\alpha}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{I^n}\frac{(1-\eta)^{\beta-1}}{(1-r\eta)^{\alpha}}d\eta\le C(\alpha,\beta)\|u\|_{p,\infty,\alpha}.\end{aligned}$$

Если же $0<p<1$, то соотношение (5.2.25) можно вывести из Теорем 62, 64, 65. Так, если компоненты β_j достаточно велики, $\beta_j\ge\alpha_j+1/p$, то по Теоремам 64, 65 функция $\mathcal{D}^{-\beta}u(z)$ попадает в гораздо более узкий класс $BMOh\subset h^p$, и отсюда $\mathcal{D}^{-\beta}u(z)\in h^p$, и $\|\mathcal{D}^{-\beta}u\|_{h^p}\le C(\alpha,\beta)\|u\|_{p,\infty,\alpha}$.

Более содержательный случай произвольных $\beta_j>\alpha_j$, или хотя бы $\alpha_j<\beta_j<\alpha_j+1/p$, доказывается Теоремой 62, согласно которой

$$\mathcal{D}^{-\beta}u(z)\in h^s\qquad\text{для любого}\qquad s\in(0,p_0),\quad p_0=\min_{1\le j\le n}\frac{1}{\alpha_j+1/p-\beta_j}.$$

Поскольку $p<p_0$, то можно взять $s=p$, и получим $\|\mathcal{D}^{-\beta}u\|_{h^p}\le C\|u\|_{p,\infty,\alpha}$, что и требовалось доказать.

Заметим, что при произвольных $0<p,q\le\infty$ соотношение (5.2.25) перестает быть верным, если хотя бы для одной компоненты $\beta_j=\alpha_j$. Теорема 61 показывает точные значения параметра q, когда можно брать $\beta_j=\alpha_j$. ■

Замечание. Для голоморфных в единичном круге функций $f\in H(\mathbb{D})$ и значений параметров $\alpha>0$, $\beta=1$, $1<p=q<\infty$, Теоремы 64 и 65 доказаны в [84, Теор.2], [14, Теор.3]. Для голоморфных в единичном круге функций $f\in H(\mathbb{D})$ и значений параметров $\beta=1$, $p=q<\infty$, $\alpha=2/p$, Теорема 66 доказана в [111, Теор.1]. Для голоморфных в единичном круге функций Теоремы 61, 63, а также соотношение (5.2.20) Теоремы 62 доказаны Флеттом [91]. Для голоморфных функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ большинство этих утверждений доказано в [118].

Напомним, что в Разделе 1.3, см. (1.3.5), были определены пространства Трибеля–Лизоркина F^{pq}_{γ} $\big(0<p<\infty,0<q\le\infty,\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n),\gamma_j\ge0\big)$ для голоморфных в поликруге функций. Теперь мы расширим определение (1.3.5) на значение $p=\infty$ и для n-гармонических в поликруге функций (ср. [157]).

Определение. Скажем, что n-гармоническая в U^n функция $u(z)$ принадлежит пространству $hF^{\infty,q}_{\gamma}$ $\big(0<q\le\infty,\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n),\gamma_j\in\mathbb{R}\big)$, если для некоторых мультииндексов $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$, $\beta_j>0$, и $k=(k_1,\dots,k_n)$, $k_j>\gamma_j\,(1\le j\le n)$, конечна (квази)норма

$$\|u\|_{hF^{\infty,q}_{\gamma}}=\sup_{w\in U^n}\left(\int_{U^n}\frac{(1-|w|^2)^{\beta}(1-|z|^2)^{q(k-\gamma)-1}}{|1-z\bar{w}|^{\beta+1}}|\mathcal{D}^k u(z)|^q dm_{2n}(z)\right)^{1/q},\quad 0<q<\infty,$$

$$\|u\|_{hF^{\infty,\infty}_\gamma} = \sup_{w\in U^n} (1-|z|^2)^{k-\gamma}\, |\mathcal{D}^k u(z)|, \qquad q=\infty.$$

Для различных k и β появляются эквивалентные нормы. Как легко заметить, в частных случаях получаем пространства Блоха и BMOh

$$hF^{\infty,\infty}_0 = \mathcal{B}h, \qquad hF^{\infty,2}_0 = BMOh.$$

Теорема 67 *Если* $\alpha_j > 0\,(1\le j\le n),\ 0<q\le\infty$, *то*

$$\mathcal{D}^{-\alpha} : h(\infty,q,\alpha) \longrightarrow hF^{\infty,q}_0. \tag{5.2.26}$$

В частности,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}^{-\alpha} : h(\infty,q,\alpha) \longrightarrow h^\infty, && \textit{если} \quad 0<q\le 1, && (5.2.27)\\
&\mathcal{D}^{-\alpha} : h(\infty,q,\alpha) \longrightarrow BMOh, && \textit{если} \quad 0<q\le 2, && (5.2.28)\\
&\mathcal{D}^{-\alpha} : h(\infty,\infty,\alpha) \longrightarrow \mathcal{B}h, && \textit{если} \quad q=\infty. && (5.2.29)
\end{aligned}$$

Доказательство. Положим $0<q<\infty$ и $k\in\mathbb{Z}^n_+$. Тогда

$$\begin{aligned}
\big\|\mathcal{D}^{-\alpha}u\big\|^q_{hF^{\infty,q}_0} &= \sup_{w\in U^n}(1-|w|^2)^\beta \int_{U^n} \frac{(1-|z|^2)^{kq-1}}{|1-z\bar{w}|^{\beta+1}} |\mathcal{D}^k\mathcal{D}^{-\alpha}u(z)|^q\, dm_{2n}(z)\\
&\le C \sup_{w\in U^n}(1-|w|)^\beta \int_{I^n} \frac{(1-r)^{kq-1}}{(1-r|w|)^\beta} M^q_\infty(\mathcal{D}^k\mathcal{D}^{-\alpha}u; r)\, dr\\
&\le C\int_{I^n} (1-r)^{kq-1} M^q_\infty(\mathcal{D}^k\mathcal{D}^{-\alpha}u;r)\,dr = C\big\|\mathcal{D}^k\mathcal{D}^{-\alpha}u\big\|^q_{\infty,q,k}\\
&= C\big\|\mathcal{D}^{-\alpha}\mathcal{D}^k u\big\|^q_{\infty,q,k} \le C\big\|\mathcal{D}^k u\big\|^q_{\infty,q,k+\alpha} \le C\|u\|^q_{\infty,q,\alpha},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что последнее соотношение (5.2.29) в более строгой форме

$$\mathcal{D}^{-\alpha}\big(h(\infty,\infty,\alpha)\big) = \mathcal{B}h$$

было доказано в Теореме 58, а соотношение (5.2.27) было доказано в Теореме 63. ■

Следующее соотношение можно рассматривать как аналог хорошо известного неравенства Харди–Литтлвуда–Соболева для пространств n-гармонических функций со смешанной нормой. Современные аналоги неравенства Харди–Литтлвуда–Соболева можно найти в [45], [118], [122].

Теорема 68 *Если* $0<p<\infty,\ \ 0<q\le\infty,\ \ 0<p_0\le\infty,\ \ \alpha_j>0,\ 0<\beta_j\le 1/p$ $(1\le j\le n)$, *то*

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h(s,q,\alpha) \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad s\le \min_{1\le j\le n}\frac{p}{1-\beta_j p}.$$

Доказательство. Поскольку пространства $h(p,q,\alpha)$ монотонно сужаются по p, то положим $s_0 = \min\limits_{1\le j\le n} \dfrac{p}{1-\beta_j p}$. Тогда заметим, что $s_0 > p$. Согласно Теореме 54 и непрерывному вложению (iv) Теоремы 40

$$\left\|\mathcal{D}^{-\beta}u\right\|_{s_0,q,\alpha} \le C\|u\|_{s_0,q,\alpha+\beta} \le C\|u\|_{p,q,\alpha+\beta-1/p+1/s_0}.$$

Поскольку $\beta_j \ge \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{s_0}$ и так как пространства $h(p,q,\alpha)$ монотонно расширяются по α, то мы можем продолжить и заключить, что

$$\left\|\mathcal{D}^{-\beta}u\right\|_{s_0,q,\alpha} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}.$$

Обратно, пусть существует индекс $j \in [1,n]$, скажем $j=1$, такой, что $s > \dfrac{p}{1-\beta_1 p}$. Покажем, что для любого положительной постоянной C неравенство

$$\left\|\mathcal{D}^{-\beta}u\right\|_{s,q,\alpha} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}$$

ложно. Действительно, для произвольной точки $a=(a_1,\dots,a_n)\in U^n$ и мульти-индекса $\delta=(\delta_1,\dots,\delta_n)$, $\delta_j > \max\limits_{1\le j\le n}\{\alpha_j+1/p, \alpha_j+\beta_j+1/s\}$, определим функцию $f_{\delta,a}(z) = 1/(1-\bar a z)^{\delta}$. Простая оценка показывает, что

$$\frac{\|\mathcal{D}^{-\beta} f_{\delta,a}\|_{s,q,\alpha}}{\|f_{\delta,a}\|_{p,q,\alpha}} \approx \frac{1}{(1-|a|)^{1/p-1/s-\beta}}.$$

Устремляя $|a_1| \to 1$, получаем противоречие с $\left\|\mathcal{D}^{-\beta}u\right\|_{s,q,\alpha} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}$. ■

Подытоживая все соотношения с дробным интегродифференцированием в пространствах $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой, представим их всех в виде единой упорядоченной таблицы.

Теорема 69 *Пусть* $0 < p,q \le \infty$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n), \beta = (\beta_1,\dots,\beta_n), \alpha_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{R}, 1 \le j \le n$, $p_0 = \min\limits_{1\le j\le n} 1/(\alpha_j + 1/p - \beta_j)$. *Тогда имеют место следующие* *соотношения:*

$$
\begin{array}{rll}
(i) & \mathcal{D}^{\beta}: h^p \longrightarrow h(p,q,\beta), & \beta_j>0, 1<p\le q\le\infty, q\ge 2, \quad (5.2.30)\\
(ii) & \mathcal{D}^{\beta}: h^p \longrightarrow h(p,\infty,\beta), & \beta_j\ge 0, \quad (5.2.31)\\
(iii) & \mathcal{D}^{\beta}: h^p \longrightarrow h\left(p_1,q,\beta+1/p-1/p_1\right), & \beta_j>0,\ 1<p\le q\le\infty,\\
 & & \quad q\ge 2,\ p\le p_1\le\infty, \quad (5.2.32)\\
(iv) & \mathcal{D}^{\beta}: h(p,q,\alpha)\longrightarrow h(p,q,\alpha+\beta), & \beta_j\ge 0,\ 0<p<\infty, \quad (5.2.33)\\
(v) & \mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\longrightarrow h(p,q,\alpha-\beta), & -\infty<\beta_j<\alpha_j,\ \alpha_j>0, \quad (5.2.34)\\
(vi) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(p,\infty,\alpha)\longrightarrow h\big(p,\log(1/p)\big), & 0<p\le 2,\ \alpha_j>0, \quad (5.2.35)\\
(vii) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(p,\infty,\alpha)\longrightarrow h\big(p,\log(1/2)\big), & 2\le p<\infty,\ \alpha_j>0, \quad (5.2.36)\\
(viii) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(p,\infty,\alpha)\longrightarrow h(\infty,\infty,1/p), & 0<p<\infty,\ \alpha_j>0, \quad (5.2.37)\\
(ix) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(\infty,\infty,\alpha)\longrightarrow h\big(p,\log(1/2)\big), & 0<p<\infty,\ \alpha_j>0, \quad (5.2.38)\\
(x) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(\infty,\infty,\alpha)\longrightarrow h\big(\infty,\log(1)\big), & \alpha_j>0, \quad (5.2.39)\\
(xi) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(p,q,\alpha)\longrightarrow h^p, & \alpha_j>0,\ 0<p<\infty,\\
 & & \quad 0<q\le\min\{2,p\}, \quad (5.2.40)\\
(xii) & \mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\longrightarrow h^p, & \beta_j>\alpha_j>0, \quad (5.2.41)\\
(xiii) & \mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\longrightarrow h^s, & \beta_j>0,\ \alpha_j<\beta_j<\alpha_j+1/p,\\
 & & \quad 0<p<\infty,\ 0<s<p_0, \quad (5.2.42)\\
(xiv) & \mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\longrightarrow h^{p_0}, & \beta_j>0,\ \alpha_j<\beta_j<\alpha_j+1/p,\\
 & & \quad 0<p<\infty,\ 0<q\le p_0, \quad (5.2.43)\\
(xv) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(\infty,q,\alpha)\longrightarrow \mathcal{B}h, & \alpha_j>0, \quad (5.2.44)\\
(xvi) & \mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\longrightarrow BMOh, & \beta_j=\alpha_j+1/p>0,\ 0<p<\infty,\\
 & & \quad (5.2.45)\\
(xvii) & \mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\longrightarrow h^{\infty}, & \beta_j=\alpha_j+1/p>0,\ 0<q\le 1, \quad (5.2.46)\\
(xviii) & \mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\longrightarrow h\Lambda_{\beta-\alpha-1/p}, & \beta_j>0,\ \beta_j>\alpha_j+1/p, \quad (5.2.47)\\
(xix) & \mathcal{D}^{-\alpha}: h(\infty,q,\alpha)\longrightarrow hF_0^{\infty,q}, & \alpha_j>0, \quad (5.2.48)\\
(xx) & \mathcal{D}^{-\beta}: h(p,q,\alpha)\longrightarrow h(s,q,\alpha), & 0<\beta_j\le 1/p,\ \alpha_j>0,\ 0<p<\infty,\\
 & & \quad 0<s\le \min\limits_{1\le j\le n}\dfrac{p}{1-\beta_j p}, \quad (5.2.49)
\end{array}
$$

При этом все соотношения (i)–(xx) наилучшие в определенном смысле.

5.3 Интегралы и производные в гармонических классах Харди, Лоренца, BMO и со смешанной нормой на верхнем полупространстве

Для измеримой функции f на $\mathbb{R}^n$ через λ_f обозначим ее функцию распределения, т.е.

$$\lambda_f(t)=|\{x\in\mathbb{R}^n;|f(x)|>t\}|,\qquad t>0,$$

где $|E| = \operatorname{mes} E$ — мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Функция

$$f^*(s) = \inf\{t > 0; \lambda_f(t) \le s\}$$

называется убывающей перестановкой функции f.

Пространство Лоренца $L(p,q)$ определяется как множество всех измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций f, для которых $\|f\|_{L(p,q)} < +\infty$, где

$$\|f\|_{L(p,q)} = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} \left[t^{1/p} f^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p, q < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \ t^{1/p} f^*(t), & 0 < p \le \infty, \ q = \infty. \end{cases}$$

Хорошо известно, что

$$L(p, q_1) \subset L(p,p) = L^p \subset L(p, q_2) \subset L(p, \infty) \subset L^1 \left(\frac{dt}{1 + |t|^{n+1}} \right)$$

при $1 \le p \le \infty, 0 < q_1 \le p \le q_2 \le \infty$.

Гармоническое пространство Лоренца $h(p,q)$, $1 < p \le \infty, 1 \le q \le \infty$ (см. [90], [61]) определяется как множество гармонических в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функций $u(x,y)$ с конечной нормой Лоренца $\|u\|_{h(p,q)} = \sup_{y>0} \|u(x,y)\|_{L(p,q)}$. Поэтому $h(p,p) = h^p$, $1 < p < \infty$.

Теорема 70 *Если* $\alpha > 0$, $1 < p \le q \le \infty$, $2 \le q \le \infty$, $1 < p < p_1 \le \infty$, *то*

$$\mathcal{D}^\alpha : h^p \longrightarrow h(p,q,\alpha), \tag{5.3.1}$$

$$\mathcal{D}^\alpha : h^p \longrightarrow h(p_1, q, \alpha + n/p - n/p_1). \tag{5.3.2}$$

Доказательство. Первое соотношение (5.3.1) следует из неравенства типа Литтлвуда–Пэли (1.1.14) из Теоремы 1 и неравенства Минковского в форме

$$\Big\| \|F(\xi,\eta)\|_{L^p(d\xi)} \Big\|_{L^q(d\eta)} \le \Big\| \|F(\xi,\eta)\|_{L^q(d\eta)} \Big\|_{L^p(d\xi)}, \qquad 0 < p \le q \le \infty. \tag{5.3.3}$$

Действительно, пусть $u(x,y)$ — произвольная функция класса Харди h^p $(p < \infty)$. Тогда

$$\|\mathcal{D}^\alpha u\|_{p,q,\alpha} \le \Big\| \|y^\alpha \mathcal{D}^\alpha u\|_{L^q(dy/y)} \Big\|_{L^p(dx)} = \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C \|u\|_{h^p}.$$

Второе соотношение (5.3.2) получается совмещением соотношения (5.3.1) и вложения из Леммы 45. ■

Перейдем к изучению дробного интегрирования в пространствах со смешанной нормой, в результате которого в качестве образов отображения получаются классы Лоренца и BMO.

Скажем, что гармоническая в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функция $u(x,y)$ принадлежит классу BMOh, если она имеет граничные значения из BMO на $\mathbb{R}^n$.

Теорема 71 *(i) Если* $0 < p < \infty, 0 < q \le \infty, \alpha > 0, \beta = \alpha + n/p$, *то*

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow BMOh. \tag{5.3.4}$$

(ii) Если $1 \le p < \infty$, $0 < q \le q_0 \le \infty$, $1 < q_0 \le \infty$, $0 < \alpha < \beta < \alpha + \frac{n}{p}$, $p_0 = \frac{n}{\alpha + n/p - \beta}$, *то*

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h(p_0, q_0). \tag{5.3.5}$$

Доказательство. (i) Достаточно доказать (5.3.4) только для $q=\infty$, т.е. для наиболее широкого (по q) класса $h(p,\infty,\alpha)$. Пусть $u(x,y)\in h(p,\infty,\alpha)$ — произвольная функция. Для каждого $y>0$ рассмотрим следующий линейный функционал на вещественном пространстве Харди $H^1(\mathbb{R}^n)$, порожденный функцией $\varphi(x,y)=\mathcal{D}^{-\beta}u(x,y)$:

$$F_\varphi(g)=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x,y)g(x)dx, \qquad (5.3.6)$$

где $g\in H^1_0(\mathbb{R}^n)\subset H^1(\mathbb{R}^n)$ (см. [85], [23, Раздел 7.3]). Пусть $v(x,y)$ — интеграл Пуассона функции g. Тогда

$$F_\varphi(g)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{+\infty}\sigma^{\beta-1}\left[\int_{\mathbb{R}^n}u\Big(x,\frac{\sigma}{2}\Big)v\Big(x,y+\frac{\sigma}{2}\Big)dx\right]d\sigma. \qquad (5.3.7)$$

В случае $0<p<1$ применим неравенство Гельдера для фиксированного k_0, $1\le k_0<\infty$, и оценим

$$\begin{aligned}|F_\varphi(g)|&\le C\int_0^{+\infty}\sigma^{\beta-1}M_{k_0}\Big(u;\frac{\sigma}{2}\Big)M_{k_0'}\Big(v;y+\frac{\sigma}{2}\Big)d\sigma\\&\le C\|u\|_{k_0,\infty,\alpha+n/p-n/k_0}\|v\|_{k_0',1,n/k_0}.\end{aligned}$$

Благодаря вложению Леммы 45 и другому вложению Флетта [90, Теор.3]

$$h^1\subset h(k_0',1,n/k_0),$$

мы получаем

$$|F_\varphi(g)|\le C\|u\|_{p,\infty,\alpha}\|v\|_{h^1}\le C\|u\|_{p,\infty,\alpha}\|g\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Поскольку подкласс H^1_0 всюду плотен в $H^1(\mathbb{R}^n)$, то F_φ становится ограниченным линейным функционалом на $H^1(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, двойственность Феффермана

$$\big(H^1(\mathbb{R}^n)\big)^*=BMO(\mathbb{R}^n)$$

(см. [85]) влечет

$$\|\varphi\|_{BMO}\le C\sup\Big\{|F_\varphi(g)|;g\in H^1_0,\|g\|_{H^1}=1\Big\}\le C\|u\|_{p,\infty,\alpha}. \qquad (5.3.8)$$

В случае же $1\le p<\infty$ для оценки (5.3.7) вновь применим неравенство Гельдера с индексами p и p'

$$|F_\varphi(g)|\le C\|u\|_{p,\infty,\alpha}\|v\|_{p',1,\beta-\alpha}.$$

Далее, аналогичные оценки с использованием вложения $h^1\subset h(p',1,n/p)$ ведут к (5.3.8) для $1\le p<\infty$.

(ii) Соотношение (5.3.5) доказывается аналогичными аргументами с применением вложения $h(p_0',q')\subset h(p',q',\beta-\alpha)$ (см. [90, Теор.9]) и двойственности $\big(L(p_0',q')\big)^*=L(p_0,q)$. Этим доказательство теоремы завершено. ■

Продолжим изучение дробного интегрирования в пространствах со смешанной нормой.

Теорема 72 *Пусть $u \in h(p,p,\alpha)$ и $\alpha > 0$.*
(i) Если $0 < p < \infty$, то найдется функция $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\|f\|_{L^1} \le C(\alpha,n,p)\|u\|^p_{p,p,\alpha}\,,$$
$$|u(x,y)|^p \le C(\alpha,n,p)\,y^{-\alpha p}f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0.$$

(ii) Если $0 < p \le 1$, то дополнительно $\mathcal{D}^{-\alpha} : h(p,p,\alpha) \longrightarrow h^p$.

Доказательство. (i) Согласно неравенству Харди–Литтлвуда–Феффермана–Стейна [85] для каждой точки $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$

$$|u(x,y)|^p \le \frac{C(p,\alpha,n)}{y^{\alpha p}} \int\limits_{3y/4}^{5y/4} \eta^{\alpha p-1}\big(u^*(x,\eta)\big)^p d\eta \le \frac{C(p,\alpha,n)}{y^{\alpha p}} f(x),$$

где $f(x)$ определена как

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \eta^{\alpha p-1}\big(u^*(x,\eta)\big)^p d\eta, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ввиду максимальной Теоремы 52 легко видеть, что

$$\|f\|_{L^1} = \|u^*\|^p_{p,p,\alpha} \le C(\alpha,n,p)\|u\|^p_{p,p,\alpha}.$$

(ii) Пусть $p < 1$. Тогда в силу предыдущей части (i)

$$|\mathcal{D}^{-\alpha}u(x,y)| \le C(\alpha,n,p)\big(f(x)\big)^{(1-p)/p} \int\limits_0^{+\infty} \sigma^{\alpha p-1}|u(x,y+\sigma)|^p d\sigma.$$

Интегрируя и применяя неравенство Гельдера с индексами $\frac{1}{p-1}, \frac{1}{p}$, а также Лемму 46, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{D}^{-\alpha}u(x,y)|^p dx \le C(\alpha,n,p)\|f\|^{1-p}_{L^1}\|u\|^{p^2}_{p,p,\alpha} \le C(\alpha,n,p)\|u\|^p_{p,p,\alpha}.$$

■

Теорема 73 *Пусть $0 < p,q \le \infty$, $0 < \alpha \le \beta \le \alpha + n/p$, $p_0 = \frac{n}{\alpha+n/p-\beta}$. Тогда*

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h^p, \qquad \beta = \alpha,\ 0 < p < \infty,\ 0 < q \le \min\{2,p\},$$
$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h^{p_0}, \qquad \alpha < \beta < \alpha + n/p,\ 0 < p < \infty,\ 0 < q \le p_0,$$
$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h^\infty, \qquad \beta = \alpha + n/p,\ 0 < p \le \infty,\ 0 < q \le 1.$$

Доказательство. Достаточно доказать следующие утверждения:

$$\begin{array}{lll} (a) & \mathcal{D}^{-\alpha} : h(p,p,\alpha) \longrightarrow h^p, & 0 < p \le 2, \\ (b) & \mathcal{D}^{-\alpha} : h(p,2,\alpha) \longrightarrow h^p, & 2 \le p < \infty, \\ (c) & \mathcal{D}^{-\beta} : h(p,p_0,\alpha) \longrightarrow h^{p_0}, & \alpha < \beta < \alpha + n/p,\ 0 < p < \infty, \\ (d) & \mathcal{D}^{-\alpha-n/p} : h(p,1,\alpha) \longrightarrow h^{\infty}, & 0 < p \le \infty. \end{array}$$

Утверждение (a) содержится в Теоремах 2 и 72. Для доказательства (b) применим Теорему 2 и неравенство Минковского (5.3.3).

Утверждение (c) при $1 \le p < \infty$ совпадает со случаем $q_0 = p_0$ Теоремы 71. При $0 < p < 1$ рассмотрим два случая.

Случай $0 < p < 1$, $p_0 \ge 1$. Предыдущая часть случая (c) и Лемма 45 приводят к

$$\|\mathcal{D}^{-\beta}u\|_{h^{p_0}} \le C\|u\|_{p_0,p_0,\alpha+n/p-n/p_0} \le C\|u\|_{p,p_0,\alpha}.$$

Случай $0 < p < 1, 0 < p_0 < 1$. Согласно Теореме 72 и Лемме 45 получаем

$$\|\mathcal{D}^{-\beta}u\|_{h^{p_0}} \le C\|u\|_{p_0,p_0,\beta} \le C\|u\|_{p,p_0,\alpha}.$$

Случай $p = \infty$ в (d) очевиден. Общий случай вытекает из этого частного случая и Леммы 45. ■

Перейдем к выводу таких отображений с интегродифференциальными операторами в пространствах $h(p,q,\alpha)$, которые приведут к эквивалентным нормам в $h(p,q,\alpha)$.

Следующая лемма распространяет на малые значения p результат Флетта [89, Теор.7].

Лемма 57 *Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p < \infty$, и $u(x,y)$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^m u(x,y)|^p dx \le C(m,n,p)\frac{1}{y^{mp+1}}\int_{y/2}^{3y/2} M_p^p(u;t)dt, \qquad y > 0,$$

где $\nabla^m u$ — градиент функции $u(x,y)$ порядка m.

Доказательство. Лемма непосредственно следует из неравенства

$$|\nabla^m u(x,y)|^p \le \frac{C(m,n,p)}{y^{n+1+mp}} \iint\limits_{|\xi-x|^2+(\eta-y)^2<y^2/4} |u(\xi,\eta)|^p d\xi d\eta, \quad x \in \mathbb{R}^n, y > 0,$$

которая является следствием известного неравенства Харди–Литтлвуда–Феффермана–Стейна [85]. ■

Теорема 74 *Пусть $0 < p,q \le \infty$.*
(i) *Если* $0 < \beta < \alpha$, *то* $\mathcal{D}^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h(p,q,\alpha-\beta)$.
(ii) *Если* $\alpha > 0, \beta > 0$, *то* $\mathcal{D}^{\beta} : h(p,q,\alpha) \longrightarrow h(p,q,\alpha+\beta)$.
(iii) *Если* $\alpha > 0, \alpha > \beta > -\infty, q < \infty$ *и* $u \in h(p,q,\alpha)$, *то*

$$y^{\alpha-\beta}M_p(\mathcal{D}^{-\beta}u;y) = o(1) \qquad \text{при} \qquad y \to +0 \quad \text{и} \quad y \to +\infty.$$

(iv) *Если* $\alpha > 0, \alpha > \beta > -\infty$ *и* $u \in h(p, \infty, \alpha)$, *то условие*

$$y^{\alpha} M_p(u; y) = o(1) \qquad \text{при} \qquad y \to +0 \;\; (y \to +\infty)$$

влечет

$$y^{\alpha-\beta} M_p(\mathcal{D}^{-\beta} u; y) = o(1) \qquad \text{при} \qquad y \to +0 \;\; (\text{соответственно при} \quad y \to +\infty).$$

(v) *Утверждения* (ii), (iii), (iv) *для дифференциальных операторов* $\mathcal{D}^{\beta}$ $(\beta > 0)$ *имеют место с частными производными* $\partial^{\lambda}(\lambda \in \mathbb{Z}_+^{n+1})$ *вместо* $\mathcal{D}^{\beta}$, *и с* $|\lambda|$ *вместо* β.

Доказательство. Отметим, что утверждения (i)–(iv) доказаны Буи [61, Теор.3.5] для $1 \le p, q \le \infty$. Теоремы 72, 73 и Лемма 57 дают нам возможность распространить утверждения (i)–(iv) на все $p, q \in (0, \infty]$. Докажем лишь (ii) и (v), когда $0 < q \le p < 1$. Соотношение

$$\partial^{\lambda} : h(q, q, \alpha) \longrightarrow h(q, q, \alpha + |\lambda|) \tag{5.3.9}$$

следует из Леммы 57. Кроме того, справедливо также соотношение

$$\partial^{\lambda} : h(1, q, \alpha) \longrightarrow h(1, q, \alpha + |\lambda|). \tag{5.3.10}$$

Согласно одной версии интерполяционной теоремы Рисса–Торина для квазинормированных пространств (см. [112]) соотношения (5.3.9) и (5.3.10) влекут

$$\partial^{\lambda} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h(p, q, \alpha + |\lambda|) \qquad \text{для всех} \qquad p \in [q, 1].$$

Для нецелых β $(m-1 < \beta < m, \; m \in \mathbb{Z}_+)$ утверждение (ii) следует из (i) и доказанной части:

$$\|\mathcal{D}^{\beta} u\|_{p,q,\alpha+\beta} = \|\mathcal{D}^{-(m-\beta)} \mathcal{D}^{m} u\|_{p,q,\alpha+\beta} \le C \|\mathcal{D}^{m} u\|_{p,q,\alpha+m} \le C \|u\|_{p,q,\alpha}.$$

Доказательство Теоремы 74 завершено. ■

Подытоживая все соотношения с дробным интегродифференцированием в пространствах $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой, представим их всех в виде единой упорядоченной таблицы.

Теорема 75 *Пусть* $0 < p, q \le \infty, \; \alpha > 0, \; \beta \in \mathbb{R}$. *Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$\mathcal{D}^{\alpha} : h^p \longrightarrow h(p, q, \alpha), \qquad 1 < p \le q \le \infty, \, 2 \le q \le \infty, \tag{5.3.11}$$

$$\mathcal{D}^{\alpha} : h^p \longrightarrow h(p_1, q, \alpha + n/p - n/p_1), \quad 1 < p \le q \le \infty, \, 2 \le q \le \infty, \, p < p_1 \le \infty, \tag{5.3.12}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h(p, q, \alpha - \beta), \qquad -\infty < \beta < \alpha, \, 0 < p, q \le \infty, \tag{5.3.13}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h^p, \qquad \beta = \alpha, \, 0 < p < \infty, \, 0 < q \le \min\{2, p\}, \tag{5.3.14}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h^{p_0}, \qquad \alpha < \beta < \alpha + n/p, \, 0 < p < \infty, \, q \le p_0, \tag{5.3.15}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h(p_0, q_0), \qquad \alpha < \beta < \alpha + n/p, \, 1 \le p < \infty, \; 0 < q \le q_0 \le \infty, \, 1 < q_0 \le \infty, \tag{5.3.16}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow \mathcal{B}, \qquad \beta = \alpha + n/p, \, p = \infty, \, 0 < q \le \infty, \tag{5.3.17}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow BMOh, \qquad \beta = \alpha + n/p, \, 0 < p < \infty, \, 0 < q \le \infty, \tag{5.3.18}$$

$$\mathcal{D}^{-\beta} : h(p, q, \alpha) \longrightarrow h^{\infty}, \qquad \beta = \alpha + n/p, \, 0 < p \le \infty, \, 0 < q \le 1. \tag{5.3.19}$$

Здесь $p_0 = \frac{n}{\alpha + n/p - \beta}$, $h(p,q)$ *обозначает гармоническое пространство Лоренца,* $\mathcal{B}$ *— гармоническое пространство Блоха, и* $BMOh$ *— пространство гармонических в* $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ *функций с граничными значениями из* $BMO(\mathbb{R}^n)$*.*

5.4 Обобщенный оператор Чезаро в классах Харди

Пусть H^p — класс Харди голоморфных функций в единичном шаре $\mathbb{B}$ из $\mathbb{C}^n$. В этом разделе мы установим необходимые и достаточные условия ограниченности и компактности обобщенных операторов Чезаро

$$T_g f(z) = \int_0^1 f(tz)\Re g(tz)\frac{dt}{t} \qquad \text{и} \qquad L_g f(z) = \int_0^1 \Re f(tz) g(tz)\frac{dt}{t}, \qquad z \in \mathbb{B},$$

действующие из пространства H^p в H^q при $p < q$. Здесь g — фиксированный голоморфный символ на $\mathbb{B}$. Этим обобщаются и упрощаются некоторые одномерные результаты из [35].

Пусть $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ — открытый единичный шар из $\mathbb{C}^n$, $S = \partial\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ — его граница, единичная сфера, $d\sigma$ — нормированная мера на S такая, что $\sigma(S) = 1$, dV — нормированная мера на $\mathbb{B}$, и $H(\mathbb{B})$ — класс всех голоморфных функций в $\mathbb{B}$. Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$ и $w = (w_1, \dots, w_n)$ — точки в $\mathbb{C}^n$, и $\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k$. Для $f \in H(\mathbb{B})$ с разложением Тейлора $f(z) = \sum_{|\beta| \geq 0} a_\beta z^\beta$, через

$$\Re f(z) = \sum_{|\beta|\geq 0} |\beta| a_\beta z^\beta$$

обозначим радиальную производную функции f, где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — мультииндекс, и $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdots z_n^{\beta_n}$.

Известно (см., например, [21]), что

$$\Re f(z) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z).$$

α-пространство Блоха $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{B}) = \mathcal{B}^\alpha$, $\alpha > 0$, содержит все $f \in H(\mathbb{B})$ такие, что

$$\sup_{z\in\mathbb{B}} (1 - |z|^2)^\alpha |\Re f(z)| < \infty,$$

тогда как малое α-пространство Блоха $\mathcal{B}_0^\alpha(\mathbb{B}) = \mathcal{B}_0^\alpha$, $\alpha > 0$, содержит все $f \in \mathcal{B}^\alpha$ такие, что

$$\lim_{|z|\to 1} (1 - |z|^2)^\alpha |\Re f(z)| = 0.$$

С нормой

$$\|f\|_{\mathcal{B}^\alpha} = |f(0)| + B_\alpha(f),$$

$\mathcal{B}^\alpha$ становится банаховым пространством, и $\mathcal{B}_0^\alpha$ — его замкнутым подпространством. При $\alpha = 1$ пространства $\mathcal{B}^1$ и $\mathcal{B}_0^1$ сводятся к пространству Блоха и малому пространству Блоха, см., например, [69], [140], [202], [206], [235], [241] и содержащиеся там ссылки.

Пространство Харди $H^p(\mathbb{B}) = H^p$, $0 < p \leq \infty$, содержит все функции $f \in H(\mathbb{B})$ такие, что

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0<r<1} M_p(f,r) < \infty,$$

где

$$M_p(f,r) = \left(\int_S |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{1/p}$$

и

$$M_\infty(f,r) = \sup_{\zeta \in S} |f(r\zeta)|.$$

Весовое пространство Бергмана $A^p_\alpha(\mathbb{B}) = A^p_\alpha$, $\;0 < p < \infty$, $\alpha \in (0,\infty)$, содержит все функции $f \in H(\mathbb{B})$ такие, что

$$\|f\|_{A^p_\alpha} = \left(\int_{\mathbb{B}} (1 - |z|^2)^{\alpha p - 1} |f(z)|^p \, dV(z) \right)^{1/p} < \infty.$$

Обобщенные операторы Чезаро с аналитическим символом g определяются как

$$T_g f(z) = \int_0^1 f(tz) \Re g(tz) \frac{dt}{t} \qquad \text{и} \qquad L_g f(z) = \int_0^1 \Re f(tz) g(tz) \frac{dt}{t}, \tag{5.4.1}$$

где $z \in \mathbb{B}$ и $f \in H(\mathbb{B})$.

Оператор T_g введен в работе [114] и изучен в [64], [113], [114], [115], [126], [202], [128], [129], [130], [131], [135], [219], [226], тогда как оператор L_g введен Ли и Стевичем и изучен в [64],[126], [128], [129], [130], [131], [135].

Близкие по данной тематике результаты в случае единичного поликруга можно найти в [64], [66], [65], [67], [204], [207], [220].

В данном разделе мы изучаем ограниченность и компактность операторов T_g и L_g, действующих из H^p в H^q. Случай $p = q = 2$ был изучен в [130]. Мы находим некоторые достаточные условия для ограниченности и компактности этих операторов, а в случае $p < q$ показываем, что найденные условия также необходимы. Тем самым мы частично распространяем основные результаты работы [35], в которой исследовались ограниченность и компактность оператора T_g между различными пространствами Харди в единичном круге. Следует отметить, результаты в [35] были получены на основе некоторых строго одномерных результатов, тогда как наши методы свободны от этого недостатка. Отметим также некоторые статьи, относящиеся, в частности, к весовым операторам композиции между пространствами Харди в единичном шаре $\mathbb{B}$, см. [132], [133], [137], [215], [229].

Начнем с некоторых вспомогательных результатов.

Лемма 58 *Для любых $f, g \in H(\mathbb{B})$ имеют место тождества*

$$\Re[T_g(f)](z) = f(z)\Re g(z) \qquad \text{и} \qquad \Re[L_g(f)](z) = \Re f(z) g(z).$$

Доказательство первого тождества можно найти в [113]. Второе тождество можно доказать аналогичным образом и было отмечено впервые в [129].

Заметим, что тождества Леммы 58 являются аналогами одномерных тождеств

$$\left(\int_0^z f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta \right)' = f(z) g'(z), \quad \left(\int_0^z f'(\zeta) g(\zeta) d\zeta \right)' = f'(z) g(z).$$

Далее, используя неравенство (см., например, [113])

$$(1-r)M_q(\Re f, r) \le CM_q\Big(f, \frac{1+r}{2}\Big),$$

легко можно вывести следующую лемму.

Лемма 59 *Найдется положительная постоянная C, независимая от f такая, что*

$$|f(0)| + \sup_{0<r<1}(1-r)M_q(\Re f, r) \le C \sup_{0<r<1} M_q(f, r). \qquad (5.4.2)$$

Следующая лемма доказывается стандартно, см. [129], [204], [207].

Лемма 60 *Оператор T_g (или L_g): $H^p \to H^q$ компактен тогда и только тогда, когда T_g (или L_g): $H^p \to H^q$ ограничен, и для любой ограниченной последовательности $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в H^p, сходящейся к нулю равномерно на компактах из $\mathbb{B}$ при $k\to\infty$, имеем*

$$\|T_g f_k\|_{H^p} \to 0 \quad \textit{при} \quad k\to\infty \quad (\textit{или} \quad \|L_g f_k\|_{H^q} \to 0 \quad \textit{при} \quad k\to\infty\ ).$$

Следующие два вложения восходят к Харди и Литтлвуду, а в случае единичного шара их доказательства можно найти в [45, Теор.3.7(ii) и 5.13].

Лемма 61 *Пусть $0<p<q<\infty$ и $f\in H(\mathbb{B})$. Тогда*
(a)

$$H^p \subset A^q_{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}},$$

более того, найдется положительная постоянная C такая, что для всех $f\in H^p$,

$$\|f\|_{A^q_{n/p-n/q}} \le C\|f\|_{H^p}.$$

(b) Если к тому же $f(0)=0$, то

$$\|f\|_{H^q} \le C(p,q,n)\|\Re f\|_{A^p_\alpha}, \qquad 0<\alpha = 1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}.$$

Перейдем к основным результатам данного раздела и рассмотрим вопросы ограниченности и компактности операторов $T_g, L_g : H^p \to H^q$.

Теорема 76 *Если $0<p<q<\infty$, то оператор $T_g : H^p\to H^q$ ограничен тогда и только тогда, когда $g\in\mathcal{B}^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}$. Более того, если $T_g : H^p \to H^q$ ограничен, то*

$$\|T_g\|_{H^p\to H^q} \approx \sup_{z\in\mathbb{B}}(1-|z|^2)^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}|\Re g(z)| =: M. \qquad (5.4.3)$$

Доказательство. Вначале положим, что оператор $T_g : H^p \to H^q$ ограничен, а параметры $p, q \in (0,\infty)$ произвольны. Определим функции

$$f_w(z) = \frac{(1-|w|^2)^a}{(1-\langle z, w\rangle)^{\frac{n}{p}+a}}, \quad w\in\mathbb{B}, \qquad (5.4.4)$$

где $a > 0$. Имеем

$$f_w(w) = \frac{1}{(1-|w|^2)^{\frac{n}{p}}}, \quad \text{и} \quad |\Re f_w(w)| = \Big(\frac{n}{p}+a\Big)\frac{|w|^2}{(1-|w|^2)^{\frac{n}{p}+1}}. \tag{5.4.5}$$

Согласно [21, Предл.1.4.10] мы знаем, что

$$M_p(f_w, r) \le C\frac{(1-|w|^2)^a}{(1-r|w|)^a} \le C.$$

Поэтому $f_w \in H^p$, и более того $\sup_{w\in\mathbb{B}} \|f_w\|_{H^p} \le C$.

Используя ограниченность оператора $T_g : H^p \to H^q$, Леммы 58 и 59, Теорему 7.2.5 из [21], получаем

$$\begin{aligned}
\infty > C\|T_g\|_{H^p\to H^q} &\ge \|f_w\|_{H^p}\|T_g\|_{H^p\to H^q} \ge \|T_g(f_w)\|_{H^q} \\
&\ge C \sup_{0<r<1} (1-r)M_q(\Re(T_g f_w), r) \\
&= C \sup_{0<r<1} (1-r)M_q(f_w \Re g, r) \\
&\ge C\Big[(1-|w|^2)^{\frac{n}{q}}|\Re g(w)||f_w(w)|\Big](1-|w|^2) \\
&= C(1-|w|^2)^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}|\Re g(w)|.
\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Из неравенства (5.4.6) следует, что $g \in \mathcal{B}^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}$, более того

$$M \le C\|T_g\|_{H^p\to H^q}, \tag{5.4.7}$$

для некоторой постоянной C.

Теперь положим, что $g \in \mathcal{B}^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}$ и $1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p} \ge 0$. Выбирая s $(p < s < q)$, используя факт $T_g f(0) = 0$, Лемму 61(b), Лемму 58, и затем непрерывное вложение $H^p \subset A^s_{n/p-n/s}$ из Леммы 61(a), получаем

$$\begin{aligned}
\|T_g f\|_{H^q} &\le C\|\Re(T_g f)\|_{A^s_{1+n/q-n/s}} \\
&= C\left(\int_{\mathbb{B}}(1-|z|^2)^{(1+\frac{n}{q}-\frac{n}{s})s-1}|f(z)\Re g(z)|^s\, dV(z)\right)^{1/s} \\
&\le C\|f\|_{A^s_{n/p-n/s}} \sup_{z\in\mathbb{B}}(1-|z|^2)^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}\,|\Re g(z)| \\
&= CM\|f\|_{A^s_{n/p-n/s}} \\
&\le CM\|f\|_{H^p},
\end{aligned} \tag{5.4.8}$$

из чего следует, что $\|T_g\|_{H^p\to H^q} \le CM$. Это неравенство вместе с (5.4.7) дает асимптотическое соотношение (5.4.3). ■

Замечание. Отметим, что если $1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p} < 0$, то по принципу максимума модуля $g \equiv const$.

Отметим также, что остается открытым вопрос о точном значении нормы оператора $\|T_g\|_{H^p\to H^q}$ при $0 < p < q < \infty$. В недавних работах [212], [214] содержатся близкие к теме результаты.

Теорема 77 *Если $0 < p < q \leq \infty$, то оператор $L_g : H^p \to H^q$ ограничен тогда и только тогда, когда $g(z) \equiv 0$.*

Доказательство. Вначале положим, что оператор $L_g : H^p \to H^q$ ограничен. Пусть функция f_w, $w \in \mathbb{B}$, определена по формуле (5.4.4), для которой мы знаем, что $\sup_{w\in\mathbb{B}} \|f_w\|_{H^p} \leq C$.

Согласно Леммам 59, 58 и Теореме 7.2.5 из [21], имеем

$$\begin{aligned} \infty > \|L_g(f_w)\|_{H^q} &\geq C \sup_{0<r<1} (1-r) M_q(\Re(L_g f_w), r) \\ &\geq C\Big[(1-|w|^2)^{\frac{n}{q}} |g(w)||\Re f_w(w)|\Big](1-|w|^2) \\ &\geq C|w|^2(1-|w|^2)^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}|g(w)|. \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

Из (5.4.9) следует, что

$$C|w|^2|g(w)| \leq (1-|w|^2)^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \|L_g(f_w)\|_{H^q}. \tag{5.4.10}$$

Переходя к пределу в (5.4.10) при $|w| \to 1$, замечая, что $\frac{n}{p} - \frac{n}{q} > 0$ и применяя принцип максимума модуля, мы получаем, что $g(z) = 0$ в каждой точке $z \in \mathbb{B}$, что и требовалось доказать.

Обратное утверждение теоремы тривиально. ■

Теорема 78 *Если $0 < p < q < \infty$, то оператор $T_g : H^p \to H^q$ компактен тогда и только тогда, когда $g \in \mathcal{B}_0^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}$.*

Доказательство. Пусть оператор $T_g : H^p \to H^q$ компактен. Возьмем последовательность $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{B}$ такую, что $|z_k| \to 1$ при $k \to \infty$, и $h_k(z) = f_{z_k}(z)$, $k \in \mathbb{N}$, где функция f_w определена по (5.4.4). Из доказательства Теоремы 76 мы знаем, что $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|h_k\|_{H^p} \leq C$ и h_k сходится к нулю равномерно на компактах из $\mathbb{B}$ при $k \to \infty$. Поскольку оператор T_g компактен, используя Лемму 60, получаем, что $\lim_{k\to\infty} \|T_g h_k\|_{H^q} = 0$. Отсюда и ввиду (5.4.6) приходим к

$$\|T_g h_k\|_{H^q} \geq C(1-|z_k|^2)^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} |\Re g(z_k)|,$$

и $g \in \mathcal{B}_0^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}$.

Обратно, положим, то $g \in \mathcal{B}_0^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}$ и $1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} > 0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta \in (0,1)$ такая, что

$$(1-|z|^2)^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} |\Re g(z)| < \varepsilon, \tag{5.4.11}$$

когда $\delta \leq |z| < 1$.

Возьмем последовательность $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в H^p такую, что $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_{H^p} \leq L$ и f_k сходится к нулю равномерно на компактах из $\mathbb{B}$ при $k \to \infty$. Тогда используя Леммы

61 и 58, а также (5.4.11), для фиксированного $s \in (p, q)$ получаем

$$
\begin{aligned}
\|T_g f_k\|_{H^q} &\le C\|\Re(T_g f_k)\|_{A^s_{1+n/q-n/s}} \\
&= C\left[\left(\int\limits_{|z|<\delta} + \int\limits_{\delta<|z|<1}\right)(1-|z|^2)^{(1+\frac{n}{q}-\frac{n}{s})s-1}|f_k(z)\Re g(z)|^s\,dV(z)\right]^{1/s} \\
&\le C\sup_{|z|<\delta}|f_k(z)|\sup_{|z|<\delta}(1-|z|^2)^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}\,|\Re g(z)| + \\
&\qquad + C\|f_k\|_{A^s_{n/p-n/s}}\sup_{\delta<|z|<1}(1-|z|^2)^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}\,|\Re g(z)| \\
&\le C\sup_{|z|<\delta}|f_k(z)| + C\varepsilon\|f_k\|_{H^p}, \\
&\le C\sup_{|z|<\delta}|f_k(z)| + CL\varepsilon. \qquad (5.4.12)
\end{aligned}
$$

Переходя к пределу в (5.4.12) при $k \to \infty$, используя произвольность числа ε и применяя Лемму 60, получаем, что оператор $T_g : H^p \to H^q$ компактен. ■

Замечание. Отметим, что если $1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} \le 0$, то по принципу максимума модуля $g \equiv const$.

Следующая теорма является непосредственным следствием Теоремы 77.

Теорема 79 *Если $0 < p < q \le \infty$, то оператор $L_g : H^p \to H^q$ компактен тогда и только тогда, когда $g(z) \equiv 0$.*

В заключение отметим, что остается открытым вопрос об условиях ограниченности и компактности операторов $T_g : H^p \to H^q$ и $L_g : H^p \to H^q$ при $p \ge q$. Случай $p = q = 2$ доказан в [130].

5.5 Обобщенное интегральное преобразование Либера на пространствах Бесова, BMOA и VMOA

Основные результаты данного раздела содержатся в совместной статье автора и Стевича [272]. Мы доказываем, что обобщенный оператор Либера ограничен на пространствах Бесова $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{D})$, а также на пространствах $BMOA$ и $VMOA$ в единичном круге $\mathbb{D}$. Компактность оператора на $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{D})$ также изучена.

Пусть $H(\mathbb{D})$ — множество всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций, $dm_2(z) = \frac{1}{\pi}rdrd\theta$ — нормированная мера Лебега по площади $\mathbb{D}$. Для каждого комплексного $\gamma \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\gamma > -1$ и для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ пусть A^γ_k определяет k-ый коэффициент разложения

$$(1-x)^{-(\gamma+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} A^\gamma_k x^k,$$

так что

$$A_k^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+k+1)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(k+1)}.$$

Пусть точка $z_0 \in \mathbb{D}$ фиксирована. Тогда оператор

$$\Lambda_{z_0}(f)(z) = \frac{1}{z-z_0}\int_{z_0}^{z} f(t)dt, \qquad z \in \mathbb{D}, \qquad f \in H(\mathbb{D}), \tag{5.5.1}$$

является одним из наиболее естественных усредняющих операторов на $H(\mathbb{D})$, и для $z_0 = 0$ он называется преобразованием Либера ([141]). Сужая область действия оператора Λ_{z_0}, мы можем расширить определение Λ_{z_0} на значения $z_0 \in \partial\mathbb{D}$.

Для обзора предыдущих работ в этой области см. [41], [74], [184], [198], [217] и содержащиеся там ссылки. Преобразование Либера можно рассматривать как формальное сопряженное к оператору Чезаро на $H^2(\mathbb{D})$, см., например, [188]. Отметим недавние работы, относящиеся к интегральным операторам такого типа: [35], [64], [65], [66], [67], [114], [115], [125], [128], [129], [130], [131], [132], [133], [134], [135], [136], [137], [138], [197], [202], [204], [207], [212], [213], [215], [216], [218], [221], [245].

Обобщим оператор (5.5.1) следующим образом. При фиксированном $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $\Re\gamma > -1$, и $f \in H(\mathbb{D})$ определим линейный оператор $\Lambda_{z_0}^\gamma(f)$ формулой

$$\Lambda_{z_0}^\gamma(f)(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=m}^{\infty}\frac{A_{k-m}^\gamma z_0^{k-m}}{A_k^{\gamma+1}}a_k\right)z^m, \tag{5.5.2}$$

где $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$, $z \in \mathbb{D}$. Заметим, что оператор $\Lambda_{z_0}^\gamma$ пока только формально определен и

$$\Lambda_{z_0}^\gamma(f)(z) = \frac{\gamma+1}{(z-z_0)^{\gamma+1}}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)(z-\zeta)^\gamma d\zeta,$$

или, взяв отрезок от точки z_0 до z в качестве пути интегрирования,

$$\Lambda_{z_0}^\gamma(f)(z) = (\gamma+1)\int_0^1 f(\phi_t(z))(1-t)^\gamma dt, \tag{5.5.3}$$

где

$$\phi_t(z) = (1-t)z_0 + tz.$$

Назовем оператор (5.5.3) *обобщенным оператором Либера.*

Будем изучать обобщенный оператор Либера на пространстве Бесова (см., например, [225])

$$B_\alpha^{p,q}(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) \;\middle|\; \|f\|_{B_\alpha^{p,q}}^q = \int_0^1 M_p^q(f^{(k)}, r)(1-r)^{q(k-\alpha)-1}dr < \infty \right\},$$

где $p, q \in (0,\infty)$, k — целое число, $0 < \alpha < k$. Пространство $B_\alpha^{p,q}$ не зависит от выбора k, и для различных $k\,(k > \alpha)$ получаются эквивалентные "нормы". При $p = q > 1$ и $\alpha = 1/p$ это пространство сводится к классическому аналитическому пространству Бесова $B^p(\mathbb{D})$.

Как обычно, $M_p(f,r)$ обозначает p-ое интегральное среднее функции f, т.е.

$$M_p(f,r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}, \quad r \in [0,1).$$

Напомним, что пространства со смешанной нормой определяются следующим образом:

$$L^{p,q}_\alpha(\mathbb{D}) = \left\{ f \text{ измеримы на } \mathbb{D} \,\middle|\, \|f\|^q_{L^{p,q}_\alpha} := \int_0^1 M_p^q(f,r)(1-r)^\alpha dr < \infty \right\},$$

$$\mathcal{A}^{p,q}_\alpha = H(\mathbb{D}) \cap L^{p,q}_\alpha, \qquad p,q \in (0,\infty),\ \alpha > -1.$$

В наших старых обозначениях

$$L^{p,q}_\alpha = L\left(p, q, \frac{\alpha+1}{q}\right), \qquad \mathcal{A}^{p,q}_\alpha = H\left(p, q, \frac{\alpha+1}{q}\right), \qquad \alpha > -1,$$

или

$$L(p,q,\alpha) = L^{p,q}_{\alpha q-1}, \qquad H(p,q,\alpha) = \mathcal{A}^{p,q}_{\alpha q-1}, \qquad \alpha > 0.$$

При $p = q$ пространства $\mathcal{A}^{p,p}_\alpha$ совпадают с известными весовыми пространствами Бергмана. Общую теорию последних можно найти в [76], [83], [110].

В этом разделе вначале мы докажем ограниченность оператора (5.5.3) на пространствах Бесова, а затем на пространствах BMOA и VMOA. В конце установим компактность оператора (5.5.3) на пространствах Бесова при некоторых условиях.

Предварительные утверждения начнем с леммы Стевича [217], [272], которая доказывает ограниченность оператора композиции на пространствах со смешанной нормой.

Лемма 62 *Пусть $p, q \in (0,\infty)$, $\alpha > -1$, $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — аналитическая функция, не равная тождественно постоянной. Тогда оператор композиции $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ на $\mathcal{A}^{p,q}_\alpha(\mathbb{D})$ удовлетворяет неравенству*

$$\|C_\varphi(f)\|^q_{\mathcal{A}^{p,q}_\alpha} \le 3^{\frac{q}{p}} \left(\frac{\|\varphi\|_\infty + |\varphi(0)|}{\|\varphi\|_\infty - |\varphi(0)|} \right)^{\frac{q}{p}+\alpha+1} \|f\|^q_{\mathcal{A}^{p,q}_\alpha}.$$

Нам понадобится ограниченность известного оператора Бергмана

$$(T_\beta f)(z) = (\beta+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}} |f(w)|\, dm_2(w), \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{5.5.4}$$

Лемма 63 *Пусть $\alpha > -1$ и $1 \le p < \infty$, $0 < q < 1$ либо $0 < p < 1$, $0 < q < \infty$. Тогда для любого $\beta > -1 + \frac{\alpha+1}{q} + \max\left\{0, \frac{1}{p} - 1\right\}$ оператор T_β ограниченно действует из $\mathcal{A}^{p,q}_\alpha$ в $L^{p,q}_\alpha$.*

Для доказательства см. [45, Лемма 4.1], [118, Теор.1.1].

Следующую лемму можно найти, например, в [6, Гл.8].

Лемма 64 *Пусть $p > 0$, функция f голоморфна в открытом круге $D(a,r)$ и непрерывна на $\overline{D(a,r)}$. Тогда для любой окружности Γ, содержащейся в $D(a,r)$,*

$$\int_\Gamma |f(z)|^p |dz| \le 2 \int_{\partial D(a,r)} |f(z)|^p |dz|.$$

Перейдем к основным результатам данного раздела. Определим меры

$$d\mu_\gamma(t) = (\gamma+1)(1-t)^\gamma dt \qquad \text{и} \qquad d\mu_{k,\alpha,q}(r) = (1-r)^{q(k-\alpha)-1}dr.$$

Теорема 80 *(i) Для фиксированного $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ обобщенный оператор Либера* (5.5.3) *ограничен на пространстве Бесова $B^{p,q}_\alpha$, если $p, q \in [1, \infty)$, $\alpha > 0$.*

(ii) Для фиксированного $z_0 \in \mathbb{D}$ обобщенный оператор Либера (5.5.3) *ограничен на пространстве Бесова $B^{p,q}_\alpha$, если $p, q \in (0, \infty)$, $\alpha > 0$.*

Доказательство. (i) Без ограничения общности можем считать, что число γ вещественно. Дважды применяя неравенство Минковского, Лемму 62 с $\varphi = \phi_t$ и используя вычисленную норму $\|\phi_t\|_\infty = (1-t)|z_0| + t$, мы получаем

$$\begin{aligned}
\|\Lambda^\gamma_{z_0}(f)\|_{B^{p,q}_\alpha} &= \left(\int_0^1 M_p^q\left(\int_0^1 (f\circ\phi_t)^{(k)} d\mu_\gamma(t), r\right) d\mu_{k,\alpha,q}(r)\right)^{1/q} \\
&\le \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 M_p(f^{(k)}\circ\phi_t\cdot t^k, r) d\mu_\gamma(t)\right)^q d\mu_{k,\alpha,q}(r)\right)^{1/q} \\
&\le \int_0^1 \left(\int_0^1 M_p^q(f^{(k)}\circ\phi_t\cdot t^k, r) d\mu_{k,\alpha,q}(r)\right)^{1/q} d\mu_\gamma(t) \\
&= \int_0^1 \|f^{(k)}\circ\phi_t\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{q(k-\alpha)-1}} t^k\, d\mu_\gamma(t) \\
&\le 3^{1/p}\|f^{(k)}\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{q(k-\alpha)-1}} \int_0^1 \left(\frac{\|\phi_t\|_\infty + |\phi_t(0)|}{\|\phi_t\|_\infty - |\phi_t(0)|}\right)^{k-\alpha+1/p} t^k\, d\mu_\gamma(t) \\
&\le 3^{1/p} 2^{k-\alpha+1/p}\|f\|_{B^{p,q}_\alpha}\int_0^1 t^{\alpha-1/p} d\mu_\gamma(t) \\
&= (\gamma+1)3^{1/p}2^{k-\alpha+1/p}B(\alpha+1-1/p, \gamma+1)\|f\|_{B^{p,q}_\alpha},
\end{aligned}$$

где $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функция Эйлера. Часть (i) доказана.

(ii) Пусть $z_0 \in \mathbb{D}, p, q \in (0,\infty), \alpha > 0$. В силу доказанной части (i) мы можем считать, что $1 \le p < \infty, 0 < q < 1$ или $0 < p < 1, 0 < q < \infty$. Пусть f — произвольная функция из $B^{p,q}_\alpha$. Это равносильно тому, что $f^{(k)} \in \mathcal{A}^{p,q}_{q(k-\alpha)-1}$ для некоторого $k > \alpha$. Используя непрерывное вложение

$$\mathcal{A}^{p,q}_\alpha \subset \mathcal{A}^{1,1}_\delta, \qquad \delta > \frac{\alpha+1}{q} + \frac{1}{p} - 1, \tag{5.5.5}$$

см. Теорему 40(v), мы заключаем, что функция $f^{(k)}$ принадлежит классу Бергмана $\mathcal{A}^{1,1}_\beta$ для достаточно больших β, $\beta > k - \alpha + 1/p - 1$. Следовательно, функция $f^{(k)}$ допускает интегральное представление (см., например, [110, с.6])

$$f^{(k)}(z) = (\beta+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-\bar{w}z)^{\beta+2}} f^{(k)}(w) dm_2(w), \qquad z \in \mathbb{D},$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dz^k}(\Lambda^\gamma_{z_0} f)(z) &= \int_0^1 f^{(k)}\big(\phi_t(z)\big) t^k d\mu_\gamma(t) \\
&= (\beta+1)\int_0^1 \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-\bar{w}\phi_t(z))^{\beta+2}} f^{(k)}(w) dm_2(w)\right) t^k d\mu_\gamma(t).
\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

Чтобы оценить интеграл (5.5.6), нам понадобится оценка снизу знаменателя в подынтегральном выражении (5.5.6), именно

$$|1-\bar{w}\phi_t(z)| \geq \frac{1-|z_0|}{2}|1-\bar{w}z|. \tag{5.5.7}$$

Неравенство (5.5.7) можно доказать повторным применением неравенства треугольника:

$$|1-\bar{w}\phi_t(z)| \geq 1-|\phi_t(z)| \geq (1-t)(1-|z_0|) \geq \frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}(1-t)|z-z_0|. \tag{5.5.8}$$

Из (5.5.8) следует, что

$$\begin{aligned} |1-\bar{w}\phi_t(z)| &= |1-\bar{w}z+\bar{w}z-\bar{w}\phi_t(z)| \geq |1-\bar{w}z|-|w||z-\phi_t(z)| \\ &= |1-\bar{w}z|-|w|(1-t)|z-z_0| \geq |1-\bar{w}z|-\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}|1-\bar{w}\phi_t(z)|. \end{aligned}$$

Отсюда неравенство (5.5.7) немедленно следует. Поэтому применяя (5.5.7) к выражению (5.5.6), сводим его к оператору Бергмана (5.5.4),

$$\begin{aligned} \left|\frac{d^k}{dz^k}(\Lambda_{z_0}^{\gamma}f)(z)\right| &\leq (\beta+1)\int_0^1\left(\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^{\beta}}{|1-\bar{w}\phi_t(z)|^{\beta+2}}\big|f^{(k)}(w)\big|dm_2(w)\right)t^k d\mu_{\gamma}(t) \\ &\leq \frac{(\beta+1)(\gamma+1)2^{\beta+2}B(k+1,\gamma+1)}{(1-|z_0|)^{\beta+2}}\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^{\beta}}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}}\big|f^{(k)}(w)\big|dm_2(w) \\ &= C(\beta,\gamma,k,z_0)\,T_{\beta}\big(f^{(k)}\big)(z). \end{aligned}$$

Для достаточно большого β Лемма 63 влечет

$$\begin{aligned} \|\Lambda_{z_0}^{\gamma}(f)\|_{B_{\alpha}^{p,q}} = \left\|\frac{d^k}{dz^k}\Lambda_{z_0}^{\gamma}(f)\right\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{q(k-\alpha)-1}} &\leq C(\beta,\gamma,k,z_0)\,\big\|T_{\beta}\big(f^{(k)}\big)\big\|_{L^{p,q}_{q(k-\alpha)-1}} \\ &\leq C\big\|f^{(k)}\big\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{q(k-\alpha)-1}} = C\|f\|_{B_{\alpha}^{p,q}}, \end{aligned}$$

где последняя постоянная C зависит только от $p,q,\alpha,\beta,\gamma,k,z_0$. Это завершает доказательство Теоремы 80. ■

Замечание. Теорема 80(i) перестает быть верным в случаях

$$0<p<\frac{1}{1+\alpha},\ 0<q<\infty \quad \text{или} \quad p=\frac{1}{1+\alpha},\ 1<q<\infty\ \ (0<\alpha<1). \tag{5.5.9}$$

Этот факт доказывается примером

$$f_{z_0}(z)=(z_0-z)^{-1}\left(\log\frac{e}{z_0-z}\right)^{-1}, \qquad z\in\mathbb{D},$$

где $z_0\in\partial\mathbb{D}$. Действительно, легко проверить, что

$$f'_{z_0}(z)\approx(z_0-z)^{-2}\left(\log\frac{e}{z_0-z}\right)^{-1}, \qquad z\in\mathbb{D}.$$

Покажем, что $f_{z_0}(z)\in B^{p,q}_\alpha$ тогда и только тогда, когда (5.5.9) выполнено.

Можем считать, что $z_0=1$. Сходимость интеграла $\|f_{z_0}\|_{B^{p,q}_\alpha}=\|f'_{z_0}\|_{\mathcal{A}^{p,q}_{q(1-\alpha)-1}}$ равносильна сходимости интеграла

$$I:=\int_{9/10}^1\left[\int_{-1/2}^{1/2}\frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2p}\left|\log\frac{e}{1-re^{i\theta}}\right|^p}\right]^{q/p}(1-r)^{q(1-\alpha)-1}dr.$$

Внутренний интеграл

$$J_p(r):=\int_{-1/2}^{1/2}\frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2p}\left|\log\frac{e}{1-re^{i\theta}}\right|^p},\qquad \frac{9}{10}<r<1,$$

можно оценить так, как это сделано в Лемме 30.

Рассмотрим три случая: $p>\frac12$, $p<\frac12$, $p=\frac12$.

В случае $p>1/2$ получаем оценку

$$J_p(r)\approx C_p\frac{e^{(2p-1)\log\frac{1}{1-r}}}{\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^p}=C_p\frac{1}{(1-r)^{2p-1}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^p},\qquad \frac{9}{10}<r<1.$$

Поэтому

$$I\approx\int_{9/10}^1\frac{dr}{(1-r)^{q(1+\alpha-1/p)+1}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^q}=\int_0^{1/10}\frac{dx}{x^{q(1+\alpha-1/p)+1}\left(\log\frac1x\right)^q}.$$

Последний интеграл сходится тогда и только тогда, когда (5.5.9) выполнено.

В случае $p<1/2$ вновь по Лемме 30 получаем $J_p(r)\approx 1$, и интеграл I сходится.

В случае $p=1/2$ аналогично выводим

$$\begin{aligned}J_{1/2}(r)&\approx\int_0^{1/2}\frac{d\theta}{\left(1-r+\theta\right)\left(\log\frac{1}{1-r+\theta}\right)^{1/2}}\\&=2\left[\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{1/2}-\left(\log\frac{1}{3/2-r}\right)^{1/2}\right]\approx\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

для всех $r\in\left(\frac{9}{10},1\right)$. Таким образом, интеграл I сходится тогда и только тогда, когда условие (5.5.9) выполнено.

С другой стороны, выражение $(\Lambda^\gamma_{z_0}f_{z_0})(z)$ не имеет смысла ни в какой точке $z\in\mathbb{D}$, потому что

$$(\Lambda^\gamma_{z_0}f_{z_0})(z)=\frac{\gamma+1}{z_0-z}\int_0^1\frac{(1-t)^\gamma dt}{t\log\frac{e}{t(z_0-z)}}=\infty.$$

Те случаи, когда $z_0\in\partial\mathbb{D}$ и $\frac{1}{1+\alpha}<p<1$ остаются открытыми.

Перейдем к пространству функций с ограниченной средней осцилляцией. Пространство $BMOA$ голоморфных функций $f\in H(\mathbb{D})$ можно определить через полунорму (см. [4], [18])

$$\|f\|_{BMOA}:=\sup_{\zeta\in\mathbb{D}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})-f(\zeta)|^2P_\zeta(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/2},$$

где через
$$P_\zeta(\theta) = \frac{1-|\zeta|^2}{|1-e^{-i\theta}\zeta|^2}$$
обозначено ядро Пуассона. Пространство $VMOA$ есть замыкание многочленов в $BMOA$, или, что равносильно, состоит из тех функций из $BMOA$, для которых
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) - f(\zeta)|^2 P_\zeta(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} = o(1) \quad \text{при} \quad \zeta \to \partial\mathbb{D}.$$

Теорема 81 *При $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ обобщенный оператор Либера* (5.5.3) *сохраняет пространства BMOA и VMOA.*

Доказательство. Пусть $f \in BMOA$ и число γ вещественно. Тогда оценим
$$\begin{aligned}
\|\Lambda_{z_0}^\gamma(f)\|_{BMOA}^2 &= \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} \int_{-\pi}^{\pi} |(\Lambda_{z_0}^\gamma f)(e^{i\theta}) - (\Lambda_{z_0}^\gamma f)(\zeta)|^2 P_\zeta(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_0^1 \big((f\circ\phi_t)(e^{i\theta}) - (f\circ\phi_t)(\zeta)\big)\, d\mu_\gamma(t)\right|^2 P_\zeta(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} \\
&\le \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \big|(f\circ\phi_t)(e^{i\theta}) - (f\circ\phi_t)(\zeta)\big|^2 d\mu_\gamma(t) P_\zeta(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} \\
&\le \int_0^1 \left[\sup_{\zeta\in\mathbb{D}} \int_{-\pi}^{\pi} \big|(f\circ\phi_t)(e^{i\theta}) - (f\circ\phi_t)(\zeta)\big|^2 P_\zeta(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}\right] d\mu_\gamma(t) \\
&= \int_0^1 \|f\circ\phi_t\|_{BMOA}^2 d\mu_\gamma(t).
\end{aligned}$$
С другой стороны, для любой функции $\phi = \phi_t$ в [74] доказано неравенство
$$\|f\circ\phi\|_{BMOA} \le \|f\|_{BMOA}.$$
Следовательно
$$\|\Lambda_{z_0}^\gamma(f)\|_{BMOA}^2 \le \|f\|_{BMOA}^2 \int_0^1 d\mu_\gamma(t) = \|f\|_{BMOA}^2. \tag{5.5.10}$$

Полагая теперь $f \in VMOA$ и выбирая последовательность многочленов Q_n такую, что $\|f - Q_n\|_{BMOA} \to 0$ при $n \to \infty$. Используя неравенство (5.5.10), приходим к
$$\|\Lambda_{z_0}^\gamma(f - Q_n)\|_{BMOA} \le \|f - Q_n\|_{BMOA} \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$
Поскольку $\Lambda_{z_0}^\gamma(Q_n)$ также являются многочленами, мы заключаем, что $\Lambda_{z_0}^\gamma(f) \in VMOA$. ■

Замечание. Из доказательства Теоремы 81 следует, что
$$\|\Lambda_{z_0}^\gamma\|_{BMOA\to BMOA} \le 1.$$
Отметим также, что Теорема 81 для оператора (5.5.1) доказана в [74].

Перейдем к вопросу компактности обобщенного оператора Либера (5.5.3). Найдем достаточные условия для компактности обобщенного оператора Либера (5.5.3) на пространствах Бесова $B^{p,q}_\alpha$. Компактность оператора (5.5.3) на пространствах $\mathcal{A}^{p,q}_\alpha$ была изучена в [217].

Теорема 82 *При $z_0 \in \mathbb{D}$ обобщенный оператор Либера* (5.5.3) *компактен на пространствах Бесова $B^{p,q}_\alpha$, если $1 \le p < \infty, 0 < q < \infty, \alpha > 0$.*

Доказательство. Аналогично леммам 4 и 5 из [217] мы можем показать, что оператор $\Lambda^\gamma_{z_0} : B^{p,q}_\alpha \to B^{p,q}_\alpha$ компактен тогда и только тогда, когда для каждой ограниченной последовательности $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ в $B^{p,q}_\alpha$, сходящейся к нулю равномерно на компактах из $\mathbb{D}$ при $m \to \infty$, имеем $\lim_{m\to\infty} \|\Lambda^\gamma_{z_0}(f_m)\|_{B^{p,q}_\alpha} = 0$.

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta \in (0, 1)$ настолько близким к 1, чтобы $\int_\delta^1 t^k d\mu_\gamma(t) < \varepsilon$ и $|z_0| \le \delta$. Полагая $\sup_{m\in\mathbb{N}} \|f_m\|_{B^{p,q}_\alpha} \le K$ и $f_m \to 0$ равномерно на компактах из $\mathbb{D}$ при $m \to \infty$, по теореме Вейерштрасса о равномерной сходимости (см., например, [177, Теор.10.27]), мы заключаем, что то же самое верно и для производных f_m, т.е. $f^{(k)}_m \to 0$ равномерно на компактах из $\mathbb{D}$ при $m \to \infty$.

Для $t \in [0, \delta]$ имеем

$$|\phi_t(z)| \le (1-t)|z_0| + t = |z_0| + t(1-|z_0|) \le |z_0| + \delta(1-|z_0|) =: r_0 < 1.$$

Следовательно найдется натуральное число m_0 такое, что для всех $m > m_0$

$$\sup_{z\in\mathbb{D},\, t\in[0,\delta]} \left|(f^{(k)}_m \circ \phi_t)(z)\right| \le \sup_{|z|\le r_0} \left|f^{(k)}_m(z)\right| < \varepsilon. \tag{5.5.11}$$

Далее для $|z_0| \le \delta < r < 1$ и $\delta < t < 1$ круг с центром $(1-t)z_0$ и радиусом rt содержится в $\{z : |z| < r\}$. Поэтому по Лемме 64

$$\begin{aligned} rtM^p_p\big(f^{(k)}_m \circ \phi_t, r\big) &= rt\int_{-\pi}^{\pi} \left|f^{(k)}_m\big((1-t)z_0 + tre^{i\theta}\big)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\le 2r\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}_m\big(re^{i\theta}\big)|^p \frac{d\theta}{2\pi} = 2rM^p_p(f^{(k)}_m, r). \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

В силу неравенства Минковского и неравенств (5.5.11), (5.5.12) мы получаем

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda_{z_0}^{\gamma}(f_m)\|_{B_\alpha^{p,q}}^q &= \int_0^1 M_p^q\left(\int_0^1 (f_m\circ\phi_t)^{(k)} d\mu_\gamma(t), r\right) d\mu_{k,\alpha,q}(r)\\
&\le \int_0^1 \left(\int_0^1 M_p(f_m^{(k)}\circ\phi_t\cdot t^k, r) d\mu_\gamma(t)\right)^q d\mu_{k,\alpha,q}(r)\\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 M_p(f_m^{(k)}\circ\phi_t, r) t^k d\mu_\gamma(t)\right)^q d\mu_{k,\alpha,q}(r)\\
&= \int_\delta^1 \left(\int_\delta^1 M_p(f_m^{(k)}\circ\phi_t, r) t^k d\mu_\gamma(t)\right)^q d\mu_{k,\alpha,q}(r)\\
&\quad + \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_{[0,1)^2\setminus[\delta,1)^2}(t,r) M_p(f_m^{(k)}\circ\phi_t, r) t^k d\mu_\gamma(t)\right)^q d\mu_{k,\alpha,q}(r)\\
&\le \left(\frac{2}{\delta}\right)^q \int_\delta^1 M_p^q\big(f_m^{(k)}, r\big)\left(\int_\delta^1 t^k d\mu_\gamma(t)\right)^q d\mu_{k,\alpha,q}(r)\\
&\quad + C(k,\alpha,\gamma,q) \sup_{z\in\mathbb{D},\, t\in[0,\delta]} \big|(f_m^{(k)}\circ\phi_t)(z)\big|^q\\
&\le \varepsilon^q C\int_\delta^1 M_p^q\big(f_m^{(k)}, r\big) d\mu_{k,\alpha,q}(r) + C\varepsilon^q\\
&\le \varepsilon^q C\big\|f_m\big\|_{B_\alpha^{p,q}}^q + C\varepsilon^q\\
&\le \varepsilon^q C\left(K^q+1\right).
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\|\Lambda_{z_0}^{\gamma}(f_m)\|_{B_\alpha^{p,q}} \to 0$ при $m\to\infty$, что и требовалось доказать. $\blacksquare$

Глава 6

Интегральные представления в пространствах $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой

Результаты этой главы опубликованы в [250], [254], [262].

6.1 Интегральные представления в пространствах $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой на поликруге

В этом разделе соотношения с дробным интегродифференцированием, полученные в Разделах 5.1-5.2, будут применены для вывода интегральных представлений в пространствах $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой на поликруге.

Определение. Скажем, что заданная в поликруге U^n функция $f(z)$ принадлежит пространству Бесова $\Lambda_\alpha^{p,q}$ $(0 < p, q \leq \infty, \alpha_j \geq 0)$, если $\mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}} f(z) \in L(p, q, \widetilde{\alpha} - \alpha)$, где $\widetilde{\alpha} = (\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)$, $\widetilde{\alpha}_j$ — наименьшее целое число, превосходящее α_j, и $\mathcal{D}^\alpha$ — оператор дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля, см. (1.2.5), (1.2.31). Пространство Бесова $\Lambda_\alpha^{p,q}$ снабжается (квази)нормой $\|f\|_{\Lambda_\alpha^{p,q}} = \|\mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}} f\|_{p,q,\widetilde{\alpha}-\alpha}$.

Обозначим через $h\Lambda_\alpha^{p,q}$ подпространство $\Lambda_\alpha^{p,q}$, содержащее n-гармонические функции. Для n-гармонической функции $f \in h\Lambda_\alpha^{p,q}$ мультииндекс $\widetilde{\alpha}$ может быть заменен любым мультииндексом $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_j > \alpha_j$, а соответствующие нормы эквивалентны: $\|f\|_{h\Lambda_\alpha^{p,q}} \approx \|\mathcal{D}^\gamma f\|_{p,q,\gamma-\alpha}$.

Если $\varphi(\zeta)$ — граничная функция некоторой функции $v(z)$ из $\Lambda_\alpha^{p,q}$ (или $h\Lambda_\alpha^{p,q}$), то будем также писать $\varphi(\zeta) \in \Lambda_\alpha^{p,q}$ (или $h\Lambda_\alpha^{p,q}$).

Заметим, что согласно соотношению (5.2.41), из $v(z) \in h\Lambda_\alpha^{p,q}$ следует $v(z) \in h^p(U^n)$ для $0 < p \leq \infty$.

В следующей основной теореме мы строим интегральные представления типа Пуассона классов $h(p, q, \alpha)$ в виде свертки с использованием функций пространств Бесова. В отличие от широко известных бергмановских представлений, интеграл распространен не по всему поликругу, а лишь на части его границы — по тору T^n.

Теорема 83 *Пусть $0 < p, q \leq \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 0$, $1 \leq j \leq n$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) Пространство $h(p,q,\alpha)$ совпадает с множеством всех функций $u(z)$, представимых в виде

$$u(z)=\int_{T^n} P_\beta(z,\zeta)\,\varphi_1(\zeta)\,dm_n(\zeta), \qquad z\in U^n, \tag{6.1.1}$$

где $\beta_j>\max\{\alpha_j,\,\alpha_j+1/p-1\}$, φ_1 — функция класса Бесова $h\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}$, и P_β — ядро типа Пуассона–Бергмана (3.2.2).

(ii) Пространство $H(p,q,\alpha)$ совпадает с множеством всех функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z)=\int_{T^n} P_\beta(z,\zeta)\,\varphi_2(\zeta)\,dm_n(\zeta), \qquad z\in U^n, \tag{6.1.2}$$

где $\beta_j>\max\{\alpha_j,\,\alpha_j+1/p-1\}$, φ_2 — функция класса Бесова $\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}$, которую можно голоморфно продолжить в U^n.

(iii) Оператор $\varphi_1\mapsto u$ является изоморфизмом, действующим из $h\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}$ на $h(p,q,\alpha)$, а оператор $\varphi_2\mapsto f$ является изоморфизмом, действующим из $H\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}$ на $H(p,q,\alpha)$.

(iv) Функции φ_1,φ_2 из (6.1.1)–(6.1.2) могут быть выведены из формул обращения

$$\varphi_1(\zeta)=\lim_{r\to(1,\ldots,1)}\mathcal{D}^{-\beta}u(r\zeta), \qquad \text{п.в.}\quad \zeta\in T^n, \tag{6.1.3}$$

$$\varphi_2(\zeta)=\lim_{r\to(1,\ldots,1)}\mathcal{D}^{-\beta}f(r\zeta), \qquad \text{п.в.}\quad \zeta\in T^n, \tag{6.1.4}$$

где $\beta_j>\max\{\alpha_j,\,\alpha_j+1/p-1\}\quad(1\le j\le n)$.

Доказательство. (i) Пусть $0<p,q\le\infty$, $u(z)\in h(p,q,\alpha)$ — произвольная функция, и $\beta_j>\max\{\alpha_j,\,\alpha_j+1/p-1\}\ge\alpha_j>0$ $(1\le j\le n)$. Согласно соотношению (5.2.41) функция $\varphi_1(z)=\mathcal{D}^{-\beta}u(z)$ принадлежит классу Харди $h^p(U^n)$. При $1<p\le\infty$ функция $\varphi_1(z)$, очевидно, представима интегралом Пуассона своей граничной функции. Это же самое верно также при $0<p\le1$. Действительно, в этом случае $\beta_j>\alpha_j+1/p-1\,(1\le j\le n)$.

Вначале рассмотрим те параметры β_j, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_j\le\alpha_j+1/p-1<\beta_j<\alpha_j+1/p \qquad (1\le j\le n).$$

Тогда

$$1<p_0=\min_{1\le j\le n}\ \frac{1}{\alpha_j+1/p-\beta_j}.$$

Согласно соотношению (5.2.42)

$$\varphi_1(z)=\mathcal{D}^{-\beta}u(z)\in h^s(U^n) \qquad \text{для любого}\quad s\in(0,p_0).$$

Выбирая число s, $1<s<p_0$, имеем $\varphi_1(z)\in h^s(U^n)$.

Если же некоторые или все компоненты β_j удовлетворяют $\beta_j\ge\alpha_j+1/p$, то для таких j воспользуемся полугрупповой формулой (5.2.5) и представим

$$\mathcal{D}^{-\beta_j}_{r_j}u(z)=\mathcal{D}^{-(\beta_j-\alpha_j-1/p+1/2)-(\alpha_j+1/p-1/2)}_{r_j}u(z)=\widetilde{\mathcal{D}}^{-(\beta_j-\alpha_j-1/p+1/2)}_{r_j}\mathcal{D}^{-(\alpha_j+1/p-1/2)}_{r_j}u(z),$$

где оператор интегрирования $\widetilde{\mathcal{D}}^{-\gamma}$, определенный по формуле (5.2.4), немногим отличается от $\mathcal{D}^{-\gamma}$.

Поскольку число $\alpha_j + 1/p - 1/2$ попадает в интервал $(\alpha_j + 1/p - 1, \alpha_j + 1/p)$, то вновь благодаря соотношению (5.2.42)

$$\varphi_1(z) = \mathcal{D}^{-\beta} u(z) \in h^s(U^n) \qquad \text{для некоторого} \quad s > 1.$$

В обоих случаях получили $\varphi_1(z) \in h^s$ для некоторого $s > 1$. Следовательно при любых $0 < p \le \infty$ и $\beta_j > \max\{\alpha_j,\, \alpha_j + 1/p - 1\}$ функция $\varphi_1(z)$ представима интегралом Пуассона своей граничной функции,

$$\varphi_1(z) = \int_{T^n} P(z,\zeta)\, \varphi_1(\zeta)\, dm_n(\zeta), \qquad z \in U^n.$$

Продифференцируем посредством оператора $\mathcal{D}^{\beta}$, что приводит к

$$\mathcal{D}^{\beta}\varphi_1(z) = \int_{T^n} P_\beta(z,\zeta)\, \varphi_1(\zeta)\, dm_n(\zeta), \qquad z \in U^n.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{D}^{\beta}\varphi_1(z) = u(z) \in h(p,q,\alpha) = h\big(p,q,\beta - (\beta - \alpha)\big),$$

получаем $\varphi_1 \in h\Lambda^{p,q}_{\alpha}$, что и требовалось показать.

Обратно, пусть имеет место представление (6.1.1) с некоторым мультииндексом $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\quad \beta_j > \max\{\alpha_j,\, \alpha_j + 1/p - 1\}$. Принадлежность $\varphi_1 \in h\Lambda^{p,q}_{\alpha}$ по определению означает, что

$$\mathcal{D}^{\beta}\varphi_1(z) \in h\big(p,q,\beta - (\beta - \alpha)\big) = h(p,q,\alpha).$$

Так как $\beta_j > \alpha_j$, то согласно соотношению (5.2.41)

$$\mathcal{D}^{-\beta}\mathcal{D}^{\beta}\varphi_1(z) = \varphi_1(z) \in h^p(U^n).$$

Более того, поскольку $\beta_j > \max\{\alpha_j,\, \alpha_j + 1/p - 1\}$ и $\mathcal{D}^{\beta}\varphi_1(z) \in h(p,q,\alpha)$, то как показано в первой части доказательства,

$$\varphi_1(z) \in h^s(U^n) \qquad \text{для некоторого} \quad s > 1.$$

Поэтому функция $\varphi_1(z)$ представима своим интегралом Пуассона

$$\varphi_1(z) = \int_{T^n} P(z,\zeta)\, \varphi_1(\zeta)\, dm_n(\zeta).$$

Дифференцируя с порядком β, по формуле (6.1.1) получаем

$$\mathcal{D}^{\beta}\varphi_1(z) = \int_{T^n} \mathcal{D}^{\beta} P(z,\zeta)\, \varphi_1(\zeta)\, dm_n(\zeta) = \int_{T^n} P_\beta(z,\zeta)\, \varphi_1(\zeta)\, dm_n(\zeta) = u(z).$$

Следовательно $u(z) = \mathcal{D}^{\beta}\varphi_1(z) \in h(p,q,\alpha)$, что и требовалось доказать.

Часть (ii) доказать проще, ибо здесь мы имеем дело с голоморфными функциями.

В части (iii) изоморфизм операторов $\varphi_1 \mapsto u$ и $\varphi_2 \mapsto f$ вытекает из равенств $u = \mathcal{D}^\beta \varphi_1$, $f = \mathcal{D}^\beta \varphi_2$ и самого определения классов Бесова с эквивалентностью норм

$$\|\varphi_1\|_{\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}} \approx \|u\|_{p,q,\alpha}, \qquad \|\varphi_2\|_{\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}} \approx \|f\|_{p,q,\alpha}.$$

В части (iv), чтобы вывести формулы обращения (6.1.3) и (6.1.4) достаточно представить функции $\varphi_1 = \mathcal{D}^{-\beta} u$ и $\varphi_2 = \mathcal{D}^{-\beta} f$ своими интегралами Пуассона, и затем перейти к пределу при $r \to (1, \ldots, 1)$, получая их граничные значения на торе T^n.

Этим завершается доказательство Теоремы 83. ■

Следующее интегральное представление для весового пространства Бергмана $h(2,2,\alpha)$ намного проще.

Теорема 84 *Пространство $h(2,2,\alpha)$ ($\alpha_j > 0$) совпадает с множеством всех функций $u(z)$, представимых в виде*

$$u(z) = \int_{T^n} P_\alpha(z,\zeta)\, \varphi(\zeta)\, dm_n(\zeta), \qquad z \in U^n, \tag{6.1.5}$$

где $\varphi(\zeta) \in L^2(T^n)$. Кроме того,

$$\|u\|_{2,2,\alpha} \approx \|\varphi\|_{L^2(T^n)},$$

и оператор $\varphi \mapsto u$ является изоморфизмом из $L^2(T^n)$ на $h(2,2,\alpha)$. Функция φ может быть выведена из формулы обращения

$$\varphi(\zeta) = \lim_{r \to (1,\ldots,1)} \mathcal{D}^{-\alpha} u(r\zeta), \qquad \text{п.в.} \quad \zeta \in T^n.$$

Доказательство. Как и в предыдущей теореме вывод интегрального представления основан на интегральной формуле Пуассона и одном соотношении с дробным интегродифференцированием из таблицы Теоремы 69. Здесь мы используем тождество

$$\mathcal{D}^\alpha\big(h^2\big) = h(2,2,\alpha),$$

см. (5.2.30), (5.2.40). Мы опускаем очевидные детали. ■

6.2 Интегральные представления в пространствах $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой на верхнем полупространстве

В этом разделе мы характеризуем пространства $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой посредством интегральных представлений на $\mathbb{R}^n$ с использованием пространств Бесова $\Lambda^{p,q}_\alpha$.

Пусть $1 \le p, q \le \infty$, $\alpha > 0$, и $f(x)$ — измеримая функция на $\mathbb{R}^n$. Полунорма Бесова определяется следующим образом:

$$\|f\|_{\Lambda^{p,q}_\alpha} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |t|^{-n-\alpha q} \|\Delta^k_t f(x)\|^q_{L^p(dx)} dt\right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{|t|>0} |t|^{-\alpha} \|\Delta^k_t f(x)\|_{L^p(dx)}, & q = \infty, \end{cases} \tag{6.2.1}$$

где $\Delta_t^1 f(x) = f(x+t) - f(x)$, $\Delta_t^k f(x) = \Delta_t^1 \Delta_t^{k-1} f(x)$, k —целое, $k > \alpha$. Существует эквивалентное определение (см. [225])

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha^{p,q}} = \|\mathcal{D}^k v\|_{p,q,k-\alpha}, \tag{6.2.2}$$

где $v = v(x,y)$ — интеграл Пуассона функции f в верхнем полупространстве $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Заметим, что определение (6.2.2) пригодно для всех q, $0 < q \leq \infty$.

Для любого вещественного числа b через $\mathcal{H}_b$ обозначим линейное пространство [61, с.254], состоящее из всех гармонических функций $v(x,y)$ на $\mathbb{R}_+^{n+1}$ таких, что если $\lambda \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$, $\rho > 0$, и K — произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$, то найдется положительная постоянная $C = C(\lambda, \rho, K)$ такая, что

$$|\partial^\lambda v(x,y)| \leq C y^{-b-|\lambda|}, \qquad x \in K,\ y \geq \rho.$$

Будем также писать $f(x) \in \mathcal{H}_b$, если его гармоническое продолжение в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ принадлежит $\mathcal{H}_b$.

Следующая лемма является небольшим усилением леммы 4.5 из [61].

Лемма 65 *Пусть $1 \leq p,q \leq \infty$, $\alpha > 0$, $f(x)$ — измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция, чей интеграл Пуассона $v(x,y)$ существует, и $v(x,y) \in \bigcap_{b>0} \mathcal{H}_{(-b)}$. Тогда величины (6.2.1) и $\|\mathcal{D}^\gamma v\|_{p,q,\gamma-\alpha}$ эквивалентны для каждого $\gamma > \alpha$.*

Напомним определение пространств Лоренца. Для измеримой функции f на $\mathbb{R}^n$ через λ_f обозначим ее функцию распределения, т.е.

$$\lambda_f(t) = |\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > t\}|, \qquad t > 0,$$

где $|E| = \operatorname{mes} E$ — мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Функция

$$f^*(s) = \inf\{t > 0; \lambda_f(t) \leq s\}$$

называется убывающей перестановкой функции f.

Пространство Лоренца $L(p,q)$ определяется как множество всех измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций f, для которых $\|f\|_{L(p,q)} < +\infty$, где

$$\|f\|_{L(p,q)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \left[t^{1/p} f^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p,q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0}\ t^{1/p} f^*(t), & 0 < p \leq \infty,\ q = \infty. \end{cases}$$

Хорошо известно, что

$$L(p,q_1) \subset L(p,p) = L^p \subset L(p,q_2) \subset L(p,\infty) \subset L^1\left(\frac{dt}{1+|t|^{n+1}} \right)$$

при $1 \leq p \leq \infty, 0 < q_1 \leq p \leq q_2 \leq \infty$.

Гармоническое пространство Лоренца $h(p,q)$, $1 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ (см. [90], [61]) определяется как множество гармонических в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ функций $u(x,y)$ с конечной нормой Лоренца $\|u\|_{h(p,q)} = \sup_{y>0} \|u(x,y)\|_{L(p,q)}$. Поэтому $h(p,p) = h^p$, $1 < p < \infty$.

Нам нужна будет также следующая

Лемма 66 (a) *Пусть функция f принадлежит пространству $BMO(\mathbb{R}^n)$. Тогда f принадлежит $L^p\left(\dfrac{dt}{1+|t|^{n+1}}\right)$ для каждого p, $0 < p < \infty$, и значит классам $L^1\left(\dfrac{dt}{1+|t|^{n+\gamma}}\right)$ и $\mathcal{H}_{(-\gamma)}$ для каждого γ, $0<\gamma<1$.*
(b) *Пусть $f \in L(p,\infty)$ для некоторого $p, 1<p<\infty$. Тогда функция f принадлежит $L^1\left(\dfrac{dt}{1+|t|^{n}}\right)$ и, как следствие, классу $\mathcal{H}_0$.*

Доказательство. Случай $p=1$ первого вложения в части (a) есть хорошо известный результат Феффермана и Стейна [85]. Общий случай в (a) может быть доказан аналогичным способом с использованием неравенства

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f-f_B|^p dx \le C_p\|f\|^p_{BMO}, \quad \text{для любого шара} \quad B\subset\mathbb{R}^n, \quad f_B=\frac{1}{|B|}\int_B f dx,$$

которое является следствием известного неравенства Джона–Ниренберга ([4]). Последнее вложение в части (a) следует из

$$|\partial^\lambda v(x,y)| \le C(\lambda,n)\frac{1}{y^{-\gamma+|\lambda|}}\max\left\{1,\frac{1+|x|}{y}\right\}^{n+\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(t)|dt}{1+|t|^{n+\gamma}}, \qquad \lambda\in\mathbb{Z}_+^{n+1},$$

где $v(x,y)$ — интеграл Пуассона функции f.

Первое вложение в части (b) следует из

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(t)|dt}{1+|t|^n} \le \int_0^{+\infty} f^*(s)\left(\frac{1}{1+|t|^n}\right)^* ds \le \|f\|_{p,\infty}\int_0^{+\infty}\frac{ds}{s^{1/p}(1+s/\omega_n)},$$

где $g^*(s)$ — убывающая перестановка функции $g(t)$, и $\omega_n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$. ■

Теперь сформулируем и докажем основной результат данного раздела.

Теорема 85 *Пусть $1\le p<\infty$, $0<q\le\infty$, $\alpha>0$ — заданные произвольные числа. Тогда справедливы следующие утверждения.*
(i) *Пространство $h(p,q,\alpha)$ совпадает с множеством функций $u(x,y)$, представимых в виде*

$$u(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{D}^\beta P(x-t,y)\,\varphi(t)dt, \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ y>0, \tag{6.2.3}$$

где β ($\alpha<\beta<\alpha+n/p$) — произвольно, и

$$\varphi(t)\in\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}\bigcap L^1\left(\frac{dt}{1+|t|^n}\right). \tag{6.2.4}$$

При этом,

$$\|u\|_{p,q,\alpha}\approx\|\varphi\|_{\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}}. \tag{6.2.5}$$

(ii) *Функцию φ в формуле (6.2.3) можно вывести из формулы обращения*

$$\varphi(x)=\lim_{y\to+0}\mathcal{D}^{-\beta}u(x,y), \qquad \text{п.в.} \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{6.2.6}$$

(iii) *Пространство* $h(p,q,\alpha)$ *совпадает с множеством функций* $u(x,y)$, *представимых в виде* (6.2.3), *где* β $(\alpha<\beta\le\alpha+n/p)$ — *произвольно, и*

$$\varphi(t)\in\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}\bigcap\left(\bigcap_{0<\gamma<1}L^1\left(\frac{dt}{1+|t|^{n+\gamma}}\right)\right).$$

При этом, справедливы соотношения (6.2.5) *и* (6.2.6).

Доказательство. (i) Пусть $u(x,y)\in h(p,q,\alpha)$ — произвольная функция, и β $(\alpha<\beta<\alpha+n/p)$ — произвольное число. Введем функцию $\varphi(x,y)=\mathcal{D}^{-\beta}u(x,y)$, и пусть $\varphi(x)$ — ее граничные значения на $\mathbb{R}^n$. В силу Теоремы 71 (ii) функция $\varphi(x)$ принадлежит $L(p_0,\infty)$ с $p_0=n/\big(\alpha+n/p-\beta\big)$. Следовательно по Лемме 66 (b)

$$\varphi(x)\in L^1\left(\frac{dx}{1+|x|^n}\right),$$

и поэтому функция $\varphi(x,y)$ представима своим интегралом Пуассона

$$\varphi(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}P(x-t,y)\,\varphi(t)dt,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\ y>0.$$

Отсюда

$$u(x,y)=\mathcal{D}^{\beta}\varphi(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{D}^{\beta}P(x-t,y)\,\varphi(t)dt,$$

где интеграл сходится. В то же время, по Лемме 65

$$\|\varphi\|_{\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}}\le C\|\mathcal{D}^{\beta}\varphi\|_{p,q,\beta-(\beta-\alpha)}=C\|u\|_{p,q,\alpha}.$$

Обратно, пусть функция $u(x,y)$ представима в виде (6.2.3)–(6.2.4). Пусть $\varphi(x,y)$ — интеграл Пуассона функции $\varphi(t)$. Дифференцирование посредством оператора $\mathcal{D}^{\beta}$ приводит к

$$\mathcal{D}^{\beta}\varphi(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{D}^{\beta}P(x-t,y)\,\varphi(t)dt=u(x,y).$$

Поскольку по Лемме 65 (b) имеем $\varphi\in\mathcal{H}_0$, то в силу Леммы 65 получаем

$$\|u\|_{p,q,\alpha}=\|\mathcal{D}^{\beta}\varphi\|_{p,q,\beta-(\beta-\alpha)}\le C\|\varphi\|_{\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}}.$$

(ii) Для доказательства (6.2.6) достаточно проинтегрировать (6.2.3) посредством оператора $\mathcal{D}^{-\beta}$, и затем, используя обратимость $\mathcal{D}^{-\beta}$, устремить $y\to+0$.

Утверждение (iii) доказывается аналогично (i) с использовамием Лемм 65 и 66 (a). ∎

В заключение установим более простое интегральное представление в пространстве Бергмана $h(2,2,\alpha)$.

Теорема 86 *Пространство* $h(2,2,\alpha)$ $(\alpha>0)$ *совпадает с множеством функций* $u(x,y)$, *представимых в виде*

$$u(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{D}^{\alpha}P(x-t,y)\ \varphi(t)dt,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\quad y>0,\tag{6.2.7}$$

где $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, функцию φ из (6.2.7) можно вывести из формулы обращения

$$\varphi(x) = \lim_{y\to+0} \mathcal{D}^{-\alpha} u(x,y), \qquad \text{п.в.} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Вывод интегрального представления (6.2.7) проще и аналогичен (6.2.3). Здесь используем тождество $h(2,2,\alpha) = \mathcal{D}^\alpha\big(h^2\big)$, см. (5.3.11) и (5.3.14). Мы опускаем очевидные детали. ■

6.3 Интегральные представления в пространствах Бергмана с общими весами на полуплоскости

В этом разделе мы откажемся от традиционных степенных весовых функций в определении нормы пространства Бергмана и будем рассматривать гораздо более общие весовые функции ω. Подобные весовые функции уже были нами рассмотрены для получения эквивалентных норм в пространствах Бергмана на поликруге, см. Теоремы 13, 14, и еще будут рассмотрены в Главе 7.

В данном разделе мы построим интегральные представления для весовых пространств Бергмана $H^p_\omega(\mathbb{R}^2_+)$ в верхней полуплоскости. С этой целью мы определим "дробное" ω-интегродифференцирование для голоморфных функций в верхней полуплоскости. На этой основе затем построим и оценим семейство ядер типа Коши–Бергмана, ассоциированных с весовыми функциями ω. Все это даст возможность установить воспроизводящие интегральные формулы для пространств Бергмана с общими весами, которые могут убывать сколь угодно быстро в начале координат. Соответствующие функции Бергмана могут иметь произвольно быстрый рост вблизи вещественной оси.

Пусть $\mathbb{R}^2_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость комплексной плоскости, и $H(\mathbb{R}^2_+)$ — множество всех голоморфных функций на $\mathbb{R}^2_+$. При $0 < p < \infty$ обозначим через $H^p = H^p(\mathbb{R}^2_+)$ обычное пространство Харди на $\mathbb{R}^2_+$. Обозначим через L^p_ω множество тех функций $f(z)$, измеримых на $\mathbb{R}^2_+$, для которых конечна (квази)норма

$$\|f\|_{p,\omega} = \left(\iint_{\mathbb{R}^2_+} |f(x+iy)|^p \omega(2y)\,dxdy\right)^{1/p}.$$

где $0 < p < \infty$, ω — некоторая радиальная весовая функция, зависящая только переменной $y > 0$. Для подпространства L^p_ω, состоящего из голоморфных функций, обозначим $H^p_\omega = H(\mathbb{R}^2_+) \cap L^p_\omega$.

Пространства Бергмана с общими весами изучались многими авторами, см., например, [36], [53], [99], [3], [108], [174], [29], [31], [181], [192] и др., в контексте единичного круга, единичного шара и поликруга из $\mathbb{C}^n$, в то время как пространства Бергмана с общими весами в полуплоскости изучались гораздо реже. Следуя Шилдсу и Вильямсу [181], все эти авторы рассматривали "регулярные" весовые функции, удовлетворяющие некоторым ограничениям на рост вблизи границы области. Поэтому их техника была близкой к случаю стандартных весовых функций $\omega(r) = (1-r)^{\alpha-1}$

для единичного круга, шара или поликруга и $\omega(y) = y^{\alpha-1}$ $(\alpha > 0)$ для верхней полуплоскости (полупространства). Более общие весовые функции изучались в работах А. Карапетяна [16], [17], в рамках пространств со смешанной нормой в трубчатых областях $\mathbb{C}^n$ при $1 \le p \le 2$. В то же время в работах [16], [17] применялась в основном техника Фурье–Планшереля, которая строго зависела от ограничения $1 \le p \le 2$.

В отличие от работ А. Карапетяна [16], [17], наши доказательства опираются на технику "дробного" интегродифференцирования, ассоциированного с весовой функцией ω, а также на оценки ядер типа Коши–Бергмана K_ω. Это дало нам возможность достичь результатов для всех $p, 1 \le p < \infty$.

Всюду в этом разделе приняты обозначения $z = x+iy$, $\zeta = \xi+i\eta$, $f_y(x) = f(x+iy)$. Будем, как обычно, писать $T : X \longrightarrow Y$, если оператор T ограниченно действует из пространства X в Y, т.е. $\|Tf\|_Y \le C\|f\|_X \;\; \forall f \in X$.

Определение. Скажем, что положительная и непрерывная на $(0,\infty)$ функция $\omega(x)$ принадлежит классу $W(= W_{\delta,\alpha})$, если существуют $\delta, \alpha > 0$ такие, что $\omega(x) = O(x^{\delta-1})$ при $x \to +0$, и $\omega(x) \approx x^{\alpha-1}$ при $x \to +\infty$.

Последнее условие на бесконечности можно ослабить, однако это не принципиально, и главным для $\omega(x)$ условием является свобода убывать сколь угодно быстро при $x \to +0$.

Следующие типичные весовые функции принадлежат классу W:

$$x^{\alpha-1}, \quad e^{-1/x}, \quad x^{\alpha-1}e^{-\beta/x}, \quad \exp\big(-e^{1/x}\big), \quad \exp\big(-\exp(e^{1/x})\big) \qquad \text{и т. д.},$$

где $\alpha, \beta > 0$.

Для весовых функций $\omega \in W$ рассмотрим их преобразования Лапласа

$$\mathcal{L}_\omega(t) = \int_0^\infty \omega(x)e^{-tx}dx, \qquad t > 0.$$

Первая вспомогательная лемма содержит оценки для преобразования Лапласа $\mathcal{L}_\omega(t)$ и его производных.

Лемма 67 *(i) Если весовая функция ω принадлежит классу $W_{\delta,\alpha}$ для некоторых $\delta, \alpha > 0$, то для любого $k = 0, 1, 2, \dots$*

$$|\mathcal{L}_\omega^{(k)}(t)| \le C\,\frac{1}{t^{\delta+k}}, \qquad t \ge 1, \tag{6.3.1}$$

$$|\mathcal{L}_\omega^{(k)}(t)| \approx \frac{1}{t^{\alpha+k}}, \qquad 0 < t \le 1. \tag{6.3.2}$$

(ii) Положим, что преобразование Лапласа $\mathcal{L}_\omega(t)$ некоторой положительной и непрерывной функции $\omega(x)$ сходится для любого $t > 0$. Если оценки (6.3.1) *и* (6.3.2) *имеют место для $k = 0$ и некоторых $\delta, \alpha > 0$, то $\omega \in W_{\delta,\alpha}$.*

Лемма 67 следует непосредственно из известных свойств преобразования Лапласа, см., например, [230].

Лемма 68 *Пусть $0 < p < \infty$ и $\omega \in W$. Тогда любая функция $f(z) \in H^p_\omega$ удовлетворяет оценкам:*

(i)

$$M_p^p(f;y) \le \frac{2\|f\|_{p,\omega}^p}{y \cdot \min\limits_{y\le\eta\le 3y} \omega(\eta)}, \qquad y>0,$$

где $M_p(f;y) = \big\|f(x+iy)\big\|_{L^p(dx)}$. *В частности, функция* $f(z)$ *принадлежит классу Харди* H^p *на каждой полуплоскости* $\mathbb{R}\times(\rho,\infty)$, $\rho>0$.
(ii)

$$|f(x+iy)|^p \le \frac{2\|f\|_{p,\omega}^p}{y \cdot \displaystyle\int_{y/2}^{y} \omega(\eta)d\eta}, \qquad z=x+iy\in\mathbb{R}^2_+.$$

В частности, каждый точечный функционал $f\mapsto f(z)$ *для* $z\in\mathbb{R}^2_+$ *является ограниченным линейным функционалом на* H^p_ω.

Лемма 69 *(i) При* $0<p<\infty$ *и* $\omega\in W$ *пространство* H^p_ω *является замкнутым и полным подпространством* L^p_ω, *и значит является банаховым при* $1\le p<\infty$.
(ii) Если $0<p<\infty$, $\omega\in W$, *то* $\|f_\rho - f\|_{p,\omega}\longrightarrow 0$ *при* $\rho\to+0$ *для каждой функции* $f(z)\in H^p_\omega$ *и ее растянутой функции* $f_\rho(z)=f(z+i\rho)$.

Доказательство Леммы 68 стандартно, поэтому его опускаем. Лемма 69 вытекает из Леммы 68.

Перейдем к определению "дробных" операторов интегродифференцирования, ассоциированных с весами ω.

Напомним классическую теорему Винера–Пэли, см., например, [228].

Теорема Винера–Пэли. *(i) Если* $f(z)\in H^p(\mathbb{R}^2_+)$ *для некоторого* $p, 1\le p\le 2$, *то*

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{itz}\widehat{f}(t)dt, \qquad z\in\mathbb{R}^2_+, \tag{6.3.3}$$

где $\widehat{f}(t)$ — *преобразование Фурье граничной функции* $f(x)$. *Кроме того,* $\widehat{f}(t)=0$ *для почти всех* $t\le 0$.
(ii) Если функция $f(z)$ *представима в виде*

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{itz}F(t)dt, \qquad z\in\mathbb{R}^2_+, \tag{6.3.4}$$

для некоторого $F(t)\in L^2(\mathbb{R})$, *то* $f(z)$ *принадлежит* H^2.

Введем оператор ω-интегрирования

$$\mathfrak{I}^\omega f(z)=\int_0^\infty \omega(\eta)f(z+i\eta)d\eta, \qquad z\in\mathbb{R}^2_+.$$

В специальном случае $\omega(\eta)=\frac{1}{\Gamma(a)}\eta^{\alpha-1}$ $(\alpha>0)$ оператор $\mathfrak{I}^\omega$ сводится к хорошо известному оператору дробного интегрирования Римана–Лиувилля (1.1.3).

Для того чтобы определить обратный оператор, предположим, что функция $f(z)$ представима сходящимся интегралом (6.3.4) с некоторой функцией $F(t)$, не обязательно принадлежащей L^2. Тогда определим

$$\mathcal{D}^\omega f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{itz}F(t)}{\mathcal{L}_\omega(t)}dt, \qquad z\in\mathbb{R}^2_+.$$

Ниже покажем обратимость операторов $\mathfrak{I}^{\omega}$ и $\mathcal{D}^{\omega}$.

Поставим вопрос: может ли весовая функция $\omega \in W$ быть представленной в виде

$$\omega(x) = \int_0^x \omega_1(x-\xi)\,\omega_1(\xi)d\xi \tag{6.3.5}$$

с некоторой весовой функцией ω_1. Следующая лемма решает интегральное уравнение (6.3.5) (первого рода) в классе W.

Лемма 70 *Для $\omega \in W$ интегральное уравнение* (6.3.5) *первого рода имеет решение в классе W. Точнее, если $\omega \in W_{\delta,\alpha}$ для некоторых $\delta, \alpha > 0$, то существует решение (не обязательно положительное) $\omega_1 \in W_{\delta/2,\alpha/2}$.*

Доказательство. Пусть весовая функция $\omega \in W_{\delta,\alpha}$ представлена в виде (6.3.5). Переход к преобразованию Лапласа дает

$$\mathcal{L}_{\omega_1}(t) = \sqrt{\mathcal{L}_{\omega}(t)}. \tag{6.3.6}$$

Формула обратного преобразования Лапласа для любого $a > 0$ приводит к

$$\omega_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\xi x}\mathcal{L}_{\omega_1}(\xi)d\xi = \frac{e^{ax}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\eta x}\sqrt{\mathcal{L}_{\omega}(a+i\eta)}d\eta, \qquad x > 0. \tag{6.3.7}$$

Равенство (6.3.6) показывает, что $\mathcal{L}_{\omega_1}(t)$ удовлетворяет оценкам (6.3.1) и (6.3.2), в которых $k = 0$ и δ, α заменены на $\delta/2$, $\alpha/2$. Благодаря Лемме 67 $\omega_1 \in W_{\delta/2,\alpha/2}$. ■

Ниже приведем несколько примеров весовых функций ω и ω_1. При этом опустим рутинное вычисление ω_1.

Пример 1. Если $\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$ $(\alpha > 0)$, то $\omega_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}x^{\alpha/2-1}$.

Пример 2. Если $\omega(x) = x^{-1/2}e^{-1/x}$, то для любого $a > 0$

$$\omega_1(x) = \frac{\pi^{1/4}}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \zeta^{-1/4}e^{x\zeta-\sqrt{\zeta}}\,d\zeta = \frac{2}{\pi^{3/4}}\int_0^{\infty}\sqrt{t}\,e^{-xt^2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt.$$

Пример 3. Если $\omega(x) = x^{\alpha-1}e^{-\beta/4x}$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0)$, то для любого $a > 0$

$$\omega_1(x) = \left(\frac{\beta}{4}\right)^{\alpha/4}\frac{1}{\pi i\sqrt{2}}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\zeta^{-\alpha/4}e^{x\zeta}\sqrt{\mathbf{K}_{\alpha}\big(\sqrt{\beta\zeta}\big)}\;d\zeta,$$

где $\mathbf{K}_{\alpha}$ — функция Макдоналда, см., например, [228].

Следующая теорема показывает каким образом ω-интегродифференирование дает возможность переходить от весового пространства Бергмана к пространству Харди, и наоборот.

Теорема 87 *Пусть $\omega \in W$, а весовая функция ω_1 определена уравнением* (6.3.5). *Тогда:*

(i) Имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}^{\omega}: H^1_{\omega} &\longrightarrow H^1, && \text{т.е.} && \|\mathfrak{I}^{\omega} f\|_{H^1} \le C\|f\|_{1,\omega}, && (6.3.8)\\
\mathfrak{I}^{\omega_1}: H^2_{\omega} &\longrightarrow H^2, && \text{и более того,} && \|\mathfrak{I}^{\omega_1} f\|_{H^2} = \|f\|_{2,\omega}, && (6.3.9)\\
\mathcal{D}^{\omega_1}: H^2 &\longrightarrow H^2_{\omega}, && \text{и более того,} && \|\mathcal{D}^{\omega_1}\varphi\|_{2,\omega} = \|\varphi\|_{H^2}. && (6.3.10)
\end{aligned}$$

(ii) Если $1 \le p \le 2$ и $f(z) \in H^p\big(\mathbb{R} \times (\rho,\infty)\big)$ для любого $\rho > 0$, то

$$\mathfrak{I}^{\omega}\mathcal{D}^{\omega} f(z) = f(z), \qquad z \in \mathbb{R}^2_+. \tag{6.3.11}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
&\text{Если} && f(z) \in H^2_{\omega}, && \text{то} && \mathcal{D}^{\omega_1}\mathfrak{I}^{\omega_1} f(z) = f(z). && (6.3.12)\\
&\text{Если} && f(z) \in H^1_{\omega}, && \text{то} && \mathcal{D}^{\omega}\mathfrak{I}^{\omega} f(z) = f(z). && (6.3.13)
\end{aligned}$$

Доказательство. Соотношение (6.3.8) доказывается непосредственно прямой оценкой. Чтобы доказать (6.3.9), положим $f(z) \in H^2_{\omega}$. Согласно Лемме 68,

$$f(z) \in H^2\big(\mathbb{R} \times (\rho,\infty)\big) \qquad \text{для любого} \qquad \rho > 0.$$

Как хорошо известно [228],

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(t) e^{itz} dt, \qquad z \in \mathbb{R}^2_+, \tag{6.3.14}$$

где функция $g(t) = e^{ty}\widehat{f}_y(t)$ не зависит от y, и, кроме того, равенство Парсеваля дает

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{2,\omega} &= \int_0^{\infty} \omega(2y)\|e^{-ty}g(t)\|^2_{L^2(dt)}dy\\
&= \int_0^{\infty} |g(t)|^2 \mathcal{L}_{\omega}(t)dt = \|g(t)\mathcal{L}_{\omega_1}(t)\|^2_{L^2(dt)}.
\end{aligned}$$

Следовательно для функции $\varphi(z) = \mathfrak{I}^{\omega_1} f(z)$ имеем

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} \omega_1(\eta) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(t) e^{it(z+i\eta)} dt\right) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(t) e^{itz} \mathcal{L}_{\omega_1}(t) dt.$$

Поэтому по Теореме Винера–Пэли $\varphi(z) \in H^2$, и $\widehat{\varphi}(t) = g(t)\mathcal{L}_{\omega_1}(t) = 0$ при $t < 0$. Отсюда

$$\|\varphi\|_{H^2} = \|\widehat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|g(t)\mathcal{L}_{\omega_1}(t)\|_{L^2(0,\infty)} = \|f\|_{2,\omega}.$$

Соотношение (6.3.10) можно доказать аналогично.

Формула обращения (6.3.11) следует из определений операторов интегродифференцирования и Теоремы Винера–Пэли

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}^{\omega}\mathcal{D}^{\omega} f(z) &= \int_0^{\infty} \omega(\eta) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\widehat{f}(t)\, e^{it(z+i\eta)}}{\mathcal{L}_{\omega}(t)} dt\right) d\eta\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}(t)\, e^{itz} dt = f(z), && (6.3.15)
\end{aligned}$$

где $\widehat{f} \in L^{p'}(0,\infty)$.

Переходя к доказательству (6.3.12), отметим, что преобразование Фурье растянутой функции $f_\rho(z) \in H^2$ $(\rho > 0)$ коммутирует с оператором $\mathfrak{I}^{\omega_1}$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\big(\widehat{\mathfrak{I}^{\omega_1} f_\rho}\big)(x) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{I}^{\omega_1} f_\rho(\xi)\frac{e^{-i\xi x}-1}{-i\xi}d\xi \\
&= \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \omega_1(\eta)\left(\int_{\mathbb{R}} f_\rho(\xi+i\eta)\frac{e^{-i\xi x}-1}{-i\xi}d\xi\right)d\eta \\
&= \int_0^\infty \omega_1(\eta)\,\widehat{f}_\rho(x+i\eta)d\eta = \big(\mathfrak{I}^{\omega_1}\widehat{f}_\rho\big)(x), \qquad x > 0. \qquad (6.3.16)
\end{aligned}$$

Здесь дифференцирование под знаком интеграла обосновано ввиду $\omega_1 \in W_{\delta/2,\alpha/2}$ и равномерной сходимости интеграла

$$\int_0^\infty \omega_1(\eta)\,\widehat{f}_\rho(x+i\eta)d\eta = g(x)e^{-x\rho}\int_0^\infty \omega_1(\eta)\,e^{-x\eta}d\eta$$

в $x \in [x_1, x_2]$ для любых $0 < x_1 < x_2 < \infty$. Поскольку $\mathfrak{I}^{\omega_1} f(z) \in H^2$, то получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\omega_1}\mathfrak{I}^{\omega_1} f_\rho(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{\big(\widehat{\mathfrak{I}^{\omega_1} f_\rho}\big)(t)e^{itz}}{\mathcal{L}_{\omega_1}(t)}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \omega_1(\eta)\left(\int_0^\infty \frac{\widehat{f}_\rho(t+i\eta)e^{itz}}{\mathcal{L}_{\omega_1}(t)}dt\right)d\eta \\
&= \mathfrak{I}^{\omega_1}\mathcal{D}^{\omega_1} f_\rho(z) = f_\rho(z),
\end{aligned}$$

благодаря (6.3.15) и (6.3.11). Таким образом, формула (6.3.12) следует, ибо число $\rho > 0$ может быть выбрано произвольно.

Следующая формула обращения (6.3.13) доказывается проще. Это завершает доказательство Теоремы 87. ■

Отметим, что соотношения (6.3.8)–(6.3.10) для стандартных степенных весовых функций $\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$ доказаны в Разделе 5.3.

Перейдем к построению ядер типа Коши–Бергмана и их оценкам. Пусть $\omega \in W$ и $K(z) = \dfrac{-1}{iz} = \displaystyle\int_0^\infty e^{itz}dt$ — обычное ядро Коши в $\mathbb{R}^2_+$. Определим ω-ядро типа Коши–Бергмана формулой

$$K_\omega(z) = \mathcal{D}^\omega K(z), \qquad z \in \mathbb{R}^2_+. \qquad (6.3.17)$$

В интегральной форме

$$K_\omega(z) = \int_0^\infty \frac{e^{itz}}{\mathcal{L}_\omega(t)}dt$$

эти ядра были введены А. Карапетяном [16], [17]. Также определим модификации

$$K_\omega(z,\zeta) = K_\omega(z-\bar{\zeta}), \qquad z,\zeta \in \mathbb{R}^2_+.$$

Легко видеть, что для стандартных весов $\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} (\alpha > 0)$ имеем

$$K_\omega(z,\zeta) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\big(i(\bar{\zeta} - z)\big)^{\alpha+1}},$$

т.е. эти ядра сводятся к обычным ядрам Бергмана в полуплоскости.

Следующая лемма содержит важные оценки ядер K_ω, что вместе с Теоремой 87 будет играть основную роль в выводах интегральных представлений в общих весовых пространствах Бергмана H^p_ω.

Лемма 71 *Пусть $\omega \in W_{\delta,\alpha}$ для некоторых $\delta, \alpha > 0$. Тогда*

$$|K_\omega(z)| \le C(\delta,\alpha) \frac{1}{y^2\,\omega(y/2)}, \qquad x \in \mathbb{R},\ y > 0, \tag{6.3.18}$$

$$|K_\omega(z)| \le C(\delta,\alpha) \frac{1}{|z|} \left(\frac{1}{1+y^\alpha} + \frac{1}{y^2 \omega^2(y/4)} \right), \qquad x \in \mathbb{R},\ y > 0. \tag{6.3.19}$$

Если $1 < p < \infty$, то $K_\omega(z,\zeta) \in L^p_\omega\big(\mathbb{R}^2_+; dm_2(\zeta)\big)$ для каждого $z \in \mathbb{R}^2_+$, и

$$\big\| K_\omega(z,\cdot) \big\|_{p,\omega} \le C(p,\omega,y), \qquad x \in \mathbb{R},\ y > 0, \tag{6.3.20}$$

где $C(p,\omega,y)$ непрерывна по $y > 0$ и бесконечно малая при $y \to +\infty$.

При этом оценка (6.3.20) перестает быть верной при $p = 1$.

Доказательство. Оценка (6.3.18) непосредственно следует из Леммы 67.

Чтобы доказать (6.3.19) проинтегрируем по частям:

$$K_\omega(z) = \frac{1}{iz} \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) e^{itz} \frac{\mathcal{L}'_\omega(t)}{\mathcal{L}^2_\omega(t)} dt.$$

Тогда

$$\int_0^1 e^{-ty} \frac{|\mathcal{L}'_\omega(t)|}{\mathcal{L}^2_\omega(t)} dt \approx \int_0^1 e^{-ty} t^{\alpha-1} dt \approx \frac{1}{1+y^\alpha}, \qquad y > 0,$$

и

$$\int_1^\infty e^{-ty} \frac{|\mathcal{L}'_\omega(t)|}{\mathcal{L}^2_\omega(t)} dt \le C \frac{1}{\omega^2(y/4)} \int_1^\infty t e^{-ty/2} dt, \qquad y > 0.$$

Последующая оценка при $y \to +\infty$ и $y \to +0$ приводит к (6.3.19).

Чтобы доказать (6.3.20), разобщим интеграл на три части

$$\big\| K_\omega(z,\cdot) \big\|^p_{p,\omega} = \int\limits_{|\xi - x| < 1} \int_0^\infty + \int\limits_{|\xi - x| > 1} \int_0^1 + \int\limits_{|\xi - x| > 1} \int_1^\infty,$$

и затем оценим, пользуясь (6.3.18) и (6.3.19).

Наконец, при $p = 1$ достаточно рассмотреть степенной вес $\omega(y) = y^{\alpha-1}\,(\alpha > 0)$ для того, чтобы придти к противоречию с (6.3.20). ■

Теперь сформулируем и докажем основную теорему данного раздела об интегральных представлениях в общих весовых пространствах Бергмана H^p_ω.

Теорема 88 *Если $1 \le p < \infty, \omega \in W$, то любая функция $f \in H^p_\omega$ представима в виде*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2_+} f(\zeta)\, K_\omega(z,\zeta)\, \omega(2\eta)\, d\xi d\eta, \qquad z \in \mathbb{R}^2_+, \tag{6.3.21}$$

где интеграл сходится абсолютно и равномерно в каждой полуплоскости $\mathbb{R}\times(\rho,\infty)$, $\rho > 0$.

Доказательство. При $p = 1$ сходимость интеграла (6.3.21) очевидна ввиду оценок ядер Коши–Римана из Леммы 71.

При $1 < p < \infty$ применим неравенство Гельдера и Лемму 71:

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} |f(\zeta)|\, |K_\omega(z,\zeta)|\, \omega(2\eta)\, d\xi d\eta \le \|f\|_{p,\omega}\, \|K(z,\cdot)\|_{p',\omega} \le C\|f\|_{p,\omega}, \tag{6.3.22}$$

где $C = C(p,\omega,y)$ непрерывна по $y > 0$ и бесконечно малая при $y \to +\infty$, а интеграл в левой части (6.3.22) сходится равномерно в каждой полуплоскости $\mathbb{R}\times(\rho,\infty)$, $\rho > 0$.

Теперь перейдем к выводу интегрального представления (6.3.21) при $p = 1$. По Теореме 87 получаем для $\rho > 0$

$$\begin{aligned} f(z+i\rho) &= \mathfrak{I}^\omega \mathcal{D}^\omega f(z+i\rho) = 2\int_0^\infty \omega(2\eta)\mathcal{D}^\omega f(z+i2\eta+i\rho)d\eta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \omega(2\eta)\, \mathcal{D}^\omega \left\{\int_{\mathbb{R}} f(\xi+i\eta+i\rho)\, K(z,\zeta)\, d\xi\right\} d\eta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \omega(2\eta) \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi+i\eta+i\rho)\, K_\omega(z,\zeta)\, d\xi\right) d\eta, \end{aligned} \tag{6.3.23}$$

где ω-дифференцирование под знаком интеграла обосновано, поскольку функция

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi+i\eta+i\rho)\, K(z,\zeta)\, d\xi$$

принадлежит классу H^2 для фиксированного $\eta > 0$. По теореме Лебега о мажорантной сходимости, а также по Лемме 69 и оценке

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} |f(\zeta+i\rho) - f(\zeta)|\, \big|K_\omega(z,\zeta)\big|\, \omega(2\eta)\, d\xi d\eta \le C(p,\omega,y)\|f_\rho - f\|_{1,\omega} = o(1),$$

мы можем перейти к пределу при $\rho \to +0$ в (6.3.23).

Положим теперь $1 < p < \infty$, $f(z) \in H^p_\omega$. Тогда применим доказанную часть теоремы по отношению к функции

$$F_\lambda(z) = \frac{ie^{i\lambda z}}{i+\lambda z} f(z) \in H^1_\omega, \qquad \lambda > 0,$$

и затем останется перейти к пределу при $\lambda \to +0$. ■

Замечание. В специальном случае $\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}(\alpha > 0)$ представление (6.3.21) совпадает с таким из [175], [13], см. также Теорему 48 для гармонических пространств $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой в $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Для трубчатых областей в $\mathbb{C}^n$ и $1 \le p \le 2$ представление (6.3.21) доказано А. Карапетяном [16], [17] другим методом.

Как следствие Теоремы 88 получаем аналогичные интегральные формулы.

Теорема 89 *Если* $1 \le p < \infty, \omega \in W$ *и* $f \in H^p_\omega$, *то*

$$0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2_+} \overline{f(\zeta)}\, K_\omega(z,\zeta)\, \omega(2\eta)\, d\xi d\eta, \qquad z \in \mathbb{R}^2_+,$$
$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{2}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2_+} \operatorname{Re} f(\zeta) \operatorname{Re} K_\omega(z,\zeta)\, \omega(2\eta)\, d\xi d\eta, \qquad z \in \mathbb{R}^2_+.$$

Существует много обобщений интегральной формулы Винера–Пэли, см., например, [16], [17] и содержащиеся там ссылки. В следующей теореме мы установим другое интегральное представление типа Коши с использованием ядра K_ω, что даст новую характеризацию пространства Бергмана H^2_ω.

Теорема 90 *Пространство* H^2_ω $(\omega \in W)$ *совпадает с множеством всех функций* $f(z)$, *представимых в виде*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} K_{\omega_1}(z,t)\, \varphi(t)\, dt, \qquad z \in \mathbb{R}^2_+, \tag{6.3.24}$$

где $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, *и* ω_1 *— весовая функция, определяемая интегральным уравнением* (6.3.5) *и выраженная в явном виде* (6.3.7).

Оператор $\varphi \mapsto f$, *заданный формулой* (6.3.24), *доставляет изометрический изоморфизм из* $L^2(\mathbb{R})$ *на* H^2_ω.

Доказательство. Пусть $f(z) \in H^2_\omega$ — произвольная функция, $\omega \in W$, и весовая функция ω_1 определена посредством (6.3.5) и (6.3.7). По Лемме 70 весовая функция ω_1 (возможно не положительная) принадлежит классу W. Следовательно ядро K_{ω_1} удовлетворяет условиям Леммы 71, и интеграл (6.3.24) сходится для каждого $y > 0$. По Теореме 87 функции $\varphi(z) = \mathfrak{I}^{\omega_1} f(z)$ и $\varphi_\rho(z)$ принадлежат классу H^2. Дифференцирование интегральной формулы Коши для φ_ρ посредством оператора $\mathcal{D}^{\omega_1}$ ведет к

$$\mathcal{D}^{\omega_1} \mathfrak{I}^{\omega_1} f_\rho(z) = \mathcal{D}^{\omega_1} \varphi_\rho(z) = \mathcal{D}^{\omega_1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} K(z,t)\, \varphi_\rho(t)\, dt \right\}.$$

Следовательно формула обращения (6.3.12), а также рассуждения, аналогичные при выводе (6.3.23), приводят к

$$f_\rho(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}^{\omega_1} K(z,t)\, \varphi_\rho(t)\, dt, \qquad z \in \mathbb{R}^2_+.$$

Остается перейти к пределу при $\rho \to +0$, что обосновано благодаря теореме Лебега о мажорантной сходимости и

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |K_{\omega_1}(z,t)|\, |\varphi_\rho(t) - \varphi(t)|\, dt &\le \left\| K_{\omega_1}(z,t) \right\|_{L^2(dt)} \|\varphi_\rho - \varphi\|_{L^2(dt)} \\ &\le C(\omega_1, y) \|\varphi_\rho - \varphi\|_{L^2(dt)} = o(1) \quad \text{при} \quad \rho \to +0.\end{aligned}$$

Обратно, пусть функция $f(z)$ представима в виде (6.3.24) с некоторым $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Интегрируя посредством оператора $\mathfrak{I}^{\omega_1}$, получаем

$$\mathfrak{I}^{\omega_1} f(z) = \mathfrak{I}^{\omega_1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} K_{\omega_1}(z,t)\, \varphi(t)\, dt \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} K(z,t)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(z),$$

где $\varphi(z) \in H^2$. В силу Теоремы 87

$$\mathcal{D}^{\omega_1}\mathfrak{I}^{\omega_1} f(z) = \mathcal{D}^{\omega_1}\varphi(z) \in H^2_\omega.$$

С другой стороны, по Теореме Винера–Пэли имеем $f(z+i\rho) \in H^2$. Таким образом,

$$f(z) = \mathcal{D}^{\omega_1}\mathfrak{I}^{\omega_1} f(z) \in H^2_\omega$$

благодаря формуле обращения (6.3.12). ■

Замечание. Для специального веса $\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}$ $(\alpha > 0)$ и в случае верхнего полупространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$ Теорема 90 сводится к Теореме 86.

Глава 7

Гармоническое и плюригармоническое сопряжение в $h(p,q,\alpha)$ и $h(p,q,\omega)$

Результаты Разделов 7.1 и 7.3 этой главы опубликованы в [254], [269], Раздела 7.2 — в совместной со С. Стевичем статье [270], и Раздела 7.4 — в совместной с К. Гюрлебеком и В. Шпрёссигом статье [273].

7.1 Плюригармоническое сопряжение в $h(p,q,\alpha)$ на поликруге

В Разделе 5.1 были получены соотношения с дробным интегродифференцированием в пространствах $h(p,q,\alpha)$. В качестве следствия мы покажем, что плюригармоническое сопряжение сохраняет плюригармоническое подпространство $h(p,q,\alpha)$ для всех $0<p,q\le\infty, \alpha_j>0$.

Теорема 91 *Пусть $0<p,q\le\infty, \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n), \alpha_j>0, 1\le j\le n$. Если u — плюригармоническая функция из $h(p,q,\alpha)$, и v — ее плюригармоническое сопряженное, нормированное условием $v(0)=0$, то $v\in h(p,q,\alpha)$, и при этом*

$$\|v\|_{p,q,\alpha}\le C\|u\|_{p,q,\alpha}. \tag{7.1.1}$$

Кроме того, для каждого $j\in[1,n]$ следующие утверждения равносильны:

$$(1-r)^{\alpha}M_p(u;r)=o(1) \qquad \text{при} \qquad r_j\to 1-,$$
$$(1-r)^{\alpha}M_p(v;r)=o(1) \qquad \text{при} \qquad r_j\to 1- .$$

Доказательство. В силу 2-субгармоничности функции $|f|^p$ $(p>0, f\in H(U^2))$, имеем $\|f\|_{p,q,\alpha}\le C(p,q,\alpha)\|f\|^*_{p,q,\alpha}$, где обозначено

$$\|f\|^*_{p,q,\alpha}=\begin{cases}\left(\int\limits_{1/2}^{1}\int\limits_{1/2}^{1}\prod\limits_{j=1}^{2}(1-r_j)^{\alpha_j q-1}M_p^q(f;r)dr_1dr_2\right)^{1/q}, & 0<q<\infty,\\ \sup\limits_{1/2<r_1,r_2<1}\prod\limits_{j=1}^{2}(1-r_j)^{\alpha_j}M_p(f;r), & q=\infty.\end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\|f\|_{p,q,\alpha}\le C\|f\|^*_{p,q,\alpha}\le C\|u\|_{p,q,\alpha}+C\|v\|^*_{p,q,\alpha}.$$

Последнюю норму можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned}\|v\|^*_{p,q,\alpha}&\le C\|v(z_1,z_2)-v(0,z_2)\|^*_{p,q,\alpha}+C\|v(0,z_2)\|^*_{p,q,\alpha}\\&=\left\|\int_0^{r_1}\frac{\partial v(\rho_1\zeta_1,z_2)}{\partial\rho_1}d\rho_1\right\|^*_{p,q,\alpha}+\left\|\int_0^{r_2}\frac{\partial v(0,\rho_2\zeta_2)}{\partial\rho_2}d\rho_2\right\|^*_{p,q,\alpha_2}.\end{aligned}$$

Ввиду уравнений Коши–Римана и Теоремы 57 $\quad(\zeta_j=e^{i\theta_j})$

$$\begin{aligned}\|v\|^*_{p,q,\alpha}&\le C\left\|r_1\frac{\partial v(r_1\zeta_1,z_2)}{\partial r_1}\right\|^*_{p,q,(\alpha_1+1,\alpha_2)}+C\left\|r_2\frac{\partial v(0,r_2\zeta_2)}{\partial r_2}\right\|^*_{p,q,\alpha_2+1}\\&=C\left\|\frac{\partial u(r_1\zeta_1,z_2)}{\partial\theta_1}\right\|^*_{p,q,(\alpha_1+1,\alpha_2)}+C\left\|\frac{\partial u(0,r_2\zeta_2)}{\partial\theta_2}\right\|^*_{p,q,\alpha_2+1}\\&\le C\|u\|_{p,q,(\alpha_1,\alpha_2)}+C\|u(0,z_2)\|_{p,q,\alpha_2}\le C\|u\|_{p,q,\alpha}.\end{aligned}$$

Далее, согласно Теоремам 54, 56 и 57 следующие условия равносильны

$$\begin{aligned}(1-r_1)^{\alpha_1}(1-r_2)^{\alpha_2}M_p(u;r)&=o(1)\qquad\text{при}\qquad r_1\to1-,\\(1-r_1)^{\alpha_1+1}(1-r_2)^{\alpha_2}M_p\left(\frac{\partial u}{\partial\theta_1};r\right)&=o(1)\qquad\text{при}\qquad r_1\to1-,\\(1-r_1)^{\alpha_1+1}(1-r_2)^{\alpha_2}M_p\left(\frac{\partial v}{\partial r_1};r\right)&=o(1)\qquad\text{при}\qquad r_1\to1-,\\(1-r_1)^{\alpha_1}(1-r_2)^{\alpha_2}M_p(v;r)&=o(1)\qquad\text{при}\qquad r_1\to1-.\end{aligned}$$

Это завершает доказательство Теоремы 91. ■

Замечание. Неравенство (7.1.1) хорошо известно для единичного шара из $\mathbb{C}^n$, см. [118], [180], [222]. Для более общих ограниченных симметрических областей см. [179] $(1\le p\le\infty, 0<q<\infty)$ и [154] $(0<p=q<\infty)$, в то время как для пространств Бергмана (т.е. для $p=q$) с общими весами в поликруге см. [29].

7.2 Плюригармоническое сопряжение в $h(p,q,\omega)$ с общими весами на поликруге

В этом разделе мы продолжаем изучение пространств голоморфных функций

$$\mathcal{A}^{p,q}_{\vec{\omega}} = H(p,q,\omega)$$

со смешанной нормой на единичном поликруге из $\mathbb{C}^n$ для параметров $0 < p \le \infty, 0 < q < \infty$ и широкого класса весовых функций $\vec{\omega}$. Получив эквивалентные нормы в $\mathcal{A}^{p,q}_{\vec{\omega}}$ через производные функций, мы затем доказываем ограниченность плюригармонического сопряжения в пространствах со смешанной нормой.

Пусть $\omega(x), 0 \le x < 1,$ — весовая функция, положительная и интегрируемая на интервале (0,1). Будем рассматривать радиальные весовые функции, полагая $\omega(z) = \omega(|z|)$ и $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ на поликруге U^n.

Обозначим через $\mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}} = \mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n), 0 < p \le \infty, 0 < q < \infty$, пространство со смешанной нормой, состоящее из измеримых на U^n функций таких, что

$$\|f\|^q_{p,q,\vec{\omega}} = \int_{(0,1)^n} M^q_p(f,r) \prod_{j=1}^n \omega_j(r_j) dr_j < \infty,$$

и $\mathcal{A}^{p,q}_{\vec{\omega}} = \mathcal{A}^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$ определим как пересечение $\mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}}$ с $H(U^n)$. При $p = q$ мы приходим к весовым пространствам Бергмана $\mathcal{A}^{p,p}_{\vec{\omega}} = \mathcal{A}^{p}_{\vec{\omega}}$ с общими весами $\vec{\omega}$. Пространства со смешанной нормой и Бергмана, а также другие близкие функциональные пространства в последнее время изучались, например, в [47], [127], [128], [154], [179], [180], [189], [194], [207], [208], [209], [210], [222], [237], [238], [243], [244].

Общая теория пространств Бергмана содержится в монографиях [76], [80], [83], [110], [239], [241], а общую теорию пространств со смешанной нормой можно найти в классических работах [104], [106], [107], [225], [88], [89], [90], [91].

Следуя Сискакису [185], для заданной весовой функции ω на единичном круге $\mathbb{D}$ определим ее функцию искажения (distortion function)

$$\psi(r) = \psi_\omega(r) = \frac{1}{\omega(r)} \int_r^1 \omega(t) dt, \qquad 0 \le r < 1. \tag{7.2.1}$$

Положим $\psi(z) = \psi(|z|)$ для $z \in \mathbb{D}$. Класс допустимых весов согласно определению Сискакиса [185] состоит из тех весовых функций ω в $\mathbb{D}$, удовлетворяющих следующим условиям

i) Найдется положительная постоянная $C = C(\omega) > 0$ такая, что

$$\frac{1}{\omega(r)} \int_r^1 \omega(t) dt \le C(1-r), \qquad 0 \le r < 1. \tag{7.2.2}$$

ii) Весовая функция ω дифференцируема, и найдется постоянная $C = C(\omega) > 0$ такая, что

$$\omega'(r) \le C \frac{\omega(r)}{1-r}, \qquad 0 \le r < 1. \tag{7.2.3}$$

iii) Для каждого достаточно малого $\delta > 0$ найдется постоянная $C = C(\omega, \delta) > 0$ такая, что

$$\frac{\omega(r)}{\omega\big(r + \delta\psi(r)\big)} \le C(\omega, \delta), \qquad 0 \le r < 1. \tag{7.2.4}$$

Приведем небольшой список типичных допустимых весов, см. [185, с.660-663].

$$
\begin{aligned}
&1) \qquad \omega(r) = (1-r)^{\alpha}\left(\log\frac{e}{1-r}\right)^{\beta}, && \alpha > -1,\ \beta \in \mathbb{R},\\
&2) \qquad \omega(r) = \left(\log\log\frac{e}{1-r}\right)^{\alpha}, && \alpha > 0,\\
&3) \qquad \omega(r) = \exp\left[-\beta\left(\log\frac{e}{1-r}\right)^{\alpha}\right], && 0 < \alpha \le 1,\ \beta > 0.
\end{aligned}
$$

В каждом из этих трех примеров функциями искажения является функция

$$\psi(r) \sim 1 - r.$$

Приведем еше несколько примеров допустимых весов со своими функциями искажения.

$$
\begin{aligned}
&4) \quad \omega(r) = (1-r)^{\beta}\exp\left(\frac{-\gamma}{(1-r)^{\alpha}}\right), && \psi(r) \sim (1-r)^{\alpha+1}, && \alpha,\gamma > 0,\ \beta \in \mathbb{R},\\
&5) \quad \omega(r) = \exp\left[-\gamma\exp\left(\frac{\beta}{(1-r)^{\alpha}}\right)\right], && \psi(r) \sim (1-r)^{\alpha+1}\exp\left(\frac{-\beta}{(1-r)^{\alpha}}\right), && \alpha,\beta,\gamma > 0,\\
&6) \quad \omega(r) = \exp\left[-\beta\left(\log\frac{e}{1-r}\right)^{\alpha}\right], && \psi(r) \sim \frac{1-r}{\left(\log\frac{e}{1-r}\right)^{\alpha-1}}, && \alpha > 1,\ \beta > 0.
\end{aligned}
$$

Сискакис в [185] охарактеризовал ω-весовые пространства Бергмана через производные функций.

Теорема Сискакиса. *Пусть $\omega(z)$ — некоторая допустимая весовая функция на единичном круге $\mathbb{D}$, $1 \le p < \infty$. Тогда*

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\,\omega(z)dm_2(z) \approx |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p\psi^p(z)\omega(z)dm_2(z) \tag{7.2.5}$$

для всех голоморфных функций $f \in H(\mathbb{D})$.

На гармонические функции теорему распространил Стевич [190].

В случае $0 < p < 1$ одно двух из неравенств, содержащихся в (7.2.5), доказал Стевич [189], [190], а второе неравенство — Павлович и Пелаес [166]. Они же рассматривали и более общие весовые функции.

В работе [210, Теор.1] Стевич, среди прочего, доказал следующий результат для единичного поликруга U^n.

Теорема Стевича. *Пусть $f \in H(U^n)$, $\omega_j(z_j)$ — допустимые весовые функции на единичном круге $\mathbb{D}$ с функциями искажения $\psi_j(z_j)$, $j = 1,\ldots,n$. Если $0 < p,q < \infty$, $f \in \mathcal{A}^{p,q}_{\vec{\omega}}$, то для всех $j = 1,\ldots,n$, $\psi_j(z_j)\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \in \mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}}$, найдется положительная постоянная $C = C(p,q,\vec{\omega},n)$ такая, что*

$$\|f\|_{p,q,\vec{\omega}} \ge C|f(0)| + C\sum_{j=1}^{n}\left\|\psi_j\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_{p,q,\vec{\omega}}. \tag{7.2.6}$$

Для $1 \le p, q < \infty$ обратное неравенство также верно.

Замечание. Для всех $0 < p, q < \infty$ эквивалентность левых и правых частей (7.2.6) установлена в [200], [210] для стандартных весов $\omega_j(z_j) = (1 - |z_j|)^{\alpha_j}$, $\alpha_j > -1$, см. также [189], [194].

Отметим также, что для $p = q$ и весов ω с регулярным изменением эквивалентность левых и правых частей (7.2.6) установлена в работе А.В. Арутюнян [3].

В [166] авторы решили проблему, поставленную Стевичем ([189], [194]), относящуюся к обратному неравенству (7.2.6) в случае единичного круга, доказав следующий результат.

Теорема Павловича–Пелаеса. *Пусть $0 < p \le \infty, 0 < q < \infty$, и ω — дифференцируемая весовая функция на $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию*

$$\frac{\omega'(r)}{\omega^2(r)} \int_r^1 \omega(s) ds \le L < \infty, \qquad r \in (0,1), \tag{7.2.7}$$

для некоторой постоянной $L > 0$. Тогда

$$\int_0^1 M_p^q(f,r)\omega(r)dr \approx |f(0)|^q + \int_0^1 M_p^q(f',r)(\psi_\omega(r))^q \omega(r)dr \tag{7.2.8}$$

для всех $f \in H(\mathbb{D})$.

Заметим, что условие (7.2.7) слабее, чем условия (7.2.2)–(7.2.4) допустимых весов, см. [166].

Нашей задачей будет распространить указанные Теоремы Стевича и Павловича–Пелаеса на случай поликруга. Решение этой задачи дано в следующей теореме.

Теорема 92 *Пусть $f \in H(U^n), 0 < p \le \infty, 0 < q < \infty$, и весовые функции $\omega_j(z_j)$, $j = 1, \dots, n$, удовлетворяют условию (7.2.7) в функциями искажения $\psi_j(z_j)$, $j = 1, \dots, n$. Тогда $f \in \mathcal{A}^{p,q}_{\vec{\omega}}$ в том и только в том случае, если $\psi_j(z_j)\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \in \mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}}$ для всех $j = 1, \dots, n$. Более того,*

$$\|f\|_{p,q,\vec{\omega}} \approx |f(0)| + \sum_{j=1}^n \left\| \psi_j \frac{\partial f}{\partial z_j} \right\|_{p,q,\vec{\omega}}. \tag{7.2.9}$$

Теорема 92 обобщает как (7.2.6), так и (7.2.9). Это даст нам возможность доказать, что оператор плюригармонического сопряжения ограничен в пространствах со смешанной нормой $\mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$ для всех $0 < p \le \infty, 0 < q < \infty$.

Чтобы доказать основную Теорему 92, нам потребуются несколько вспомогательных результатов. Нижеследующие две леммы доказаны в [166].

Лемма 72 *Пусть $\{A_k\}_{k=0}^\infty$ — последовательность комплексных чисел, $\alpha, \gamma > 0$. Тогда величины*

$$Q_1 = \sum_{k=0}^\infty e^{-k\alpha}|A_k|^\gamma, \qquad Q_2 = |A_0|^\gamma + \sum_{k=0}^\infty e^{-k\alpha}|A_{k+1} - A_k|^\gamma$$

сравнимы, т.е. $Q_1 \approx Q_2$.

Лемма 73 *Для заданной на $[0,1)$ функции $\varphi(r)$ определим последовательность $\{r_k\}_{k=0}^{\infty} \subset [0,1)$ равенством $\varphi(r_k) = e^k,\ k \geq 0$.*
(a) Если функция φ удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 1$ и

$$\sup_{0<r<1} \frac{\varphi''(r)\varphi(r)}{\varphi'(r)^2} \leq M < \infty, \tag{7.2.10}$$

то для каждого $k \geq 0$, имеем

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi'(x)} \leq e^{2M}, \qquad r_k < x < y < r_{k+2}.$$

(b) Если функция φ удовлетворяет условию

$$\sup_{0<r<1} \frac{|\varphi''(r)|\varphi(r)}{\varphi'(r)^2} \leq M < \infty, \tag{7.2.11}$$

то для каждого $k \geq 0$, имеем

$$e^{-2M} \leq \frac{\varphi'(y)}{\varphi'(x)} \leq e^{2M}, \qquad x, y \in [r_k, r_{k+2}].$$

Лемма 74 *Пусть $f \in H(U^n), 0 < p \leq \infty, \ell = \min\{1, p\}$. Тогда для любых r_j, ρ_j, $0 < r_j < \rho_j < 1$, $j = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство*

$$M_p^\ell(f, \rho_1, \ldots, \rho_n) - M_p^\ell(f, r_1, \ldots, r_n) \leq C \sum_{j=1}^{n} (\rho_j - r_j)^\ell M_p^\ell \left(\frac{\partial f}{\partial z_j}, \rho_1, \ldots, \rho_n \right),$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от p и n.

Доказательство. Положим, что $n = 2$. Согласно лемме 3 из [210] и монотонности интегральных средних, имеем

$$\begin{aligned}
&M_p^\ell(f, \rho_1, \rho_2) - M_p^\ell(f, r_1, r_2) \\
&\qquad = \Big(M_p^\ell(f, \rho_1, \rho_2) - M_p^\ell(f, r_1, \rho_2) \Big) + \Big(M_p^\ell(f, r_1, \rho_2) - M_p^\ell(f, r_1, r_2) \Big) \\
&\qquad \leq C(\rho_1 - r_1)^\ell M_p^\ell \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \rho_1, \rho_2 \right) + C(\rho_2 - r_2)^\ell M_p^\ell \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, r_1, \rho_2 \right) \\
&\qquad \leq C(\rho_1 - r_1)^\ell M_p^\ell \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \rho_1, \rho_2 \right) + C(\rho_2 - r_2)^\ell M_p^\ell \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \rho_1, \rho_2 \right).
\end{aligned}$$

При $n > 2$ доказательство аналогично. ■

Лемма 75 *Пусть $f \in H(U^n)$ и $0 < p \leq \infty$.*
(a) Тогда для любых $0 < r_j < \rho_j < 1$, $j, k \in \{1, \ldots, n\}$

$$M_p\left(\frac{\partial f}{\partial z_k}, r_1, \ldots, r_n \right) \leq C \frac{M_p(f, \rho_1, \ldots, \rho_n)}{\rho_k - r_k},$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от p и n.
(b) Если $u = \operatorname{Re} f$ в U^n, и $1 \leq p \leq \infty$, то для любых $0 < r_j < \rho_j < 1$, $j, k \in \{1, \ldots, n\}$

$$M_p\left(\frac{\partial f}{\partial z_k}, r_1, \ldots, r_n \right) \leq C \frac{M_p(u, \rho_1, \ldots, \rho_n)}{\rho_k - r_k},$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от p и n.

Доказательство. *(a)* Можем считать, что $k = 1$. Применяя соответствующее одномерное неравенство (с фиксированным $r_2, \ldots, r_n$), которое имеет место для $0 < p \le \infty$, а затем монотонность интегральных средних по переменным $r_2, \ldots, r_n$, получаем

$$M_p\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_1, r_2, \ldots, r_n\right) \le C\frac{M_p(f, \rho_1, r_2 \ldots, r_n)}{\rho_1 - r_1} \le C\frac{M_p(f, \rho_1, \rho_2 \ldots, \rho_n)}{\rho_1 - r_1}.$$

(b) Доказательство части *(b)* аналогично доказательству *(a)*, поскольку для гармонических функций соответствующее одномерное неравенство верно для $1 \le p \le \infty$. ■

Лемма 76 *Пусть $0 < p, q < \infty$. Тогда для любых $r_j \in (0,1)$, $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, имеем*

$$M_p^q\left(\frac{\partial f}{\partial z_k}, r_1, \ldots, r_n\right) \le \frac{C(p,q)}{R^{1+q}} \int_{r_k - R}^{r_k + R} M_p^q(u, r_1, \ldots, r_{k-1}, t, r_{k+1}, \ldots, r_n) dt,$$

для всех $f \in H(U^n)$, $u = \operatorname{Re} f$, и $r_k \in (0,1)$ таких, что $0 < R < r_k < R + r_k < 1$.

Доказательство. Достаточно применить соответствующее одномерное неравенство, см. лемму 7 из [166]. ■

Обозначим через $Ph(U^n)$ множество всех (вещественнозначных) плюригармонических функций на U^n. Подпространство $\mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$, состоящее из плюригармонических функций, обозначим через

$$Ph^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n) = Ph(U^n) \cap \mathcal{L}^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n).$$

Лемма 77 *Для любой точки $a \in U^n$ точечный функционал $u \mapsto u(a)$ является ограниченным линейным функционалом на $Ph^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$ при всех $0 < p, q < \infty$.*

Доказательство. Результат следует из неравенства Харди–Литтлвуда (HL-свойства) применительно к $|u|^p$ так, как это сделано в [210, Лемма 2] или [194, Лемма 3]. ■

Доказательство Теоремы 92.

Нам потребуются еще несколько вспомогательных функций.

Пусть весовые функции $\omega_j(r_j)$ дифференцируемы на $(0,1)$ и удовлетворяют условиям

$$\frac{\omega_j'(r_j)}{\omega_j^2(r_j)} \int_{r_j}^1 \omega_j(t)\, dt \le C, \qquad 0 < r_j < 1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7.2.12}$$

Их функции искажения определяются как

$$\psi_j(r_j) = \psi_{\omega_j}(r_j) = \frac{1}{\omega_j(r_j)} \int_{r_j}^1 \omega_j(t)\, dt, \qquad 0 < r_j < 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Для заданного веса ω_j, и $0 < q < \infty$, определим на $(0,1)$ функцию φ_j

$$\varphi_j(r_j) \equiv \varphi_{q,\omega_j}(r_j) = \left(q \int_{r_j}^1 \omega_j(t)\, dt\right)^{-1/q}, \quad 0 < r_j < 1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7.2.13}$$

Заметим, что каждая из функций φ_j строго возрастающая на интервале $(0,1)$. Пусть

$$\psi_\omega(r)=\prod_{j=1}^{n}\psi_j(r_j),\qquad \varphi_\omega(r)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(r_j).$$

Легко проверить, что

$$\frac{\varphi_j(r_j)}{\varphi_j'(r_j)}=q\,\psi_j(r_j),\qquad \omega_j(r_j)=\frac{\varphi_j'(r_j)}{\varphi_j(r_j)^{1+q}},\qquad j=1,\dots,n, \tag{7.2.14}$$

и условие (7.2.12) равносильно условию (7.2.10) с $\varphi=\varphi_j$.

Определим на интервале $(0,1)$ меры

$$dm_{\varphi_j}(r_j)=\frac{\varphi_j'(r_j)}{\varphi_j(r_j)}dr_j,\qquad j=1,\dots,n,\qquad dm_\varphi(r)=\prod_{j=1}^{n}dm_{\varphi_j}(r_j).$$

Можем считать, что $n=2$. Доказательство случая $n>2$ аналогично и только технически более сложно. Цель нашего доказательства — доказать неравенство

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)^2}M_p^q(f,r_1,r_2)\omega_1(r_1)\omega_2(r_2)dr_1dr_2\le C|f(0,0)|^q\\ +C\int_{(0,1)^2}M_p^q\left(\frac{\partial f}{\partial z_1},r_1,r_2\right)\psi_1^q(r_1)\omega_1(r_1)\omega_2(r_2)dr_1dr_2\\ +C\int_{(0,1)^2}M_p^q\left(\frac{\partial f}{\partial z_2},r_1,r_2\right)\psi_2^q(r_2)\omega_1(r_1)\omega_2(r_2)dr_1dr_2.\end{aligned} \tag{7.2.15}$$

Обозначая

$$\begin{aligned}&F_0(r_1,r_2)=\frac{M_p(f,r_1,r_2)}{\varphi_1(r_1)\varphi_2(r_2)},\\ &F_1(r_1,r_2)=\frac{M_p\left(\frac{\partial f}{\partial z_1},r_1,r_2\right)}{\varphi_1'(r_1)\varphi_2(r_2)},\qquad F_2(r_1,r_2)=\frac{M_p\left(\frac{\partial f}{\partial z_2},r_1,r_2\right)}{\varphi_1(r_1)\varphi_2'(r_2)},\end{aligned} \tag{7.2.16}$$

и беря в рассчет (7.2.14) и (7.2.16), мы можем переписать (7.2.15) в виде

$$\|F_0\|^q_{L^q(dm_\varphi)}\le C|f(0,0)|^q+C\|F_1\|^q_{L^q(dm_\varphi)}+C\|F_2\|^q_{L^q(dm_\varphi)}. \tag{7.2.17}$$

Без ограничения общности, можем считать, что $\varphi_j(0)=1,\ j=1,2$.

Докажем (7.2.17) только в случае $0<p<1$. Доказательство случая $1\le p\le\infty$ вполне аналогично и будет пропущено. Полагая, что $F_1,F_2\in L^q(dm_\varphi)$, и выбирая две последовательности $\{r_k\}_{k=0}^\infty$, $\{\rho_k\}_{k=0}^\infty$ как в Лемме 73, $\varphi_1(r_k)=e^k$, $\varphi_2(\rho_k)=e^k$, мы получаем по Леммам 72 и 74

$$
\begin{aligned}
\|F_0\|^q_{L^q(dm_\varphi)} &= \int_0^1 \int_0^1 M_p^q(f,r,\rho) \frac{\varphi_1'(r)\,\varphi_2'(\rho)}{\varphi_1(r)^{1+q}\,\varphi_2(\rho)^{1+q}} dr d\rho \\
&\le C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q(f, r_{k+1}, \rho_{k+1}) \int_{r_k}^{r_{k+1}} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \frac{\varphi_1'(r)\,\varphi_2'(\rho)}{\varphi_1(r)^{1+q}\,\varphi_2(\rho)^{1+q}} dr d\rho \\
&= C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q(f, r_{k+1}, \rho_{k+1}) \left(e^{-qk} - e^{-q(k+1)}\right)^2 \frac{1}{q^2} \\
&\le C \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2qk} \left(M_p^p(f, r_k, \rho_k)\right)^{q/p} \\
&\le C(M_p^p(f,0,0))^{q/p} + C \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2qk} \left(M_p^p(f, r_{k+1}, \rho_{k+1}) - M_p^p(f, r_k, \rho_k)\right)^{q/p} \\
&\le C|f(0,0)|^q + C \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2qk} \Bigg[(r_{k+1} - r_k)^p M_p^p \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \\
&\qquad\qquad + (\rho_{k+1} - \rho_k)^p M_p^p \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \Bigg]^{q/p} \\
&\le C|f(0,0)|^q + C \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2qk} (r_{k+1} - r_k)^q M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \\
&\qquad + C \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2qk} (\rho_{k+1} - \rho_k)^q M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right),
\end{aligned}
$$

где участвующие постоянные $C = C(p, q, \varphi_1, \varphi_2) > 0$ зависят лишь от p, q и функций φ_1, φ_2. По теореме Лагранжа

$$
\begin{aligned}
r_{k+1} - r_k &= (e-1)e^k \big(\varphi_1'(x_k)\big)^{-1}, \qquad \text{где} \qquad r_k < x_k < r_{k+1}, \\
\rho_{k+1} - \rho_k &= (e-1)e^k \big(\varphi_2'(y_k)\big)^{-1}, \qquad \text{где} \qquad \rho_k < y_k < \rho_{k+1}.
\end{aligned}
$$

Следовательно

$$
\begin{aligned}
\|F_0\|^q_{L^q(dm_\varphi)} \le C|f(0,0)|^q &+ C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \big(\varphi_1'(x_k)\big)^{-q} e^{-qk} \\
&+ C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \big(\varphi_2'(y_k)\big)^{-q} e^{-qk}. \qquad (7.2.18)
\end{aligned}
$$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
\|F_1\|^q_{L^q(dm_\varphi)} &= \int_0^1 \int_0^1 M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r, \rho\right) \frac{\big(\varphi_1'(r)\big)^{1-q} \varphi_2'(\rho)}{\varphi_1(r) \big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}} dr d\rho \\
&\ge \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \left(\int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} \frac{\big(\varphi_1'(r)\big)^{1-q}}{\varphi_1(r)} dr \right) \left(\int_{\rho_{k+1}}^{\rho_{k+2}} \frac{\varphi_2'(\rho)}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}} d\rho \right).
\end{aligned}
$$

Поскольку функция $\varphi_2(\rho)$ возрастающая, и

$$\int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} \frac{\varphi_1'(r)}{\varphi_1(r)} dr = 1, \qquad \int_{\rho_{k+1}}^{\rho_{k+2}} \frac{\varphi_2'(\rho)}{\varphi_2(\rho)} d\rho = 1,$$

по теореме о среднем значении для интегралов, найдутся числа ξ_k, $r_{k+1} < \xi_k < r_{k+2}$ такие, что

$$\begin{aligned}\|F_1\|^q_{L^q(dm_\varphi)} &\geq \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \left(\varphi_1'(\xi_k)\right)^{-q} \left(\varphi_2(\rho_{k+2})\right)^{-q} \\ &\geq C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \left(\varphi_1'(\xi_k)\right)^{-q} e^{-qk}. \end{aligned} \tag{7.2.19}$$

Аналогично, найдутся числа η_k $(\rho_{k+1} < \eta_k < \rho_{k+2})$ такие, что

$$\|F_2\|^q_{L^q(dm_\varphi)} \geq C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \left(\varphi_2'(\eta_k)\right)^{-q} e^{-qk}. \tag{7.2.20}$$

Совмещая неравенства (7.2.18)–(7.2.20), и используя Лемму 73(a), получаем

$$\begin{aligned}\|F_0\|^q_{L^q(dm_\varphi)} &\leq C|f(0,0)|^q + C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \left(\varphi_1'(x_k)\right)^{-q} e^{-qk} \\ &\qquad + C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \left(\varphi_2'(y_k)\right)^{-q} e^{-qk} \\ &\leq C|f(0,0)|^q + C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \left(\varphi_1'(\xi_k)\right)^{-q} e^{-qk} \\ &\qquad + C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \left(\varphi_2'(\eta_k)\right)^{-q} e^{-qk} \\ &\leq C|f(0,0)|^q + C\|F_1\|^q_{L^q(dm_\varphi)} + C\|F_2\|^q_{L^q(dm_\varphi)}. \end{aligned} \tag{7.2.21}$$

Для того чтобы доказать обратное неравенство, вначале заметим, что

$$\begin{aligned}\|F_0\|^q_{L^q(dm_\varphi)} &= \int_0^1 \int_0^1 M_p^q(f, r, \rho) \frac{\varphi_1'(r)\, \varphi_2'(\rho)}{\varphi_1(r)^{1+q}\, \varphi_2(\rho)^{1+q}} dr d\rho \\ &\geq \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q(f, r_k, \rho_k) \int_{r_k}^{r_{k+1}} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \frac{\varphi_1'(r)\, \varphi_2'(\rho)}{\varphi_1(r)^{1+q}\, \varphi_2(\rho)^{1+q}} dr d\rho \\ &= \frac{1}{q^2} \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q(f, r_k, \rho_k) \left(e^{-qk} - e^{-q(k+1)}\right)^2 \\ &\geq C_q \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2qk} M_p^q(f, r_k, \rho_k). \end{aligned} \tag{7.2.22}$$

С другой стороны, применяя Лемму 75, получаем

$$
\begin{aligned}
\|F_1\|^q_{L^q(dm_\varphi)} &= \int_0^1\int_0^1 M_p^q\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r, \rho\right)\frac{\big(\varphi_1'(r)\big)^{1-q}\varphi_2'(\rho)}{\varphi_1(r)\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}}drd\rho \\
&\le C\sum_{k=0}^\infty M_p^q\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right)\left(\int_{r_k}^{r_{k+1}}\frac{\big(\varphi_1'(r)\big)^{1-q}}{\varphi_1(r)}dr\right)\left(\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\frac{\varphi_2'(\rho)}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}}d\rho\right) \\
&\le C\sum_{k=0}^\infty M_p^q\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right)\big(\varphi_1'(x_k)\big)^{-q}\big(\varphi_2(\rho_k)\big)^{-q} \\
&= C\sum_{k=0}^\infty M_p^q\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right)\big(\varphi_1'(x_k)\big)^{-q}e^{-kq} \\
&\le C\sum_{k=0}^\infty M_p^q\left(f, r_{k+2}, \rho_{k+2}\right)(r_{k+2}-r_{k+1})^{-q}\big(\varphi_1'(x_k)\big)^{-q}e^{-kq}
\end{aligned}
$$

для некоторых $x_k \in (r_k, r_{k+1})$. По теореме Лагранжа имеем

$$
e^{k+2}(1-e^{-1}) = \varphi_1(r_{k+2}) - \varphi_1(r_{k+1}) = \varphi_1'(z_k)(r_{k+2}-r_{k+1}),
$$

для некоторых $z_k \in (r_{k+1}, r_{k+2})$. Следовательно по Лемме 73(a) получаем

$$
\begin{aligned}
|f(0,0)|^q + \|F_1\|^q_{L^q(dm_\varphi)} &\le |f(0,0)|^q + C\sum_{k=0}^\infty M_p^q\left(f, r_{k+2}, \rho_{k+2}\right)\left(\frac{\varphi_1'(z_k)}{\varphi_1'(x_k)}\right)^q e^{-q(k+2)}e^{-qk} \\
&\le |f(0,0)|^q + C\sum_{k=0}^\infty M_p^q\left(f, r_{k+2}, \rho_{k+2}\right)e^{2Mq}e^{-2q(k+1)} \\
&\le C\sum_{k=0}^\infty M_p^q\left(f, r_k, \rho_k\right)e^{-2qk}. \qquad (7.2.23)
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом доказываем, что

$$
|f(0,0)|^q + \|F_2\|^q_{L^q(dm_\varphi)} \le C\sum_{k=0}^\infty M_p^q\left(f, r_k, \rho_k\right)e^{-2qk}. \qquad (7.2.24)
$$

Наконец из (7.2.22)–(7.2.24) окончательно доказываем Теорему 92. ∎

Перейдем к обсуждению плюригармонических пространств $Ph^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$ со смешанной нормой. Проблема гармонического сопряжения в пространствах со смешанной нормой и пространствах Бергмана классическая и восходит к Харди и Литтлвуду [105]. С проблемой плюригармонического сопряжения в единичном шаре, поликруге и в более общих ограниченных симметрических областях из $\mathbb{C}^n$ можно ознакомиться, например, в работах [154], [179], [180], [222], в которых рассматривались стандартные степенные весовые функции.

Гармоническое сопряжение в пространствах со смешанной нормой и пространствах Бергмана в единичном круге с более общими весами изучалось в работах [162], [166], [183], [194].

Теорема 93 *Пусть $1 \le p \le \infty, 0 < q < \infty$, и каждая из весовых функций $\omega_j(z_j)$, $j = 1, \dots, n$, удовлетворяет условию (7.2.12). Тогда оператор плюригармонического сопряжения сохраняет пространство $Ph^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$. Более того, если $f \in H(U^n), f = u + iv$, $u \in Ph^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$, и $v(z)$ — плюригармоническое сопряженное функции $u(z)$, нормированное так, что $v(0) = 0$, то*

$$\|f\|_{p,q,\vec{\omega}} \le C(p, q, \vec{\omega}, n)\|u\|_{p,q,\vec{\omega}}. \tag{7.2.25}$$

Доказательство. Обозначив

$$F_0(r_1, r_2) = \frac{M_p(f, r_1, r_2)}{\varphi_1(r_1)\varphi_2(r_2)} \quad \text{и} \quad F_3(r_1, r_2) = \frac{M_p(u, r_1, r_2)}{\varphi_1(r_1)\varphi_2(r_2)}, \tag{7.2.26}$$

легко заметить, что (7.2.25) равносильно неравенству

$$\|F_0\|_{L^q(dm_\varphi)} \le C(p, q, \vec{\omega}, n)\|F_3\|_{L^q(dm_\varphi)}. \tag{7.2.27}$$

Поскольку $1 \le p \le \infty$, то метод доказательства Теоремы 92 работает и в данном случае. Действительно, аналогично (7.2.22), мы получаем

$$\|F_3\|^q_{L^q(dm_\varphi)} \ge C_q \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2qk} M_p^q(u, r_k, \rho_k). \tag{7.2.28}$$

С другой стороны, применяя Лемму 75(b), приходим к

$$\begin{aligned}\|F_1\|^q_{L^q(dm_\varphi)} &\le C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho_{k+1}\right) \big(\varphi_1'(x_k)\big)^{-q} \big(\varphi_2(\rho_k)\big)^{-q} \\ &\le C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q\left(u, r_{k+2}, \rho_{k+2}\right) (r_{k+2} - r_{k+1})^{-q} \big(\varphi_1'(x_k)\big)^{-q} e^{-kq}\end{aligned}$$

для некоторых $x_k \in (r_k, r_{k+1})$. По теореме Лагранжа и Лемме 73(a) получаем

$$|f(0,0)|^q + \|F_1\|^q_{L^q(dm_\varphi)} \le C \sum_{k=0}^{\infty} M_p^q\left(u, r_k, \rho_k\right) e^{-2qk}. \tag{7.2.29}$$

Аналогичным образом неравенство (7.2.29) можно установить для функции F_2 вместо F_1. Таким образом,

$$\|F_0\|_{L^q(dm_\varphi)} \le C|f(0,0)| + C\|F_1\|_{L^q(dm_\varphi)} + C\|F_2\|_{L^q(dm_\varphi)} \le C\|F_3\|_{L^q(dm_\varphi)},$$

что и требовалось доказать. ∎

Естественно появляется вопрос: остается ли верной Теорема 93 при $0 < p < 1$. В этом случае мы в состоянии доказать чуть более слабый результат.

Теорема 94 *Пусть $0 < p \le \infty, 0 < q < \infty$, и весовые функции $\omega_j(z_j)$, $j = 1, \dots, n$, вместе с их соответствующими функциями $\varphi_j = \varphi_{\omega_j}$, определенными по формулам (7.2.13), удовлетворяют условиям (7.2.11). Тогда оператор плюригармонического сопряжения сохраняет пространство $Ph^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$. Более того, если $f \in H(U^n), f = u + iv$, $u \in Ph^{p,q}_{\vec{\omega}}(U^n)$, и $v(z)$ — плюригармоническое сопряженное функции $u(z)$, нормированное так, что $v(0) = 0$, то*

$$\|f\|_{p,q,\vec{\omega}} \le C(p, q, \vec{\omega}, n)\|u\|_{p,q,\vec{\omega}}. \tag{7.2.30}$$

Доказательство. Мы должны вновь доказать неравенство (7.2.27). Теперь наше доказательство основано на Леммах 73(b), 76 и 77. Заметим, что ввиду (7.2.21) достаточно доказать неравенство

$$|f(0,0)| + \|F_1\|_{L^q(dm_\varphi)} + \|F_2\|_{L^q(dm_\varphi)} \le C\|F_3\|_{L^q(dm_\varphi)}.$$

В силу монотонности интегральных средних и теоремы о среднем значении для интегралов заключаем, что

$$\begin{aligned}
\|F_1\|^q_{L^q(dm_\varphi)} &= \int_0^1 \left[\int_0^1 M_p^q\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r, \rho\right) \frac{\big(\varphi_1'(r)\big)^{1-q}}{\varphi_1(r)} dr\right] \frac{\varphi_2'(\rho)}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}} d\rho \\
&\le C\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} M_p^q\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho\right) \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\big(\varphi_1'(r)\big)^{1-q}}{\varphi_1(r)} dr\right] \frac{\varphi_2'(\rho)}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}} d\rho \\
&= C\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} M_p^q\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, r_{k+1}, \rho\right) \big(\varphi_1'(x_k)\big)^{-q}\right] \frac{\varphi_2'(\rho)}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}} d\rho \\
&\le C\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} M_p^q\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{r_{k+1}+r_{k+2}}{2}, \rho\right) \big(\varphi_1'(x_k)\big)^{-q}\right] \frac{\varphi_2'(\rho)}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}} d\rho
\end{aligned}$$

для некоторых $x_k \in (r_k, r_{k+1})$. Применение Леммы 76 с

$$R = \frac{1}{2}(r_{k+2} - r_{k+1}) \qquad \text{и} \qquad r_1 \mapsto \frac{1}{2}(r_{k+1} + r_{k+2}), \quad k \ge 0,$$

приводит к

$$\|F_1\|^q_{L^q(dm_\varphi)} \le C\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big(\varphi_1'(x_k)\big)^{-q}}{(r_{k+2} - r_{k+1})^{1+q}} \int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} M_p^q(u, t, \rho) dt\right] \frac{\varphi_2'(\rho)}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}} d\rho.$$

Далее, применяем теорему Лагранжа и Лемму 73(b) и получаем

$$\begin{aligned}
\|F_1\|^q_{L^q(dm_\varphi)} &\le C\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big(\varphi_1'(x_k)\big)^{-q}\big(\varphi_1'(y_k)\big)^{q}}{(r_{k+2} - r_{k+1})\, e^{q(k+2)}} \int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} M_p^q(u, t, \rho) dt\right] \frac{\varphi_2'(\rho)}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}} d\rho \\
&\le C\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-q(k+2)}}{r_{k+2} - r_{k+1}} \int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} M_p^q(u, t, \rho) dt\right] \frac{\varphi_2'(\rho)}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}} d\rho \\
&\le C\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (r_{k+2} - r_{k+1})^{-1} \int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} M_p^q(u, t, \rho)\big(\varphi_1(t)\big)^{-q} dt\right] \frac{\varphi_2'(\rho)}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}} d\rho \\
&\le C\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_1'(y_k)}{\varphi_1(r_{k+2}) - \varphi_1(r_{k+1})} \int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} M_p^q(u, t, \rho)\big(\varphi_1(t)\big)^{-q} dt\right] \frac{\varphi_2'(\rho)\, d\rho}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}},
\end{aligned}$$

где $r_{k+1} < y_k < r_{k+2}$, $\varphi_1(r_k) = e^k$. Поскольку функция $\varphi_1(t)$ возрастающая, то по Лемме 73(b) получаем

$$\begin{aligned}
\|F_1\|^q_{L^q(dm_\varphi)} &\le C\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1'(y_k)\int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} M_p^q(u,t,\rho)\big(\varphi_1(t)\big)^{-1-q}dt\right]\frac{\varphi_2'(\rho)\,d\rho}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}}\\
&\le C\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} M_p^q(u,t,\rho)\frac{\varphi_1'(t)}{\big(\varphi_1(t)\big)^{1+q}}dt\right]\frac{\varphi_2'(\rho)}{\big(\varphi_2(\rho)\big)^{1+q}}d\rho\\
&\le C\|F_3\|^q_{L^q(dm_\varphi)}.
\end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что

$$\|F_2\|_{L^q(dm_\varphi)} \le C\|F_3\|_{L^q(dm_\varphi)}.$$

Наконец, по Лемме 77

$$|f(0,0)| = |u(0,0)| \le C\|F_3\|_{L^q(dm_\varphi)}.$$

Это завершает доказательство Теоремы 94. ∎

Заметим, что хотя условие (7.2.11) строже, чем (7.2.10), класс весовых функций $\omega(r)$, удовлетворяющих условию (7.2.11) все еще довольно широкий. Например,

$$\omega(r) = \left(\log\frac{1}{1-r}\right)^\gamma (1-r)^\beta \exp\left(\frac{-c}{(1-r)^\alpha}\right), \quad \alpha>0, c>0, \beta\in\mathbb{R}, \gamma\in\mathbb{R},$$

является типичной весовой функции, удовлетворяющей условию (7.2.11), см. [166].

Плюригармоническое сопряжение дает возможность распространить Теорему 92 на плюригармонические функции. Определим операторы частного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \qquad z_j = x_j + iy_j.$$

Теорема 95 *Пусть $u\in Ph(U^n)$, и выполнено одно из следующих условий:*

(a) $1\le p\le\infty, 0<q<\infty$, *и весовые функции $\omega_j(z_j)$, $j=1,\dots,n$, удовлетворяют условиям (7.2.12) и имеют функции искажения $\psi_j(z_j)$, $j=1,\dots,n$.*

(b) $0<p\le\infty, 0<q<\infty$, *и весовые функции $\omega_j(z_j)$, $j=1,\dots,n$, вместе с их соответствующими функциями $\varphi_j=\varphi_{\omega_j}$, определенными по формулам (7.2.13), удовлетворяют условиям (7.2.11). Тогда*

$$\|u\|_{p,q,\vec{\omega}} \approx |u(0)| + \sum_{j=1}^n \left\|\psi_j\frac{\partial u}{\partial z_j}\right\|_{p,q,\vec{\omega}} \approx |u(0)| + \sum_{j=1}^n \left\|\psi_j\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j}\right\|_{p,q,\vec{\omega}}. \tag{7.2.31}$$

Доказательство. Поскольку $u(z)$ — вещественнозначная функция, то вторая эквивалентность в (7.2.31) очевидна. Теперь пусть $f \in H(U^n), f = u + iv$, и $v(z)$ — плюригармоническое сопряженное функции $u(z)$, нормированное так, что $v(0) = 0$. Тогда по Теоремам 92–94 и уравнениям Коши–Римана

$$|u(0)| + \sum_{j=1}^{n} \left\| \psi_j \frac{\partial u}{\partial z_j} \right\|_{p,q,\vec{\omega}} = |f(0)| + C \sum_{j=1}^{n} \left\| \psi_j \frac{\partial f}{\partial z_j} \right\|_{p,q,\vec{\omega}} \approx \|f\|_{p,q,\vec{\omega}} \approx \|u\|_{p,q,\vec{\omega}},$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание. Нетрудно видеть, что Теорема Павловича–Пелаеса и (7.2.8) имеют место в случае голоморфных функций в единичном шаре $B \subset \mathbb{C}^n$ с заменой f' на ∇f в (7.2.8). Заметим также, что в силу максимальной теоремы неравенство в Лемме 74 получит вид

$$M_p^\ell(f, \rho) - M_p^\ell(f, r) \le C(\rho - r)^\ell M_p^\ell(\nabla f, \rho), \qquad 0 < r < \rho < 1, \quad f \in H(B),$$

где $\ell = \min\{1, p\}$, $p \in (0, \infty]$.

7.3 Системы Рисса и гармоническое сопряжение в $h(p, q, \alpha)$ и в классах Блоха на верхнем полупространстве

Для функции $u(x, y)$, гармонической в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и удовлетворяющей условию

$$u(x, y) = O(y^{-\delta}), \qquad y \to +\infty, \ \delta > 0, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

преобразования Рисса функции $u(x, y)$ определяются как

$$u_j(x, y) = (R_j u)(x, y) = -\int_y^{+\infty} \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial x_j} d\eta, \qquad 1 \le j \le n, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.3.1}$$

Вектор-функция $F = (u_0, u_1, \dots, u_n)$, $u = u_0$, является системой сопряженных гармонических функций, т.е. функции u_j удовлетворяют обобщенным уравнениям Коши–Римана

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \qquad 0 \le j, k \le n. \tag{7.3.2}$$

Операторы дробного интегродифференцирования на пространствах $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой в верхнем полупространстве были подробно узучены в Разделе 5.3. Это даст нам возможность доказать ограниченность преобразований Рисса в $h(p, q, \alpha)$, или, что то же самое, для системы Рисса гармонически сопряженных функций, определенных уравнениями (7.3.2).

Теорема 96 *Пусть* $0 < p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$, $\quad u \equiv u_0 \in h(p, q, \alpha)$. *Пусть также* $F = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ — *система гармонических сопряженных функций в смысле* (7.3.2). *Тогда*
(i) $\quad \|F\|_{p,q,\alpha} \leq C\|u\|_{p,q,\alpha}$.
(ii) *Условие*

$$y^\alpha M_p(u; y) = o(1) \qquad \textit{при} \qquad y \to +0 \quad (y \to +\infty)$$

равносильно условию

$$y^\alpha M_p(F; y) = o(1) \qquad \textit{при} \qquad y \to +0 \quad (\textit{соотв.} \quad y \to +\infty).$$

Доказательство. (i) Соотношения Теоремы 74 с дифференцированием и интегрированием в пространствах $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой быстро приводят к нужному результату. Действительно, при каждом $j \in [1, n]$ имеем

$$\|u_j\|_{p,q,\alpha} \leq \left\| \frac{\partial u_j}{\partial y} \right\|_{p,q,\alpha+1} = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p,q,\alpha+1} \leq C\|u\|_{p,q,\alpha},$$

где было использовано равенство $\frac{\partial u_j}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ из обобщенных уравнений Коши–Римана (7.3.2).

(ii) Вновь по той же Теореме 74 при каждом $j \in [1, n]$ имеем

$$y^\alpha M_p(u; y) = o(1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^{\alpha+1} M_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}; y\right) = o(1) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad y^{\alpha+1} M_p\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}; y\right) = o(1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^\alpha M_p(u_j; y) = o(1),$$

где предполагается, что $y \to +0$ либо $y \to +\infty$. $\blacksquare$

Замечание. Ограниченность преобразований Рисса, доказанная в Теореме 96, автоматически влечет справедливость интегральных представлений (3.3.4) Теоремы 48 для гармонически сопряженных функций u_j.

Перейдем к рассмотрению аналогичных вопросов в классах Блоха на верхнем полупространстве. Характеризация пространств $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой и гармоническое сопряжение легко переносятся на классы Блоха. Это соответствует случаю $p = q = \infty$ в Теоремах 74 и 96.

Скажем, что функция $u(x, y)$, гармоническая в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, принадлежит гармоническому пространству Блоха $\mathcal{B}$, если

$$\|u\|_{\mathcal{B}} = \sup y|\nabla u(x, y)| < +\infty, \tag{7.3.3}$$

где верхняя грань берется по всем точкам $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$.

Гармоническую функцию Блоха $u(x, y)$ назовем малой функцией Блоха, если она удовлетворяет условию

$$y|\nabla u(x, y)| = o(1), \qquad \text{при} \qquad (x, y) \to \partial^\infty \mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{7.3.4}$$

где $\partial^\infty \mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ (см. [236]). Гармоническое малое пространство Блоха обозначим через $\mathcal{B}_0$.

Через $\widetilde{\mathcal{B}}$ (соотв. $\widetilde{\mathcal{B}}_0$) обозначим подпространство $\mathcal{B}$ (соотв. $\mathcal{B}_0$), состоящее из тех функций, которые исчезают в точке $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Градиент в (7.3.3) можно заменить на дробную производную $\mathcal{D}^1$, а блоховскую норму $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ можно заменить эквивалентной нормой

$$\sup_{(x,y)} y^m |\mathcal{D}^m u(x,y)| < +\infty, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, m \geq 1 \tag{7.3.5}$$

для всех $u \in \widetilde{\mathcal{B}}$, см. [169]. Более того, как легко следует из случая $p = q = \infty$ Теорем 96 и 74, условие (7.3.5) справедливо также для дробных производных $\mathcal{D}^\beta (\beta > 0)$.

Теорема 97 *Пусть $u \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Тогда:*
(i) *Для каждого $\beta > 0$ имеет место эквивалентность*

$$\|u\|_{\mathcal{B}} \approx \|\mathcal{D}^\beta u\|_{\infty,\infty,\beta}.$$

(ii) *Для каждого $j \in [1, n]$ справедливо неравенство*

$$\|u_j\|_{\mathcal{B}} \leq C(n) \|u\|_{\mathcal{B}}.$$

Теорема 98 (i) *Пусть $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_0$. Тогда для каждого $\beta > 0$ условие*

$$y|\nabla u(x,y)| = o(1)$$

равносильно условию

$$y^\beta |\mathcal{D}^\beta u(x,y)| = o(1) \qquad \text{при} \qquad (x,y) \to \partial^\infty \mathbb{R}^{n+1}_+$$

.
(ii) *Если $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_0$, то $\quad u_j \in \widetilde{\mathcal{B}}_0$ для всех $j \in [1, n]$.*

7.4 Гармоническое сопряжение в пространствах Бергмана кватернионнозначных функций

В этом разделе будем изучать проблему гармонического сопряжения в весовых пространствах Бергмана кватернионнозначных функций на единичном шаре из $\mathbb{R}^4$. Для скалярнозначной гармонической функции из пространства Бергмана мы находим гармонически сопряженное из того же пространства Бергмана.

Харди и Литтлвуд [105, Теор.5] были первыми, кто изучал проблему гармонического сопряжения в пространствах Бергмана на единичном круге комплексной плоскости. Среди многочисленных обобщений отметим важную систему гармонически сопряженных функций в $\mathbb{R}^n$, введенную Стейном и Вейсом (см. [23]), которая сыграла решающую роль в характеризации пространств Харди на верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Проблема гармонического сопряжения в рамках анализа Клиффорда уже изучалась несколькими авторами. В 1979 году для гармонической в $\mathbb{R}^4$ функции Садбери [224, Теор.4] нашел сопряженные гармонические функции такие, что определяют кватернионнозначную моногенную функцию. Подобную формулу для произвольных размерностей можно найти в монографии [57]. В некоторых работах авторы решали проблему построения гармонически сопряженного ядра Пуассона, см. [55], [73], [233]. Другой путь относится к гармонически сопряженным в сингулярных интегральных уравнениях как это сделано, например, в [59] [178]. Более общие вопросы единственности (при некоторых условиях), существования и построения гармонически сопряженных для специальных функций (например многочленов) рассматривались в [56], [58] и [60]. Этот список работ не претендует на полноту и не исчерпывает всю тему гармонического сопряжения, но он показывает, что эта тема достаточно изучалась в рамках анализа Клиффорда. Во всех указанных работах один вопрос оставался неизученным: если заданная гармоническая функция принадлежит определенному функциональному пространству, куда попадают сопряженные гармонические функции и построенная этим моногенная функция?

Нашей целью будет изучение гармонического сопряжения в весовых пространствах Бергмана в рамках кватернионного анализа. В основном мы будем использовать формулу Садбери [224] для построения гармонически сопряженных и изучать их свойства. Будем использовать также некоторые известные результаты классического гармонического анализа в $\mathbb{R}^n$, хотя применять их будем только для $n = 4$.

Пусть $n \geq 2$ — целое число, $B = B_n$ — открытый единичный шар n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, и $S = \partial B$ — его граница, единичная сфера. Помимо общего пространства $\mathbb{R}^n$, будем работать в $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, несимметрическом поле вещественных кватернионов. Каждый элемент из $\mathbb{H}$ можно записать в виде

$$x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \qquad (x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$$

где система $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ образует базис в $\mathbb{H}$, и $\mathbf{Sc}\, x = x_0$, $\mathbf{Vec}\, x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$. Соответствующие правила умножения задаются формулами

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \qquad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

Сопряженный к $x \in \mathbb{H}$ элемент определяется как

$$\bar{x} = x_0 - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k},$$

и поэтому

$$x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Пусть $\mathbb{Z}_+$ обозначает множество всех неотрицательных целых чисел. Для мультииндекса $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}_+^4$ пусть $\partial^\lambda = \partial_x^\lambda$ обозначает оператор частного дифференцирования порядка $|\lambda| = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ относительно x_0, x_1, x_2, x_3.

Через D обозначим оператор Коши–Римана–Фютера

$$D = \frac{\partial}{\partial x_0} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_3} = \partial_0 + \mathbf{i}\partial_1 + \mathbf{j}\partial_2 + \mathbf{k}\partial_3,$$

и через $\overline{D}$ — его сопряженный оператор

$$\overline{D} = \frac{\partial}{\partial x_0} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_3} = \partial_0 - \mathbf{i}\partial_1 - \mathbf{j}\partial_2 - \mathbf{k}\partial_3.$$

Скажем, что вещественно дифференцируемая функция $f = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, моногенна (слева), если $Df = 0$. Общую теорию кватернионного анализа и анализа Клиффорда можно найти в монографиях [57], [101], [102].

Обозначим через $\mathcal{M}(B_4, \mathbb{H})$, $h(B_4, \mathbb{H})$, $h(B_n, \mathbb{R})$, $h(B_n, \mathbb{C})$, соответственно, множества моногенных, кватернионнозначных гармонических, вещественнозначных гармонических и комплекснозначных гармонических функций, заданных в единичном шаре.

Для вещественнозначной или векторнозначной функции $f(x) = f(r\zeta)$ в шаре B_n $(0 \le r < 1, \zeta \in S)$ ее интегральные средние (p-го порядка) определяются как

$$M_p(f; r) = \|f(r\cdot)\|_{L^p(S,d\sigma)}, \qquad 0 \le r < 1, \quad 0 < p \le \infty,$$

где $d\sigma$ — нормированная поверхностная мера Лебега на сфере S. Бергмановская норма измеримой функции на B_n (или кватернионнозначной функции на B_4) определяется через

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{B_n} (1 - |x|)^\alpha |f(x)|^p dV_n(x)\right)^{1/p}, \qquad 0 < p < \infty,\ \alpha > -1,$$

где dV_n — мера Лебега на B_n, нормированная так, чтобы $V_n(B_n) = 1$. В полярных координатах имеем $dV_n(x) = nr^{n-1}drd\sigma(\zeta)$ ([42, c.6]). Соответствующие весовые пространства Бергмана $\mathcal{M}^p_\alpha$ моногенных в B_4 функций и пространства h^p_α и $\mathbf{h}^p_\alpha$ (скалярнозначных или кватернионнозначных) гармонических функций определяются через

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^p_\alpha &= \Big\{ f \in \mathcal{M}(B_4, \mathbb{H}) : \|f\|_{p,\alpha} < +\infty \Big\}, \\ h^p_\alpha &= \Big\{ u \in h(B_n, \mathbb{R}) \text{ or } u \in h(B_n, \mathbb{C}) : \|u\|_{p,\alpha} < +\infty \Big\}, \\ \mathbf{h}^p_\alpha &= \Big\{ u \in h(B_4, \mathbb{H}) : \|u\|_{p,\alpha} < +\infty \Big\}. \end{aligned}$$

Основы теории гармонических пространств Бергмана можно найти в работах [42], [121], [153]. Пространства Бергмана и другие близкие пространства клиффордозначных и кватернионнозначных функций в B_n рассмотрены в [50].

Хорошо известно, что ядро Коши

$$e(x) = \frac{1}{\sigma_3} \frac{\bar{x}}{|x|^4}$$

является моногенной функцией в $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, где σ_3 — площадь поверхности единичной сферы S_3 в $\mathbb{R}^4$. Мы будем рассматривать следующую модификацию ядра Коши

$$E(x, y) = e(\rho x - \xi), \tag{7.4.1}$$

где $x = r\zeta,\ y = \rho\xi \in B_4,\ \zeta, \xi \in S,\ 0 \le r < 1,\ 0 \le \rho \le 1.$

Для функции f, моногенной в ограниченной области Ω и непрерывной в замыкании Ω, имеет место интегральная формула Коши

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} e(x - \xi) n(\xi) f(\xi)\, ds(\xi), \qquad x \in \Omega, \tag{7.4.2}$$

где $n(\xi)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке ξ, и ds — поверхностная мера Лебега на $\partial\Omega$. Заметим, то две поверхностные меры $d\sigma$ и ds связаны равенством $d\sigma = ds/\sigma_3$.

Лемма 78 *Для любого мультииндекса $\lambda \in \mathbb{Z}_+^4$, и $\frac{3}{3+|\lambda|} < p \leq \infty$, имеют место оценки*

$$|\partial^\lambda e(x)| \leq C_\lambda \frac{1}{|x|^{3+|\lambda|}}, \qquad x \in B_4, \tag{7.4.3}$$

$$M_p(\partial_x^\lambda E; r) \leq C(\lambda, p) \frac{1}{(1-r)^{3+|\lambda|-3/p}}, \qquad 0 \leq r < 1. \tag{7.4.4}$$

Эти оценки ядра Коши известны. Оценка (7.4.3) элементарна, а оценка (7.4.4) следует из (7.4.1), (7.4.3) и Леммы 47.

Известно много теорем о дифференцировании в пространствах Бергмана и более общих весовых пространствах, см., например, [3], [78], [79], [161], [172], [173], [180], [195], [196], [200], [201], [237], [241], а также Разделы 5.1 и 5.2 настоящей работы. Поэтому следующая теорема в идейном плане известна. В контексте анализа Клиффорда подобный результат содержится в [173].

Теорема 99 *Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$, m — натуральное число, и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^4$. Тогда для всех кватернионнозначных моногенных (или гармонических) функций f справедливы следующие соотношения:*

$$\|f\|_{p,\alpha} \approx \sum_{|\lambda|<m} \left|\partial^\lambda f(0)\right| + \sum_{|\lambda|=m} \left\|\partial^\lambda f\right\|_{p,\alpha+pm}, \tag{7.4.5}$$

$$\|f\|_{p,\alpha} \approx |f(0)| + \left\|\nabla f\right\|_{p,\alpha+p}, \tag{7.4.6}$$

где ∇ обозначает градиент. Участвующие постоянные зависят только от p, α, m.

Доказательство. Для моногенной функции $f(x) = f(r\zeta) \in \mathcal{M}_\alpha^p$ применим интегральную формулу Коши (7.4.2) по отношению к растянутой функции $f_\delta(x) = f(\delta x)$:

$$f(\delta x) = \int_S E(x,\xi)\, n(\xi)\, f(\delta\xi)\, ds(\xi), \qquad x = r\zeta \in B_4,\ 0 < \delta < 1,$$

где $E(x,\xi) = e(x-\xi)$ — ядро (7.4.1). Для кватернионнозначных гармонических функций мы используем формулу Пуассона вместо формулы Коши. Далее возьмем оператор частного дифференцирования ∂_x^λ и получим

$$\partial_x^\lambda f(\delta x) = \int_S \partial_x^\lambda E(x,\xi)\, n(\xi)\, f(\delta\xi)\, ds(\xi),$$

и затем оценим по Лемме 78

$$\left|\partial^\lambda f(\delta x)\right| \leq C_\lambda \int_S \frac{|f(\delta\xi)|}{|x-\xi|^{3+|\lambda|}} d\sigma(\xi). \tag{7.4.7}$$

Заменим x в (7.4.7) на Tx, где T — произвольное ортогональное линейное преобразование $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, т.е. $|Tx| = |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}^4$. Вспомним, что мера σ инвариантна при вращениях, что значит $\sigma\big(T(G)\big) = \sigma(G)$ для каждого борелевского множества $G \subset S$ и каждого ортогонального преобразования T. Произведя замену $\xi \mapsto T\xi$ в (7.4.7), находим

$$\left|\partial^\lambda f(\delta T x)\right| \le C_\lambda \int_S \frac{|f(\delta T\xi)|}{|x-\xi|^{3+|\lambda|}} d\sigma(\xi).$$

В силу неравенства Минковского и Леммы 47

$$M_p\bigl(\partial^\lambda f; \delta r\bigr) \le C_\lambda M_p(f;\delta) \int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|x-\xi|^{3+|\lambda|}} \le C_\lambda \frac{M_p(f;\delta)}{(1-r)^{|\lambda|}},$$

где было также использовано тождество

$$M_p(F;|z|) = \left(\int |F(Tz)|^p dT\right)^{1/p}, \qquad z \in B_4,$$

в котором интеграл берется по ортогональной группе. Подставляя $\delta = r$

$$(1-r)^{\alpha+p|\lambda|} M_p^p\bigl(\partial^\lambda f; r^2\bigr) \le C(1-r)^\alpha M_p^p(f;r), \qquad 0<r<1,$$

и затем интегрируя по интервалу $(0,1)$, приходим к

$$\left\|\partial^\lambda f\right\|_{p,\alpha+p|\lambda|} \le C\|f\|_{p,\alpha}$$

для каждого мультииндекса $\lambda \in \mathbb{Z}_+^4$. С другой стороны, ввиду субгармоничности функции $\left|\partial^\lambda f(x)\right|^p$, имеем

$$\left|\partial^\lambda f(x)\right|^p \le \frac{C}{(1-|x|)^{4+p|\lambda|}} \int_{|y-x|<(1-|x|)/2} |f(y)|^p dV_4(y),$$

см., например, [42, Гл.8]. Затем беря $x=0$ в неравенстве

$$\left|\partial^\lambda f(x)\right|^p \le \frac{C}{(1-|x|)^{4+p|\lambda|+\alpha}} \int_{|y-x|<(1-|x|)/2} |f(y)|^p (1-|y|)^\alpha dV_4(y),$$

мы получаем

$$\left|\partial^\lambda f(0)\right|^p \le C \int_{B_4} |f(y)|^p (1-|y|)^\alpha dV_4(y).$$

Таким образом,

$$\sum_{|\lambda|<m} \left|\partial^\lambda f(0)\right|^p + \sum_{|\lambda|=m} \left\|\partial^\lambda f\right\|_{p,\alpha+pm}^p \le C\|f\|_{p,\alpha}^p.$$

Обратно, имеем

$$f(x) = f(0) + \int_0^r \frac{\partial f(t\zeta)}{\partial t} dt = f(0) + \int_0^r \nabla f(t\zeta)\cdot\zeta\, dt,$$

где точка означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$. Следовательно по неравенству Минковского

$$M_p(f;r) \le |f(0)| + \int_0^r M_p(\nabla f; t)\, dt.$$

Далее, применение Леммы 48(i) приводит к

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha M_p^p(f;r)dr \le C|f(0)|^p + C\int_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int_0^r M_p(\nabla f;t)\,dt\right)^p dr$$
$$\le C|f(0)|^p + C\int_0^1 (1-r)^{p+\alpha} M_p^p(\nabla f;r)\,dr.$$

Поскольку

$$M_p^p(\nabla f;r) \le C\sum_{j=0}^3 M_p^p\left(\frac{\partial f}{\partial x_j};r\right),$$

то

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha M_p^p(f;r)dr \le C|f(0)|^p + C\sum_{j=0}^3 \int_0^1 (1-r)^{p+\alpha} M_p^p\left(\frac{\partial f}{\partial x_j};r\right) dr.$$

Таким образом,

$$\|f\|_{p,\alpha} \le C|f(0)| + C\sum_{j=0}^3 \left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_{p,\alpha+p}. \tag{7.4.8}$$

Поэтому требуемое неравенство получено для $m=1$. Затем мы можем применить (7.4.8) по отношению к $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j=0,1,2,3)$ и получить

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_{p,\alpha+p} \le C\left|\frac{\partial f(0)}{\partial x_j}\right| + C\sum_{k=0}^3 \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right\|_{p,\alpha+2p}, \qquad j=0,1,2,3.$$

Подставляя это в (7.4.8), приходим к

$$\|f\|_{p,\alpha} \le C\sum_{|\lambda|<2} \left|\partial^\lambda f(0)\right| + C\sum_{|\lambda|=2} \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right\|_{p,\alpha+2p}.$$

Индукция завершает доказательство.

Соотношение (7.4.6) легко следует из (7.4.5) с $m=1$. ■

Перейдем к вопросу о восстановлении моногенной функции по ее известной скалярной части.

Теорема 100 *Пусть $u(x)=u_0(x): B_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ — вещественнозначная гармоническая функция в единичном шаре B_4. Если $u \in h_\alpha^p$ для некоторых $\alpha > -1$ и $1 \le p < \infty$, то существует моногенная функция $f(x): B_4 \longrightarrow \mathbb{H}$ такая, что $f \in \mathcal{M}_\alpha^p$ и $\mathbf{Sc}\, f = u$ в B_4, при этом*

$$\|f\|_{p,\alpha} \le C(p,\alpha)\|u\|_{p,\alpha}.$$

Доказательство. Явная формула Садбери (см. [102, с.42], [224, с.212]) утверждает, что функция

$$f(x) = u(x) + \mathbf{Vec} \int_0^1 t^2\, \overline{D}u(tx)\, x\, dt \tag{7.4.9}$$

моногенна в B_4, причем $\mathbf{Sc}\, f = u$ в B_4. Следовательно

$$\begin{aligned}|f(x)| &\le |u(x)| + |x| \int_0^1 t^2 \left|\overline{D}u(tx)\right| dt\\ &\le |u(x)| + r \int_0^1 t^2 \left(\sum_{j=0}^{3} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(tx) \right| \right) dt, \qquad x = r\zeta.\end{aligned}$$

По неравенствам Минковского и треугольника

$$\begin{aligned}M_p(f;r) &\le M_p(u;r) + C \sum_{j=0}^{3} r \int_0^1 M_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}; tr\right) dt\\ &\le M_p(u;r) + C \sum_{j=0}^{3} \int_0^r M_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}; \rho\right) d\rho.\end{aligned}$$

Далее в силу Леммы 48(i) и Теоремы 99

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,\alpha}^p &\le C \int_0^1 (1-r)^\alpha M_p^p(f;r) dr\\ &\le C\|u\|_{p,\alpha}^p + C \sum_{j=0}^{3} \int_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int_0^r M_p\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}; \rho\right) d\rho \right)^p dr\\ &\le C\|u\|_{p,\alpha}^p + C \sum_{j=0}^{3} \int_0^1 (1-r)^{\alpha+p} M_p^p\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}; r\right) dr\\ &\le C\|u\|_{p,\alpha}^p + C \sum_{j=0}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p,\alpha+p}^p \le C\|u\|_{p,\alpha}^p.\end{aligned}$$

Это завершает доказательство Теоремы 100. ■

Вопрос восстановления моногенной функции по ее известной скалярной части в случае малых $0 < p < 1$ требует привлечения более сильных средств таких, как максимальные теоремы, полученные в Главе 4.

Теорема 101 *Пусть $u(x) = u_0(x) : B_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ — вещественнозначная гармоническая функция в единичном шаре B_4. Если $u \in h_\alpha^p$ для некоторых $\alpha > -1$ и $0 < p < 1$, то существует моногенная функция $f(x) : B_4 \longrightarrow \mathbb{H}$ такая, что $f \in \mathcal{M}_\alpha^p$ и $\mathbf{Sc}\, f = u$ в B_4, при этом*

$$\|f\|_{p,\alpha} \le C(p,\alpha)\|u\|_{p,\alpha}.$$

Доказательство. Вновь используем формулу Садбери [224]

$$f(x) = u(x) + \mathbf{Vec} \int_0^1 t^2\, \overline{D}u(tx)\, x\, dt.$$

Поскольку $|\overline{D}u| = |\nabla u|$, то

$$\begin{aligned}|f(x)| &\le |u(x)| + |x| \int_0^1 t^2 \left|\overline{D}u(tx)\right| dt\\ &\le |u(x)| + r \int_0^1 \left|\nabla u(tx)\right| dt \le |u(x)| + 2r \int_0^1 g(tx)\, dt,\end{aligned}$$

где $g(x) = \sup_{0<t<1} \left|(\nabla u)(tx)\right|$ — радиальная максимальная функция (4.1.5). Ввиду монотонности функции $g(r\zeta)$ по r мы можем применить Лемму 48(ii) и получить

$$\begin{aligned}
|f(x)|^p &\leq |u(x)|^p + C_p r^p \int_0^1 (1-t)^{p-1} g^p(tx)\, dt \\
&= |u(x)|^p + C_p \int_0^r (r-t)^{p-1} g^p(t\zeta)\, dt,
\end{aligned}$$

и значит

$$M_p^p(f;r) \leq M_p^p(u;r) + C_p \int_0^r (r-t)^{p-1} M_p^p(g;t)\, dt.$$

Следовательно интегрируя и применяя теорему Фубини и Лемму 49, в итоге приходим к

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,a}^p &\leq \|u\|_{p,a}^p + C_p \int_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int_0^r (r-t)^{p-1} M_p^p(g;t)\, dt \right) r^3 dr \\
&= \|u\|_{p,a}^p + C_p \int_0^1 M_p^p(g;t) \left(\int_t^1 (r-t)^{p-1} (1-r)^\alpha r^3 dr \right) dt \\
&\leq \|u\|_{p,a}^p + C(p,\alpha) \int_0^1 M_p^p(g;t)(1-t)^{\alpha+p}\, dt \\
&\leq \|u\|_{p,a}^p + C(p,\alpha) \|g\|_{p,a+p}^p.
\end{aligned}$$

Благодаря максимальной Теореме 50, окончательно имеем

$$\|g\|_{p,a+p} \leq C \|u\|_{p,a},$$

что завершает доказательство Теоремы 101. ■

В следующей теореме рассмотрим ту же задачу восстановления моногенной функции, если задана комплекснозначная гармоническая функция.

Будем отождествлять пространство вещественных кватернионов $\mathbb{H}$ с комплексным пространством $\mathbb{C}^2$ через отображение, связывающее пару $(z,w) = (x_0 + x_1\mathbf{i}, x_2 + x_3\mathbf{i})$ с кватернионом $x = z + w\mathbf{j}$, где $z = x_0 + x_1\mathbf{i}$, $w = x_2 + x_3\mathbf{i}$. Заметим, что $z\mathbf{j} = \mathbf{j}\bar{z}$ для каждого $z \in \mathbb{C}$. Кватернионнозначную функцию f можно записать через ее комплексные компоненты:

$$f(x) = f(z,w) = (u_0 + u_1\mathbf{i}) + (u_2 + u_3\mathbf{i})\mathbf{j} = U(x) + V(x)\mathbf{j},$$

где $U(x) = u_0(x) + u_1(x)\mathbf{i}$, $V(x) = u_2(x) + u_3(x)\mathbf{i}$ — комплекснозначные функции двух комплексных переменных z и w. На этих комплекснозначных функциях будем рассматривать дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1} \right), & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \\
\frac{\partial}{\partial w} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_3} \right), & \frac{\partial}{\partial \bar{w}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_3} \right).
\end{aligned}$$

Тогда оператор Коши–Римана–Фютера можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
Df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} - \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \\
&= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_0} + \mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x_0} + \mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)\mathbf{j}\right] + \mathbf{j}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_2} - \mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} - \mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)\mathbf{j}\right] \\
&= 2\left(\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{w}}\right) + 2\left(\frac{\partial V}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{w}}\right)\mathbf{j}.
\end{aligned}
$$

Поэтому уравнения Коши–Римана могут быть записаны в комплексной форме

$$
\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{w}},
$$

или, эквивалентно,

$$
\frac{\partial V}{\partial w} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{w}}. \tag{7.4.10}
$$

Теорема 102 *Пусть $U : B_4 \longrightarrow \mathbb{C}$ — гармоническая функция в единичном шаре B_4, и $U \in h^p_\alpha$ для некоторых $\alpha > -1$ и $0 < p < \infty$. Тогда существует гармоническая функция $V : B_4 \longrightarrow \mathbb{C}$ такая, что функция $f = U + V\mathbf{j}$ принадлежит моногенному пространству Бергмана $\mathcal{M}^p_\alpha$, причем*

$$
\|f\|_{p,\alpha} \leq C(p,\alpha)\|U\|_{p,\alpha}.
$$

Доказательство. Для заданной комплекснозначной гармонической функции $U(z,w)$ условие совместимости

$$
\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial w \partial \bar{w}}
$$

для системы (7.4.10) удовлетворено. Следовательно (см., например, [21, Гл.16]) существует решение V, гармоническое в шаре B_4,

$$
\frac{1}{4}\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 V}{\partial w \partial \bar{w}} = -\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z \partial \bar{w}} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z \partial \bar{w}} = 0.
$$

Поэтому функция

$$
f(x) = U(x) + V(x)\mathbf{j} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}
$$

моногенна в B_4. Очевидно, что поскольку $U = u_0 + u_1\mathbf{i}$ принадлежит h^p_α, то это же верно для функций u_0 и u_1, причем $\|U\|_{p,\alpha} \approx \|u_0\|_{p,\alpha} + \|u_1\|_{p,\alpha}$. Таким образом, по Теоремам 100 и 101 получаем

$$
\|f\|_{p,\alpha} \leq C\|u_0\|_{p,\alpha} \leq C\|U\|_{p,\alpha}.
$$

Это завершает доказательство Теоремы 102. ■

Литература

[1] А.Б. Александров, *Теория функций в шаре*, Современные проблемы математики, ВИНИТИ, том **8** (1985), 115–190.

[2] А.Б. Александров, О граничном убывании в среднем гармонических функций, *Алгебра и Анализ* **7** (1995), No. 4, 1–49.

[3] А.В. Арутюнян, Характеризация анизотропных пространств функций, голоморфных в полидиске, *Известия НАН Армении, Математика* **30** (1995), No. 2, 35–46.

[4] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.

[5] М. Гварадзе, Множители одного класса аналитических функций, определенных на полидиске, *Труды Тбил. Мат. Инст.* **66** (1980), 15–21.

[6] К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций*, ИЛ, М., 1963.

[7] В. Гулиев, П. Лизоркин, Классы голоморфных и гармонических функций в полидиске в связи с их граничными значениями, *Труды Мат. Инст. РАН им. Стеклова* **204** (1993), 137–159.

[8] А.Э. Джрбашян, Классы A^p_α гармонических функций в полупространствах и аналог теоремы М. Рисса, *Изв. Акад. Наук Арм. ССР, Математика* **22** (1987), No. 4, 386–398.

[9] А.Э. Джрбашян, А.О. Карапетян, Интегральные неравенства между сопряженными плюригармоническими функциями в многомерных областях, *Изв. Акад. Наук Арм. ССР, Математика* **23** (1988), No. 3, 216–236.

[10] М.М. Джрбашян, О каноническом представлении функций, мероморфных в единичном круге, *Доклады Акад. Наук Арм. ССР* **3** (1945), 3–9.

[11] М.М. Джрбашян, О проблеме представления аналитических функций, *Сообщ. Инст. Матем. Мех. Акад. Наук Арм. ССР* **2** (1948), 3–40.

[12] М.М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966.

[13] М.М. Джрбашян, А.Э. Джрбашян, Интегральное представление некоторых классов функций в полуплоскости, *Доклады Акад. Наук СССР* **285** (1985), 547–550.

[14] А. Забулёнис, О дифференциальном операторе в пространствах аналитических функций, *Литовский мат. сб. (Lithuanian Math. J.)* **24** (1984), No. 1, 53–59.

[15] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, тома I–II, Мир, М., 1965.

[16] А.О. Карапетян, Интегральные представления в трубчатых областях, *Изв. Акад. Наук Арм. ССР, Математика* **23** (1988), No. 1, 91–96.

[17] А.О. Карапетян, Интегральные представления весовых пространств функций, голоморфных в трубчатых областях, *Изв. Акад. Наук Арм. ССР, Математика* **25** (1990), No. 4, 315–332.

[18] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p*, Мир, М., 1984.

[19] С.Н. Мергелян, Об одном интеграле, связанном с аналитическими функциями, *Изв. Акад. Наук СССР, Серия матем.* **15** (1951), 395–400.

[20] У. Рудин, *Теория функций в поликруге*, Мир, М., 1974.

[21] У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$, Мир, М., 1984.

[22] С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Минск, Наука и техника, 1987.

[23] И.М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[24] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

[25] У. Хейман, *Многолистные функции*, ИЛ, М. 1960.

[26] Р.Ф. Шамоян, Мультипликаторы степенных рядов, операторы Теплица и вложения пространств, *Изв. Нац. Акад. Наук Армении, Математика* **34** (1999), No. 4, 56–73.

[27] Р.Ф. Шамоян, О голоморфных пространствах Лизоркина–Трибеля в полидиске, *Изв. Нац. Акад. Наук Армении, Математика* **37** (2002), No. 3, 57–78.

[28] Ф.А. Шамоян, Приложения интегрального представления Джрбашяна к некоторым задачам анализа, *Доклады Акад. Наук СССР* **261** (1981), No. 3, 557–561.

[29] Ф.А. Шамоян, Диагональное отображение и проблема представления в анизотропных пространствах функций, голоморфных в полидиске, *Сибирск. Мат. ж.* **31** (1990), No. 2, 197–215.

[30] Ф.А. Шамоян, Некоторые замечания о параметрическом представлении классов Неванлинны–Джрбашяна, *Мат. Заметки* **52** (1992), No. 1, 128–140.

[31] Ф.А. Шамоян, Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций, *Сибирск. Мат. ж.* **40** (1999), No. 6, 1422–1440.

[32] Н.А. Широков, Обобщение теоремы Литтлвуда–Пэли, *Записки научн. сем. ЛОМИ* **30** (1972), 179–180.

[33] Н.А. Широков, Некоторые обобщения теоремы Литтлвуда–Пэли, *Записки научн. сем. ЛОМИ* **39** (1974), 162–175.

[34] P. Ahern, M. Jevtić, Duality and multipliers for mixed norm spaces, *Michigan Math. J.* **30** (1983), 53–64.

[35] A. Aleman, J.A. Cima, An integral operator on H^p and Hardy's inequality, *J. Anal. Math.* **85** (2001), 157–176.

[36] A. Aleman, A. Siskakis, Integration operators on Bergman spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **46** (1997), 337–356.

[37] J.M. Anderson, J. Clunie, Ch. Pommerenke, On Bloch functions and normal functions, *J. Reine Angew. Math.* **270** (1974), 12–37.

[38] J.A. Arregui, O. Blasco, Bergman and Bloch spaces of vector valued functions, *Math. Nachr.* **261/62** (2003), 3–22.

[39] R. Aulaskari, J. Xiao, R. Zhao, On subspaces and subsets of BMOA and UBC, *Analysis* **15** (1995), 101–121.

[40] R. Aulaskari, G. Csordas, Besov spaces and the $Q_{q,0}$ classes, *Acta Sci. Math.* **60** (1995), 31–48.

[41] R. Aulaskari, R. Zhao, Boundednes and compactness properties of the Libera transform, *Complex analysis and differential equations (Uppsala, 1997),* 69-80, Acta Univ. Upsaliensis Skr. Uppsala Univ. C Organ. Hist., 64 , Uppsala Univ., Uppsala, 1999.

[42] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 2001.

[43] F. Beatrous, Boundary continuity of holomorphic functions in the ball, *Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (1986), 23–29.

[44] F. Beatrous, J. Burbea, Characterizations of spaces of holomorphic functions in the unit ball, *Kodai Math. J.* **8** (1985), 36–51.

[45] F. Beatrous, J. Burbea, Holomorphic Sobolev spaces on the ball, *Diss. Math.* **276** (1989), 1–57.

[46] A. Benedek, R. Panzone, The spaces L^P with mixed norm, *Duke Math. J.* **28** (1961), 301–324.

[47] G. Benke, D.C. Chang, A note on weighted Bergman spaces and the Cesàro operator, *Nagoya Math. J.* **159** (2000), 25–43.

[48] S. Bergman, Über unendliche Hermitische Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, *Math. Z.* **29** (1929), 641–677.

[49] S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Math. Surveys, No. 5, New York, 1950.

[50] S. Bernstein, K. Gürlebeck, L.F. Reséndis, L.M. Tovar, Dirichlet and Hardy spaces of harmonic and monogenic functions, *ZAA* **24** (2005), 763–789.

[51] O. Blasco, Introduction to Vector-valued Bergman spaces, *Function spaces and Operator theory. Joensuu 2003, Univ. Joensuu Math. Rev. Ser.* 8 (2005), 9–30.

[52] O. Blasco, M. Pavlović, Complex convexity and Littlewood–Paley vector-valued inequalities, *Bull. London Math. Soc.* **35** (2003), 749–758.

[53] O. Blasco, S. Perez-Esteva, L^p continuity of projectors of weighted harmonic Bergman spaces, *Collect. Math.* **51** (2000), 49–58.

[54] S. Bochner, Classes of holomorphic functions of several variables in circular domains, *Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.)* **46** (1960), 721–723.

[55] F. Brackx, N. Van Acker, A conjugate Poisson kernel in Euclidean space - MAPLE procedures for explicit calculation, *Simon Stevin* **67**(1-2) (1993), 3–14.

[56] F. Brackx, R. Delanghe, On harmonic potential fields and the structure of monogenic functions, *ZAA* **22** (2003), 261–273.

[57] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen, *Clifford analysis.Research Notes in Mathematics*, 76. Boston - London - Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[58] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen, On conjugate harmonic functions in Euclidean space, *Math. Methods Appl. Sci.* **25** (2002), 1553–1562.

[59] F. Brackx, B. De Knock, H. De Schepper, D. Eelbode, On the interplay between the Hilbert transform and conjugate harmonic functions, *Math. Methods Appl. Sci.* **29** (12) (2006), 1435–1450.

[60] F. Brackx, H. De Schepper, Conjugate harmonic functions in Euclidean space: a spherical approach. *Comput. Methods Funct. Theory* **6** (1) (2006) 165–182.

[61] H.-Q. Bui, Harmonic functions, Riesz potentials, and the Lipschitz spaces of Herz, *Hiroshima Math. J.* **9** (1979), 245–295.

[62] J. Burbea, Boundary behavior of holomorphic functions in the ball, *Pacific J. Math.* **127** (1987), 1–17.

[63] D.C. Chang, B.Q. Li, Sobolev and Lipschitz estimates for weighted Bergman projections, *Nagoya Math. J.* **147** (1997), 147–178.

[64] D.C. Chang, S. Li, S. Stević, On some integral operators on the unit polydisk and the unit ball, *Taiwanese J. Math.* **11** (2007), 1251–1286.

[65] D.C. Chang, S. Stević, The generalized Cesáro operator on the unit polydisc, *Taiwanese J. Math.* **7** (2003), 293–308.

[66] D.C. Chang, S. Stević, Estimates of an integral operator on function spaces, *Taiwanese J. Math.* **7** (2003), 423–432.

[67] D.C. Chang, S. Stević, Addendum to the paper "A note on weighted Bergman spaces and the Cesàro operator", *Nagoya Math. J.* **180** (2005), 77–90.

[68] B. R. Choe, Projections, the weighted Bergman spaces, and the Bloch space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), 127–136.

[69] D. Clahane, S. Stević, Norm equivalence and composition operators between Bloch/Lipschitz spaces of the unit ball, *J. Inequal. Appl.* **2006** (2006), Article ID 61018, 11 pages.

[70] J.G. Clunie, T.H. MacGregor, Radial growth of the derivative of univalent functions, *Comment. Math. Helvetici* **59** (1984), 362–375.

[71] R. Coifman, Y. Meyer, E.M. Stein, Some new functional spaces and their applications to harmonic analysis, *J. Funct. Anal.* **62** (1985), 304–335.

[72] R. Coifman, R. Rochberg, Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p, *Asterisque* **77** (1980), 11–66.

[73] D. Constales, A conjugate harmonic to the Poisson kernel in the unit ball of $\mathbb{R}^n$, *Simon Stevin* **62**(3-4) (1988), 289–291.

[74] N. Danikas, S. Ruscheweyh, A. Siskakis, Metrical and topological properties of a generalized Libera transform, *Arch. Math.* **63** (1994), 517–524.

[75] W.J. Davis, D.J.H. Garling, N. Tomczak–Jaegermann, The complex convexity of quasi-normed spaces, *J. Funct. Anal.* **55** (1984), 110–150.

[76] A.E. Djrbashian, F.A. Shamoyan, *Topics in the Theory of A^p_α Spaces*, Teubner–Texte zur Math., b. 105, Teubner, Leipzig, 1988.

[77] A. E. Djrbashian, Integral representations for Riesz systems in the unit ball and some applications, *Proc. Amer. Math. Soc.* **117** (1993), 395–403.

[78] O. Djordjević, M. Pavlović, Equivalent norms on Dirichlet spaces of polyharmonic functions on the ball in $\mathbb{R}^N$, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **13** (2007),307–319.

[79] O. Djordjević, M. Pavlović, On a Littlewood-Paley type inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), 3607–3611.

[80] P. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York, London, 1970.

[81] P.L. Duren, B.W. Romberg, A.L. Shields, Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$, *J. Reine Angew. Math.* **238** (1969), 32–60.

[82] P. Duren, A. Shields, Properties of H^p $(0 < p < 1)$ and its containing Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **141** (1969), 255–262.

[83] P. Duren, A. Schuster, *Bergman spaces*, AMS, Providence, Rhode Island, 2004.

[84] P.J. Eenigenburg, The integral means of analytic functions, *Quart. J. Math. (Oxford)* **32** (1981), 313–322.

[85] C. Fefferman, E.M. Stein, H^p spaces of several variables, *Acta Math.* **129** (1972), 137–193.

[86] T. Figiel, On the moduli of convexity and smoothness, *Studia Math.* **56** (1976), 121–155.

[87] T. Figiel, G. Pisier, Séries aléatories dans les espaces uniformément convexes ou uniformément lisses, *C. R. Acad. Sc. Paris* **279** (1974), 611–614.

[88] T.M. Flett, Mean values of power series, *Pacific J. Math.* **25** (1968), 463–494.

[89] T.M. Flett, Inequalities for the pth mean values of harmonic and subharmonic functions with $p \le 1$, *Proc. London Math. Soc.* (3) **20** (1970), 249–275.

[90] T.M. Flett, On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions, *Proc. London Math. Soc.* (3) **20** (1970), 749–768.

[91] T.M. Flett, The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* **38** (1972), 746–765.

[92] T.M. Flett, Lipschitz spaces of functions on the circle and the disc, *J. Math. Anal. Appl.* **39** (1972), 125–158.

[93] F. Forelli, W. Rudin, Projections on spaces of holomorphic functions in balls, *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1974), 593–602.

[94] A.P. Frazier, The dual space of H^p of the polydisc for $0 < p < 1$, *Duke Math. J.* **39** (1972), 369–379.

[95] D. Girela, M. Pavlović, J.A. Peláez, Spaces of analytic functions of Hardy–Bloch type, *J. d'Analyse Math.* **100** (2006), 53–81.

[96] D. Girela, J.A. Peláez, Integral means of analytic functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **29** (2004), 459–469.

[97] D. Girela, J.A. Peláez, Growth properties and sequences of zeros of analytic functions in spaces of Dirichlet type, *J. Austral. Math. Soc.* **80** (2006), 397–418.

[98] D. Girela, J.A. Peláez, Carleson measures for spaces of Dirichlet type, *Integral Equations Oper. Theory* **55** (2006), 415–427.

[99] D. Gu, Bergman projections and duality in weighted mixed-norm spaces of analytic functions, *Michigan Math. J.* **39** (1992), 71–84.

[100] R. Gundy, E.M. Stein, H^p theory for the poly-disc, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **76** (1979), No. 3, 1026–1029.

[101] K. Gürlebeck, K. Habetha, W. Sprössig, *Holomorphic Functions in the Plane and n-dimensional Space*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[102] K. Gürlebeck, W. Sprössig, *Quaternionic and Clifford calculus for Engineers and Physicists*, John Wiley & Sons, Chichester, 1997.

[103] O. Hanner, On the uniform convexity of L^p and l^p, *Ark. Mat.* **3** (1956), 239–244.

[104] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, Some properties of fractional integrals (I), *Math. Z.* **27** (1928), 565–606.

[105] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, Some properties of conjugate functions, *J. Reine Angew. Math.* **167** (1931), 405–423.

[106] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, Some properties of fractional integrals (II), *Math. Z.* **34** (1932), 403–439.

[107] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions, *Quart. J. Math. (Oxford)* **12** (1941), 221–256.

[108] A.V. Harutyunyan, Description of some weighted spaces of holomorphic functions in terms of fractional derivatives, *Complex Var. Elliptic Equ.* **51** (2006), 1103–1112.

[109] A.V. Harutyunyan, W. Lusky, On the boundedness of the differentiation operator between weighted spaces holomorphic functions, *Studia Math.* **184** (2008), 233–247.

[110] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heidelberg, 2000.

[111] F. Holland, J.B. Twomey, On Hardy classes and the area function, *J. London Math. Soc.* (2) **17** (1978) 275–283.

[112] T. Holmstedt, Interpolation of quasi-normed spaces, *Math. Scand.* **26** (1970), 177–199.

[113] Z.J. Hu, Extended Cesàro operators on mixed norm spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 2171–2179.

[114] Z.J. Hu, Extended Cesàro operators on the Bloch space in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.* **23** (2003), 561–566.

[115] Z.J. Hu, Extended Cesàro operators on Bergman spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **296** (2004), 435–454.

[116] G. Jawerth, A. Torchinsky, On a Hardy and Littlewood imbedding theorem, *Michigan Math. J.* **31** (1984), 131–137.

[117] M. Jevtić, Bounded projections and duality in mixed norm spaces of analytic functions, *Complex Variables Theory Appl.* **8** (1987), 293–301.

[118] M. Jevtić, Projection theorems, fractional derivatives and inclusion theorems for mixed norm spaces on the ball, *Analysis* **9** (1989), 83–105.

[119] M. Jevtić, X. Massaneda, P.J. Thomas, Interpolating sequences for weighted Bergman spaces of the ball, *Michigan Math. J.* **43** (1996), 495–517.

[120] M. Jevtić, M. Pavlović, Littlewood-Paley type inequalities for $\mathcal{M}$-harmonic functions, *Publ. Inst. Math. (Belgrade)* **64(78)** (1998), 36–52.

[121] M. Jevtić, M. Pavlović, Harmonic Bergman functions on the unit ball in $\mathbb{R}^n$, *Acta Math. Hungar.* **85** (1999), 81–96.

[122] H.O. Kim, On a theorem of Hardy and Littlewood on the polydisc, *Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (1986), 403–409.

[123] E.G. Kwon, A characterization of Bloch space and Besov space, *J. Math. Anal. Appl.* **324** (2006), 1429–1437.

[124] E.G. Kwon, Quantities equivalent to the norm of a weighted Bergman space, *J. Math. Anal. Appl.* **338** (2008), 758–770.

[125] O.S. Kwon, N.E. Cho, A class of nonlinear integral operators preserving double subordinations, *Abstr. Appl. Anal.* **2008**(2008), Article ID 792160, 10 pages.

[126] S. Li, Riemann-Stieltjes operators from $F(p,q,s)$ to Bloch space on the unit ball, *J. Inequal. Appl.* **2006** (2006), Article ID 27874, 14 pages.

[127] S. Li, Derivative free characterization of Bloch spaces, *J. Comput. Anal. Appl.* **10** (2008), 253–258.

[128] S. Li, S. Stević, Integral type operators from mixed-norm spaces to α-Bloch spaces, *Integral Transform. Spec. Funct.* **18** (2007), 485–493.

[129] S. Li, S. Stević, Riemann-Stieltjes type integral operators on the unit ball in $\mathbb{C}^n$, *Complex Variables Elliptic Equations* **52** (2007), 495–517.

[130] S. Li, S. Stević, Riemann-Stieltjes operators on Hardy spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **14** (2007), 621–628.

[131] S. Li, S. Stević, Compactness of Riemann-Stieltjes operators between $F(p,q,s)$ and α-Bloch spaces, *Publ. Math. Debrecen* **72** (2008), 111–128.

[132] S. Li, S. Stević, Generalized composition operators on Zygmund spaces and Bloch type spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **338** (2008), 1282–1295.

[133] S. Li, S. Stević, Products of Volterra type operator and composition operator from H^∞ and Bloch spaces to the Zygmund space, *J. Math. Anal. Appl.* **345** (2008), 40–52.

[134] S. Li, S. Stević, Riemann-Stieltjes operators between mixed norm spaces, *Indian J. Math.* **50** (2008), 177–188.

[135] S. Li, S. Stević, Riemann-Stieltjes operators between different weighted Bergman spaces, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin,* **15** (2008), 677–686.

[136] S. Li, S. Stević, Products of composition and integral type operators from H^∞ to the Bloch space, *Complex Variables Elliptic Equations* **53** (2008), 463–474.

[137] S. Li, S. Stević, Products of integral-type operators and composition operators between Bloch-type spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **349** (2009), 596–610.

[138] S. Li, S. Stević, Cesàro type operators on some spaces of analytic functions on the unit ball, *Appl. Math. Comput.* **208** (2009), 378–388.

[139] S. Li, S. Stević, Weighted-Hardy functions with Hadamard gaps on the unit ball *Appl. Math. Comput.* **212** (2009), 229–233.

[140] S. Li, H. Wulan, Characterizations of α-Bloch spaces on the unit ball, *J. Math. Anal. Appl.* **343** (1) (2008), 58–63.

[141] R.J. Libera, Some classes of regular univalent functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 755–758.

[142] E. Ligocka, The Hölder continuity of the Bergman projection and proper holomorphic mappings, *Studia Math.* **80** (1984), 89–107.

[143] J. Lindenstrauss, On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces, *Michigan Math. J.* **10** (1963), 241–252.

[144] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[145] J.E. Littlewood, *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, London, 1944.

[146] J.E. Littlewood, *Some Problems in Real and Complex Analysis*, Massachusetts, Raytheon Education Company, 1968.

[147] J.E. Littlewood, R.E.A.C. Paley, Theorems on Fourier series and power series I, *J. London Math. Soc.* **6** (1931), 230–233.

[148] J.E. Littlewood, R.E.A.C. Paley, Theorems on Fourier series and power series II, *Proc. London Math. Soc. (Ser. 2)* **42** (1936), 52–89.

[149] D.H. Luecking, A new proof of an inequality of Littlewood and Paley, *Proc. Amer. Math. Soc.* **103** (1988), 887–893.

[150] N.G. Makarov, On the distortion of boundary sets under conformal mappings, *Proc. London Math. Soc.* (3) **51** (1985), 369–384.

[151] M. Mateljević, M. Pavlović, L^p-behavior of power series with positive coefficients and Hardy spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 309–316.

[152] J. Miao, A property of analytic functions with Hadamard gaps, *Bull. Austral. Math. Soc.* **45** (1992), 105–112.

[153] J. Miao, Reproducing kernels for harmonic Bergman spaces of the unit ball, *Monatsh. Math.* **125** (1998), 25–35.

[154] J. Mitchell, Lipschitz spaces of holomorphic and pluriharmonic functions on bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^N (N > 1)$, *Annales Polonici Math.* **39** (1981), 131–141.

[155] M. Nowak, Bloch space on the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **23** (1998), 461–473.

[156] J.M. Ortega, J. Fàbrega, Holomorphic Triebel–Lizorkin spaces, *J. Funct. Anal.* **151** (1997), 177–212.

[157] J.M. Ortega, J. Fàbrega, Hardy's inequality and embeddings in holomorphic Triebel–Lizorkin spaces, *Illinois J. Math.* **43** (1999), 733–751.

[158] C. Ouyang, W. Yang, R. Zhao, Characterizations of Bergman spaces and Bloch space in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 4301–4313.

[159] M. Pavlović, Integral means of the Poisson integral of a discrete measure, *J. Math. Anal. Appl.* **184** (1994), 229–242.

[160] M. Pavlović, A proof of the Hardy–Littlewood theorem on fractional integration and a generalization, *Publ. Inst. Math. (Belgrade)* **59 (73)** (1996), 31–38.

[161] M. Pavlović, Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions, *J. Math. Anal. Appl.* **216** (1997), 499–509.

[162] M. Pavlović, On harmonic conjugates with exponential mean growth, *Czechoslovak Math. J.* **49** (1999), 733–742.

[163] M. Pavlović, A Littlewood-Paley theorem for subharmonic functions, *Publ. Inst. Math. (Belgrade)* **68(82)**(2000), 77–82.

[164] M. Pavlović, *Introduction to Function Spaces on the Disk*, Mat. Inst. SANU, Belgrade, 2004.

[165] M. Pavlović, A short proof of an inequality of Littlewood and Paley, *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), 3625–3627.

[166] M. Pavlović, J.A. Peláez, An equivalence for weighted integrals of an analytic function and its derivative, *Math. Nachr.* **281** (2008), 1612—1623.

[167] M. Pavlović, K. Zhu, New characterizations of Bergman spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **33** (2008), 87—99.

[168] R.S. Phillips, On weakly compact subsets of a Banach space, *Amer. J. Math.* **65** (1943), 108–136.

[169] W.C. Ramey, H. Yi, Harmonic Bergman functions on half–spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 633–660.

[170] G. Ren, Harmonic Bergman spaces with small exponents in the unit ball, *Collect. Math.* **53** (2002), 83–98.

[171] G. Ren, U. Kähler, Weighted harmonic Bloch spaces and Gleason's problem, *Complex Variables Theory Appl.* **48** (2003), 235–245.

[172] G.B. Ren, U. Kähler, Radial derivative on bounded symmetric domains,*Studia Math.* **157** (2003), 57–70.

[173] G. Ren, U. Kähler, Hardy–Littlewood inequalities and Q_p-spaces, *ZAA* **24** (2005), 375–388.

[174] G.B. Ren, J.H. Shi, Bergman type operator on mixed norm spaces with applications, *Chin. Ann. of Math.*, Ser. B, **18** (1997), 265–276.

[175] F. Ricci, M. Taibleson, Boundary values of harmonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure, *Annali Scuola Nor. Sup. – Pisa, Ser. IV* **10** (1983), 1–54.

[176] W. Rudin, The radial variation of analytic functions, *Duke Math. J.* **22** (1955), 235–242.

[177] W. Rudin, *Real and complex analysis,* McGraw Hill, New York, 1966.

[178] M. Shapiro, On the conjugate harmonic functions of M. Riesz-E. Stein-G. Weiss. Dimiev, Stancho (ed.) et al., Topics in complex analysis, differential geometry and mathematical physics. Third international workshop on complex structures and vector fields, St. Konstantin, Bulgaria, August 23–29, 1996. Singapore: World Scientific. 8-32 (1997).

[179] J.H. Shi, On the rate of growth of the means M_p of holomorphic and pluriharmonic functions on bounded symmetric domains of $\mathbb{C}^n$, *J. Math. Anal. Appl.* **126** (1987), 161–175.

[180] J.H. Shi, Inequalities for the integral means of holomorphic functions and their derivatives in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **328** (1991), 619–637.

[181] A.L. Shields, D.L. Williams, Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **162** (1971), 287–302.

[182] A.L. Shields, D.L. Williams, Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions, *J. Reine Angew. Math.* **299-300** (1978), 256–279.

[183] A.L. Shields, D.L. Williams, Bounded projections and the growth of harmonic conjugates in the unit disc, *Michigan Math. J.* **29** (1982), 3–25.

[184] A. Siskakis, Semigroups of composition operators in Bergman spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.* **35** (1987), 397–406.

[185] A. Siskakis, Weighted integrals of analytic functions, *Acta Sci. Math.* **66** (2000), 651–664.

[186] K.T. Smith, A generalization of an inequality of Hardy and Littlewood, *Canad. J. Math.* **8** (1956), 157–170.

[187] E.M. Stein, Singular integrals and estimates for the Cauchy–Riemann equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **79** (1973), 440–445.

[188] K. Stempak, Cesàro averaging operators, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **124A** (1994), 121–126.

[189] S. Stević, A note on weighted integrals of analytic functions, *Bull. Greek Math. Soc.* **46** (2002), 3–9.

[190] S. Stević, Weighted integrals of harmonic functions, *Studia Sci. Math. Hungarica* **39** (2002), 87–96.

[191] S. Stević, On an area inequality and weighted integrals of analytic functions, *Result. Math.* **41** (2002), 386–393.

[192] S. Stević, Weighted integrals of holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$, *Complex Variables Theory Appl.* **47** (2002), 821–838.

[193] S. Stević, On harmonic Hardy and Bergman spaces, *J. Math. Soc. Japan* **54**, No. 4 (2002), 983–996.

[194] S. Stević, Weighted integrals and conjugate functions in the unit disk, *Acta Sci. Math.* **69** (2003), 109–119.

[195] S. Stević, A note on polyharmonic functions, *J. Math. Anal. Appl.* **278** (2003), 243–249.

[196] S. Stević, A Littlewood-Paley type inequality, *Bol. Soc. Brasil Math.* **34** (2003), 211–217.

[197] S. Stević, Cesàro averaging operators, *Math. Nachr.* **248-249** (2003), 185–189.

[198] S. Stević, The generalized Libera transform on Hardy, Bergman and Bloch spaces on the unit polydisk, *Zeit. Anal. Anwen.* **21** (2003), 179–186.

[199] S. Stević, Weighted integrals of holomorphic and harmonic functions, *International two-day meeting on complex, harmonic, and functional analysis and applications,* Thessaloniki, December 12 and 13, 2003.

[200] S. Stević, Weighted integrals of holomorphic functions on the polydisc, *Zeit. Anal. Anwen.* **23** (2004), 577–587.

[201] S. Stević, Weighted integrals of holomorphic functions on the polydisc (II), *Zeit. Anal. Anwen.* **23** (2004), 775–782.

[202] S. Stević, On an integral operator on the unit ball in $\mathbb{C}^n$, *J. Inequal. Appl.* **1** (2005), 81–88.

[203] S. Stević, Weighted integrals of holomorphic functions in the polydisc, *J. Inequal. Appl.* **2005** (2005), 583–591.

[204] S. Stević, Boundedness and compactness of an integral operator on a weighted space on the polydisc, *Indian J. Pure Appl. Math.* **37** (6) (2006), 343–355.

[205] S. Stević, A generalization of a result of Choa on analytic functions with Hadamard gaps, *J. Korean Math. Soc.* **43** (2006), 579–591.

[206] S. Stević, On Bloch-type functions with Hadamard gaps, *Abstract Appl. Anal.* **2007** (2007), Article ID 39176, 8 pages.

[207] S. Stević, Boundedness and compactness of an integral operator on mixed norm spaces on the polydisc, *Sibirsk. Mat. Zh.* **48** (2007), 694–706.

[208] S. Stević, Weighted composition operators between mixed norm spaces and H_α^∞ spaces in the unit ball, *J. Inequal. Appl.* **2007** (2007), Article ID 28629, 9 pages.

[209] S. Stević, On Ren-Kähler's paper "Hardy Littlewood inequalities and Q_p-spaces" [Z. Anal. Anwendungen **24** (2005), 375–388], *Zeit. Anal. Anwen.* **26** (2007), 473–480.

[210] S. Stević, Holomorphic functions on the mixed norm spaces on the polydisc, *J. Korean Math. Soc.* **45** (2008), No. 1, 63–78.

[211] S. Stević, A note on a theorem of Zhu on weighted Bergman projections on the polydisc, *Houston J. Math.* **34** (2008), 1233–1241.

[212] S. Stević, Norms of some operators from Bergman spaces to weighted and Bloch-type space, *Util. Math.* **76** (2008), 59–64.

[213] S. Stević, On a new operator from H^∞ to the Bloch-type space on the unit ball, *Util. Math.* **77** (2008), 257–263.

[214] S. Stević, Norm of weighted composition operators from Bloch space to H_μ^∞ on the unit ball, *Ars. Combin.* **88** (2008), 125–127.

[215] S. Stević, On a new integral-type operator from the weighted Bergman space to the Bloch-type space on the unit ball, *Discrete Dyn. Nat. Soc.* **2008** (2008), Article ID 154263, 14 pages.

[216] S. Stević, On a new operator from the logarithmic Bloch space to the Bloch-type space on the unit ball, *Appl. Math. Comput.* **206** (2008), 313–320.

[217] S. Stević, On Libera type transform on the unit disc, polydisc and the unit ball, *Integral Transform. Spec. Funct.* **19** (2008), 785–799.

[218] S. Stević, On a new integral-type operator from the Bloch space to Bloch-type spaces on the unit ball, *J. Math. Anal. Appl.* **354** (2009), 426–434.

[219] S. Stević, Extended Cesàro operators between mixed-norm spaces and Bloch-type spaces in the unit ball, *Houston J. Math.* (to appear).

[220] S. Stević, The boundedness and compactness of an integral operator between H^∞ and a mixed-norm space on the polydisc *Siberian J. Math.* (to appear).

[221] S. Stević, On an integral operator between Bloch-type spaces on the unit ball, *Bull. Sci. Math.* (to appear).

[222] M. Stoll, On the rate of growth of the means M_p of holomorphic and pluriharmonic functions on the ball, *J. Math. Anal. Appl.* **93** (1983), 109–127.

[223] M. Stoll, A characterization of Hardy spaces on the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *J. London Math. Soc.* (2) **48** (1993), 126–136.

[224] A. Sudbery, Quaternionic analysis, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **85** (1979), 199–225.

[225] M. Taibleson, On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space, I. Principal properties, *J. Math. Mech.* **13** (1964), 407–479.

[226] X. Tang, Extended Cesàro operators between Bloch-type spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *J. Math. Anal. Appl.* **326** (2007), 1199-1211.

[227] R.M. Timoney, Bloch functions in several complex variables, I. *Bull. London Math. Soc.* **12** (1980), 241–267; II. *J. Reine Angew. Math.* **319** (1980), 1–22.

[228] E.C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1962.

[229] S.I. Ueki, L. Luo, Compact weighted composition operators and multiplication operators between Hardy spaces, *Abstr. Appl. Anal.* **2008** (2008), Article ID 196498, 11 pages.

[230] D. Widder, *The Laplace transform*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

[231] K.J. Wirths, J. Xiao, An image-area inequality for some planar holomorphic maps, *Result. Math.* **38** (2000), 172–179.

[232] H. Wulan, K. Zhu, Bloch and BMO functions in the unit ball, *Complex Var. Elliptic Equ.* **53** (2008), 1009–1019.

[233] Z. Xu, J. Chen, W. Zhang, A harmonic conjugate of the Poisson kernel and a boundary value problem for monogenic functions in the unit ball of $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, *Simon Stevin* **64** (2) (1990) 187–201.

[234] Sh. Yamashita, Criteria for functions to be of Hardy class H^p, *Proc. Amer. Math. Soc.* **75** (1979), 69–72.

[235] Sh. Yamashita, Gap series and α-Bloch functions, *Yokohama Math. J.* **28** (1980), 31—36.

[236] H. Yi, Harmonic little Bloch functions on half–spaces, *Math. Japonica* **47** (1998), 21–28.

[237] K. Zhu, The Bergman spaces, the Bloch spaces, and Gleason's problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **309** (1988), 253–268.

[238] K. Zhu, Duality and Hankel operators on the Bergman spaces of bounded symmetric domains, *J. Funct. Anal.* **81** (1988), 260–278.

[239] K. Zhu, *Operator theory in function spaces*, Pure and Applied Mathematics **136**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

[240] K. Zhu, Weighted Bergman projections on the polydisc, *Houston J. Math.* **20** (1994), 275–292.

[241] K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Graduate Texts in Mathematics **226**, Springer-Verlag, New York, 2005.

[242] K. Zhu, A class of Möbius invariant function spaces, *Illinois J. Math.* **51** (2007), 977–1002.

[243] X. Zhu, Generalized weighted composition operators from Bloch-type spaces to weighted Bergman spaces, *Indian J. Math.* **49** (2007), 139–149.

[244] X. Zhu, Products of differentiation, composition and multiplication from Bergman type spaces to Bers type spaces, *Integral Transform. Spec. Funct.* **18** (2007), 223–231.

[245] X. Zhu, Volterra type operators from logarithmic Bloch spaces to Zygmund type space, *Inter. J. Modern Math.* **3** (2008), 327–336.

[246] A. Zygmund, On the boundary values of functions of several complex variables I, *Fund. Math.* **36** (1949), 207–235.

Работы автора по теме диссертации

[247] К. Аветисян, О представлениях некоторых классов функций, субгармонических в единичном круге и полуплоскости, *Известия НАН Армении, Математика* **29** (1994), No. 1, 3–15.

[248] К. Аветисян, Потенциалы типа Грина и представимость весовых классов субгармонических функций, *Известия НАН Армении, Математика* **30** (1995), No. 2, 3–34.

[249] К. Аветисян, О дробном интегрировании и интегральных представлениях в классах гармонических функций в круге, *Доклады НАН Армении* **99** (1999), No. 4, 301–305.

[250] K. Avetisyan, Fractional integration and integral representations in weighted classes of harmonic functions, *Analysis Mathematica* **26** (2000), No. 3, 161–174.

[251] К. Аветисян, О неравенствах типа Литтлвуда–Пэли, *Доклады НАН Армении* **101** (2001), No. 1, 20–23.

[252] К. Аветисян, Ограниченные проекторы на гармонических пространствах со смешанной нормой, *Доклады НАН Армении* **101** (2001), No. 3, 211–215.

[253] К. Аветисян, Неравенства Литтлвуда–Пэли на $\mathbb{R}^n$, *Известия НАН Армении, Математика* **36** (2001), No. 3, 5–11.

[254] K. Avetisyan, Fractional integro-differentiation in harmonic mixed norm spaces on a half-space, *Comment. Math. Univ. Carolinae* **42** (2001), No. 4, 691–709.

[255] К. Аветисян, О дробном интегродифференцировании в классах гармонических функций со смешанной нормой, *Доклады НАН Армении* **102** (2002), No. 1, 5–10.

[256] А.М. Джрбашян, К. Аветисян, К общей теории классов регулярных функций, интегрируемых с весом по площади круга, *Доклады НАН Армении* **102** (2002), No. 2, 105–112.

[257] К. Аветисян, Непрерывная проекция типа Бергмана в пространствах Бесова, *Известия НАН Армении, Математика* **38** (2003), No. 6, 5–16.

[258] K. Avetisyan, A maximal function characterization of harmonic Bergman spaces, Proc. ISAAC Conf. on Analysis, Yerevan, Armenia, 2002, Gitutjun, 2004, 211–217.

[259] K. Avetisyan, Continuous inclusions and Bergman type operators in n-harmonic mixed norm spaces on the polydisc, *J. Math. Anal. Appl.* **291** (2004), No. 2, 727–740.

[260] K. Аветисян, Неравенства типа Литтлвуда–Пэли для n-гармонических функций в поликруге, *Мат. Заметки* **75** (2004), No. 4, 483–492.

[261] K. Аветисян, Обобщенная проблема Литтлвуда, *Известия НАН Армении, Математика* **40** (2005), No. 3, 3–15.

[262] K. Avetisyan, Integral representations in general weighted Bergman spaces, *Complex Variables Theory Appl.* **50** (2005), No. 15, 1151–1161.

[263] K. Avetisyan, R.F. Shamoyan, Some generalizations of Littlewood–Paley inequality in the polydisc, *Mat. Vesnik* **58** (2006), No. 3–4, 97–110.

[264] K. Аветисян, Лакунарные ряды и точные оценки в весовых пространствах голоморфных функций, *Известия НАН Армении, Математика* **42** (2007), No. 2, 3–9.

[265] K. Аветисян, Р.Ф. Шамоян, Тождества Харди–Стейна и неравенства Литтлвуда–Пэли в поликруге, *Известия НАН Армении, Математика* **42** (2007), No. 3, 3–12.

[266] K. Avetisyan, S. Stević, Equivalent conditions for Bergman space and Littlewood–Paley type inequalities, *J. Comput. Anal. Appl.* **9** (2007), No. 1, 15–28.

[267] K. Avetisyan, O. Djordjević, M. Pavlović, Littlewood–Paley inequalities in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **336** (2007), No. 1, 31–43.

[268] K. Avetisyan, Hardy–Bloch type spaces and lacunary series on the polydisk, *Glasgow Math. J.* **49** (2007), No. 2, 345–356.

[269] K. Avetisyan, Weighted integrals and Bloch spaces of n-harmonic functions on the polydisc, *Potential Analysis* **29** (2008), No. 1, 49–63.

[270] K. Avetisyan, S. Stević, Holomorphic functions on the mixed norm spaces on the polydisc (II), *J. Comput. Anal. Appl.* **11** (2009), No. 2, 239–251.

[271] K. Avetisyan, S. Stević, Extended Cesaro operators between different Hardy spaces, *Appl. Math. Comput.* **207** (2009), No. 2, 346–350.

[272] K. Avetisyan, S. Stević, The generalized Libera transform is bounded on the Besov mixed-norm, BMOA and VMOA spaces on the unit disc, *Appl. Math. Comput.* **213** (2009), No. 2, 304–311.

[273] K. Avetisyan, K. Gürlebeck, W. Sprössig, Harmonic conjugates in weighted Bergman spaces of quaternion-valued functions, *Comput. Methods Func. Theory* **9** (2009), No. 2, 593–608.

[274] K. Avetisyan, A note on mixed norm spaces of analytic functions, *Australian J. Math. Anal. Appl.* (2009), to appear.

Тезисы конференций по теме диссертации

[275] K. Avetisyan, Green type potentials and representability of some weighted classes of subharmonic functions, *Theory of Functions and Applications, Collections of works dedicated to the memory of M.M. Djrbashian*, Yerevan, Louys (1995), pp. 11–16.

[276] K. Avetisyan, Some new integral representations in the classes H^p_α of M.M. Djrbashian, *International Conference DMC-98, Abstracts*, Yerevan (1998), pp. 7–8.

[277] K. Avetisyan, Bergman type operators in n-harmonic mixed norm spaces on the polydisc, *International Conference Mathematics in Armenia. Advances and Perspectives. Abstracts*, Yerevan (2003), p. 20.

[278] K. Avetisyan, A maximal theorem for a weighted space on the unit ball of $\mathbb{R}^n$, *Int. Conf. Harmonic Analysis and Approx. III, 2005, Tsaghkadzor, Armenia, Abstracts*, Yerevan (2005), 10–11.

[279] K. Avetisyan, A characterization of Bergman spaces, *Тезисы конференции, посвященной 100–летию со дня рождения академика А. Шагиняна*, Ереван (2006), с. 5–6.

[280] K. Avetisyan, Sharp inclusions in mixed norm spaces of analytic functions, *Тезисы конференции, посвященной 80–летию со дня рождения академика С. Мергеляна*, Ереван (2008), с. 8–9.

[281] K. Avetisyan, Lacunary series in mixed norm spaces, *Int. Conf. Harmonic Analysis and Approximations, IV, dedicated to 80th anniversary of academician A. Talalian, 2008, Tsaghkadzor, Armenia, Abstracts*, Yerevan (2008), pp. 21–22.

[282] К. Аветисян, Лакунарные ряды в весовых пространствах аналитических функций, *Тезисы конференции, посвященной 90–летию основания ЕГУ*, Ереван (2009), с. 15–16.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

В диссертации получены следующие основные результаты.

1) В полидиске и шаре комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ получены новые неравенства Литтлвуда–Пэли для голоморфных и n-гармонических функций. Одно из этих неравенств решает известную задачу Литтлвуда.

2) Даны полные характеристики лакунарных (по Адамару) рядов голоморфных в полидиске функций из различных весовых классов таких, как весовые пространства Харди, Блоха, Бесова, Бергмана, Харди–Соболева и со смешанной нормой.

3) Получены максимальные теоремы типа Харди–Литтлвуда в гармонических классах Бергмана в единичном шаре и верхнем полупространстве из $\mathbb{R}^n$.

4) Установлены действия (дробных) интегральных и дифференциальных операторов в пространствах со смешанной нормой. При этом все полученные вложения и оценки точны.

5) Для пространств со смешанной нормой голоморфных и n-гармонических функций найдены новые интегральные представления, в том числе для пространств с общими весами. Доказана ограниченность соответствующих операторов (типа) Бергмана в этих пространствах.

6) Доказана ограниченность операторов (плюри)гармонического сопряжения в пространствах со смешанной нормой, в том числе для пространств с общими весами. Аналогичная задача решена для весовых классов Бергмана кватернионнозначных функций.