Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении

Гогян Смбат Леваевич

Нелинейная аппроксимация в $L^1(0,1)$ по системе Хаара

(A.01.01—математический анализ)

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

На соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель

Доктор физико-математических наук

Профессор Григорян М. Г.

Ереван - 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Работа посвящена важной и бурно развивающейся области математического анализа - теории нелинейной аппроксимации (подробно об этом см. обзорную статью В. Н. Темлякова [1]). Жадные алгоритмы (гриди алгоритмы, от англ. greedy-жадный) для банаховых пространств изучены Р. ДеВором [2], В. Н. Темляковым [2-7], П. Войтащиком [8-9], С. В. Конягином [7], А. Камонт [10-12], М. Г. Григоряном [13-14] и другими авторами (см. [6],[9],[11-12], [15-19]).

В диссертации рассматриваются некоторые вопросы о поведении жадного алгоритма в $L^1(0,1)$ по системе Хаара. Изучается сходимость жадного алгоритма в подпространствах $L^1(0,1)$ порожденные подсистемами системы Хаара и систем типа Хаара. Изучается также поведение жадного алгоритма, после исправления функции на множестве малой меры. Вводится X-жадный по разложению алгоритм и строится функция f, для которой L^1-жадный (L^1-гриди) и L^1-жадный по разложению алгоритмы по системе Хаара не сходятся к f.

Пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ нормированный базис в банаховом пространстве X. Тогда для каждого элемента $f \in X$ имеем разложение

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f,\Psi)\psi_k.$$

Назовем перестановку натуральных чисел $\varrho,\ \varrho(j) = k_j,\ j = 1, 2, ...$ понижающим и будем писать $\varrho \in D(f)$ если

$$| c_{k_1}(f,\Psi) |\geq| c_{k_2}(f,\Psi) |\geq \cdots.$$

В случае строгих неравенств, в $D(f)$ будет содержаться только один элемент. Определим m-тый жадный аппроксимант элемента f относительно базиса Ψ и перестановке $\varrho \in D(f)$ следующим образом

$$G_m(f) = G_m(f,\Psi,\varrho) = \sum_{j=1}^{m} c_{k_j}(f,\Psi)\psi_{k_j}.$$

Этот метод нелинейной аппроксимации известен как жадный алгоритм (см. например [7]). Если базис Ψ безусловный в X, то

$$\lim_{m\to+\infty}\|f-G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X=0, \tag{1.1}$$

для всех $\varrho\in D(f)$. Но в общем случае, последовательность $\{G_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ может не сходится к f.

Определение 1.1 *Базис $\Psi=\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется квази-гриди базисом в X если для всех $f\in X$ существует $\varrho\in D(f)$ для которой выполняется (1.1).*

В работе [8] доказана следующая теорема:

Теорема A (П. Войтащик). *Для того, чтобы базис Ψ являлся квази-гриди базисом, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная $C>0$ такая, что для всех $f\in X$, $\varrho\in D(f)$ и $m\in N$ имело место неравенство*

$$\|G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X\le C\cdot\|f\|_X,$$

Для квази-гриди базисов имеет смысл говорить об эффективности жадного алгоритма. Для этого определим m-членное наилучшее приближение для $f\in X$ следующим образом

$$\sigma_m(f,\Psi)=\inf_{b_k,\Lambda}\|f-\sum_{k\in\Lambda}b_k\psi_k\|_X,$$

где inf берется по всем коэффициентам b_k и множествам натуральных чисел с $\#\Lambda=m$. Наилучшее, что можно ожидать от $G_m(f,\Psi,\varrho)$, это

$$\|f-G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X=\sigma_m(f,\Psi).$$

Определение 1.2 *Базис Ψ называется гриди базисом в X если для всех $f\in X$ существует перестановка $\varrho\in D(f)$ для которой*

$$\|f-G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X\le C\sigma_m(f,\Psi), \tag{1.2}$$

где C не зависит от f,ϱ и m.

Если Ψ является квази-гриди (гриди) базисом, то (1.1) (соот. (1.2)) выполняется для всех $\varrho \in D(f)$.

Определение 1.3 *Базис Ψ называется демократическим, если существует число C такое, что для любых двух конечных множеств индексов P и Q с $\#P = \#Q$ справедливо неравенство*

$$\|\sum_{k\in P}\psi_k\|_X \le C\|\sum_{k\in Q}\psi_k\|_X.$$

В работе [7] доказана следующая теорема

Теорема(С. Конягин, В. Темляков). *Для того, чтобы базис являлся гриди базисом, необходимо и достаточно, чтобы он был безусловным и демократическим.*

Итак, если базис Ψ не является безусловным, то $\|f - G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X$ по порядку уступает наилучшему приближению.

Определение 1.4 *Базис Ψ называется почти гриди базисом в X если для всех $f \in X$ существует $\varrho \in D(f)$ для которой*

$$\|f - G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X \le C \inf_{\Lambda, \#\Lambda = m} \|f - \sum_{k\in\Lambda} c_k(f,\Psi)\psi_k\|_X, \quad m = 1, 2, \ldots$$

где C не зависит от f, ϱ и m.

В работе [6] доказана

Теорема В(С. Дилуорт, Н. Калтон, Д. Кутцарова, В. Темляков). *Для того, чтобы базис являлся почти гриди базисом, необходимо и достаточно, чтобы он был квази-гриди и демократическим базисом.*

Ясно, что в $L^2(0,1)$ всякий ортонормированный базис будет гриди базисом, а неравенство (1.2) будет выполняться при $C = 1$.

В. Темляковым доказано (см. [4]), что система Хаара является гриди базисом в $L^p(0,1)$, при $1 < p < +\infty$. Аналогичный результат для систем типа Хаара получила А. Камонт (см. [10]). Но в $L^1(0,1)$ ситуация другая. С. Дилуорт, Д. Кутцарова и П. Войтащик доказали (см. [9]), что система Хаара не является квази-гриди базисом в $L^1(0,1)$.

Для формулировки результат первого параграфа сделаем некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{H} = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть система типа Хаара (см. определение в §1), а $\chi = \{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ система Хаара (нормированные в $L^1(0,1)$). Обозначим через $\mathcal{I}$ множество последовательностей $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \ldots\}$ возрастающих натуральных чисел. Положим

$$\overline{\mathcal{M}} = Z_+ \setminus \mathcal{M} = \{n_0, n_1, n_2, \ldots\},\ (n_0 < n_1 < n_2 < \ldots)$$

$$V[0] = \{1,2\} \quad \text{и} \quad V[k] = \{2^k+1, 2^k+2, \ldots, 2^{k+1}\} \quad \text{для} \quad k \geq 1, \tag{1.3}$$

$$\Theta[\mathcal{H},\mathcal{M}] = \bigcup_{\substack{k\in\mathcal{M}\\ s\in V[k]}} h_s, \qquad L[\mathcal{H},\mathcal{M}] = \overline{span\{\Theta[\mathcal{H},\mathcal{M}]\}},$$

где операция замыкания берется по $L^1(0,1)$ норме. Для системы Хаара условимся писать $\Theta[\mathcal{M}]$ и $L[\mathcal{M}]$. В работе [9] доказано, что существует $\mathcal{M} \in \mathcal{I}$ такая, что система $\Theta[\mathcal{M}]$ является квази-гриди базисом в $L[\mathcal{M}]$. Но члены этой последовательности $\mathcal{M}$ возрастают не медленнее, чем геометрическая прогрессия, а именно $\frac{m_{i+1}}{m_i} > 2$. В первом параграфе настоящей работы доказывается теорема, которая описывает все последовательности $\mathcal{M}$ для которых система $\Theta[\mathcal{M}]$ является квази-гриди базисом в $L[\mathcal{M}]$.

Теорема 1.1 *Следующие условия эквивалентны*

1) $\Theta[\mathcal{M}]$ *является квази-гриди базисом в* $L[\mathcal{M}]$*,*

2) $\Theta[\mathcal{M}]$ *демократический,*

3) $\Theta[\mathcal{M}]$ *является почти гриди базисом в* $L[\mathcal{M}]$*,*

4) $\mathcal{M}$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\#\overline{\mathcal{M}} = +\infty \quad \text{и} \quad H(\overline{\mathcal{M}}) = \sup_{i\in Z_+}(n_{i+1} - n_i) < +\infty.$$

Следствие 1.1 *Подсистема* $\Theta[\mathcal{M}],\ \mathcal{M} = \{2,4,6,\ldots\}$ *является квази-гриди базисом в* $L[\mathcal{M}]$*.*

Известно (см. [19]), что существует квази-гриди базис в $L^1(0,1)$. В первом параграфе доказывается, что ни одна система типа Хаара не обладает этим свойством, а именно

Теорема 1.2 *Ни одна система типа Хаара не является квази-гриди базисом в* $L^1(0,1)$.

Аналогичный результат для системы Франклина доказали Г. Геворкян и А. Камонт (см. [12]).

Теорема 1.3 *Существует система типа Хаара* $\mathcal{H}_T$ *для которой подсистема* $\Theta[\mathcal{H},\mathcal{M}]$, $\mathcal{M}=\{2,4,6,...\}$ *не является квази-гриди базисом в* $L[\mathcal{H},\mathcal{M}]$.

Итак, жадный алгоритм в $L^1(0,1)$ по системе Хаара сходится не для всех функций из $L^1(0,1)$. Во втором параграфе диссертации рассматривается поведение жадного алгоритма в $L^1(0,1)$ по системе Хаара, после исправления функции на фиксированном множестве малой меры.

Идея об исправлении функции, с целью улучшения ее свойств, принадлежит Н. Н. Лузину. Им в 1912 г. был получен следующий знаменитый результат (см. [20]).

Теорема (C- свойство Н. Н. Лузина). *Для любой измеримой, почти всюду конечной на [0,1] функции* f *и для любого* $\epsilon>0$ *существует измеримое множество* E *с мерой* $\mid E\mid>1-\epsilon$ *и непрерывная на [0,1] функция* g, *совпадающая с* f *на* E.

В 1939г. Д.Е.Меньшов [21] доказал следующую фундаментальную теорему

Теорема (Усиленное C- свойство Д.Е.Меньшова). *Пусть* f *измеримая функция, конечная почти всюду на* $[0,2\pi]$. *Каково бы не было* $\epsilon>0$, *можно определить непрерывную функцию* g, *совпадающую с* f *на некотором множестве* E, $|E|>2\pi-\epsilon$ *и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на* $[0,2\pi]$.

Далее в этом направлении интересные результаты получены А. А. Талаляном [22], Ф. Г. Арутюняном [23], О. Д. Церетели [24], У. Прайсом [25], К. И. Осколковым [26], Б. С. Кашином [27-28], К. С. Казаряном [29-30], Р. И. Осиповым [31], М. Г. Григоряном [30,32-36] и другими авторами (см. [30], [37]-[41]).

В работе [22] установлена

Теорема (А. А. Талалян). *Члены любой ортонормированной системы $\{\varphi_n\}$ можно переставить так, чтобы вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}\}$ обладала следующим свойством: для любой функции $f \in L^2[0,1]$ и любого $\epsilon > 0$ можно найти функцию $g \in L^2[0,1]$ такую, что $|\{x \in [0,1] : \quad g(x) \neq f(x)\}| < \epsilon$ и ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}\}$ сходится почти всюду.*

В 1978г. была опубликована [39] следующая теорема

Теорема (Ш.В.Хеладзе). *Любую функцию $f \in L^1$ изменением на множестве e, зависящем от функции f, можно превратить в функцию g; $|g| = |f|$, ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней почти всюду и в метрике L^1.*

Замечание. Во всех этих теоремах "исключительное"множество e, на котором происходит изменение функции, зависит от функции. Более того, в доказанной теореме Д.Е.Меньшова, им же в 1959г. было установлено, что это "исключительное"множество e существенно зависит от исправляемой функции (см. [38]), но тем не менее верна (см. [37])

Теорема (Д. Е. Меньшов). *Пусть f любая суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция и $Q \subset [0, 2\pi]$- любое нигде не плотное множество. Тогда можно найти суммируемую функцию g, что $g = f$ на Q и ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду.*

Отметим, что метод, который применил Д.Е.Меньшов при доказательстве этой теоремы, не позволяет получить исправленную функцию с рядом Фурье сходящимся в метрике L^1. В 1988г. М. Григорян доказал, что тригонометрическая система обладает усиленным L^1- свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем: для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ можно найти функцию $g \in L^1[0,1]$, совпадающую с f на E, ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней по $L^1[0,1]$ норме (см. [35]).

Более того, им установлено, что каждая полная ортонормированная система обладает усиленным L^1 свойством. Он доказал также

Теорема (М. Григорян). *Пусть $\{\varphi_n\}$ -полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система ограниченных функций. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\epsilon$, и весовая функция μ, $0 < \mu(x) \leq 1$, $\mu = 1$ на E такие, что для любого числа $p \in [1,2)$ и для каждой функции $f \in L^p_\mu[0,1] = \{f \quad : \quad \int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx < \infty\}$ можно найти функцию $g \in L^1[0,1]$, совпадающую с f на E, ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_n\}$ сходится к ней по $L^p_\mu[0,1]$ норме. Это свойство ортонормированной системы $\{\varphi_n\}$ назовем усиленным L^p_μ- свойством.*

Необходимо отметить, что в 1981 г. К.С.Казаряном [29] построена полная равномерно ограниченная ортонормированная система, которая не обладает усиленным C - свойством Меньшова.

В дальнейшем, через $\|f\|_\Delta$ обозначим $L^1(0,1)$ норму функции f на Δ и напишем $\|f\|$ при $\Delta = (0,1)$. Результат из [9] о том, что система Хаара $\chi = \{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ не является квази-гриди базисом в $L^1(0,1)$ может быть усилен следующим образом (см. теорему А)

Теорема 2.1 *Для любого множества $E \subset [0,1]$ с мерой $0 <| E |\leq 1$ существуют функция $f \in L^1(0,1)$ и перестановка $\varrho \in D(f,\chi)$ такие, что*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \|G_m(f,\chi,\varrho)\|_E = +\infty.$$

Естественен вопрос: существует ли измеримое множество e сколь угодно малой меры такое, что при некотором положительном C, после изменения значений любой функции $f \in L^1(0,1)$ на e, операторы $G_m(\tilde{f},\chi,\varrho)$ для вновь полученной функции $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ удовлетворяли условиям

$$\|G_m(\tilde{f},\chi,\varrho)\| \leq C\|f\|, \quad \text{для всех} \quad m \geq 1, \ \varrho \in D(\tilde{f},\chi).$$

Во втором параграфе доказывается, что поставленный вопрос имеет положительный ответ. Верна следующая теорема

Теорема 2.2 *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E, и члены разложения $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\tilde{f},\chi)\chi_n$ функции $\tilde{f}$ по системе Хаара можно переставить так, чтобы для всех натуральных m выполнялись соотношения*

$$1) \quad c_{\varrho(m)}(\tilde{f},\chi) \ > \ c_{\varrho(m+1)}(\tilde{f},\chi),$$

$$2) \quad \|G_m(\tilde{f},\chi)\| \ \leq \ 3\|\tilde{f}\| \leq 12\|f\|,$$

$$3) \quad \lim_{m\to\infty} \|G_m(\tilde{f},\chi) - \tilde{f}\| = 0.$$

В связи с первым утверждением теоремы 2.2 отметим, что исправленную функцию $\tilde{f}$ невозможно выбрать так, чтобы

$$c_m(\tilde{f},\chi) \ \geq \ c_{m+1}(\tilde{f},\chi), \quad m = 1,2,3,\ldots.$$

Более того, верна следующая теорема

Теорема 2.3 *Каково бы не было измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $0 <| E |< 1$ существует функция $f_0 \in L^1(0,1)$ такая, что если некоторая функция $f \in L^1(0,1)$ совпадает с f_0 на E, то последовательность $\{| c_n(f,\chi) |\}_{n=1}^{\infty}$ не может быть монотонно убывающей.*

Вместе с тем имеет место

Теорема 2.4 *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E, такое, что все ненулевые члены в последовательности $\{c_n(\tilde{f},\chi)\}$ расположены в убывающем порядке.*

Эта теорема следует из более общей теоремы, для формулировки которой сделаем некоторые обозначения.

В наших дальнейших рассуждениях будем считать, что последовательность целых чисел $M = \{M_s\}_{s=1}^{\infty}$ фиксирована и удовлетворяет условиям

$$0 \le M_1 < M_2 \le M_3 < M_4 \le \ldots < M_{2s-2} \le$$

$$M_{2s-1} < M_{2s} \ldots \quad \overline{\lim_{s\to\infty}}(M_{2s} - M_{2s-1}) = +\infty. \tag{1.4}$$

Определим возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(M) = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} = \{n \in V[p] \quad : \quad M_{2s-1} \le p < M_{2s}, \quad s = 1, 2, \ldots\}. \tag{1.5}$$

где множества $V[p]$ определяются согласно (1.3). Положим $\chi_{\mathcal{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $\varrho = \{\varrho(k)\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая перестановка чисел множества $\mathcal{S}$, для которой имеет место

$$\mid c_{\varrho(k+1)}(f, \chi) \mid \le \mid c_{\varrho(k)}(f, \chi) \mid \quad \text{для всех натуральных} \quad k.$$

Множество всех таких перестановок обозначим через $D(f, \chi_{\mathcal{S}})$.

Для каждой функции $f \in X$ и для любого элемента $\varrho = \{\varrho(k)\} \in D(f, \chi_{\mathcal{S}})$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f, \chi_{\mathcal{S}}, \varrho)\}_{m=1}^{\infty}$ следующим образом

$$G_m(f, \chi_{\mathcal{S}}) = G_m(f, \chi_{\mathcal{S}}, \varrho) = \sum_{k=1}^{m} c_{\varrho(k)}(f, \chi)\chi_{\varrho(k)}.$$

Заметим, что при $\mathcal{S} = N$ будем иметь $G_m(f, \chi)$- жадный оператор по системе Хаара.

Теорема 2.5 *Пусть $\{\varphi_k\} = \chi_{\mathcal{S}}$ (см. (1.4)-(1.5)) подсистема системы Хаара. Тогда для любого $0 < \epsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $\mid E \mid > 1 - \epsilon$ и ряд вида*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i, \qquad \text{с} \quad a_i \searrow 0,$$

такие, что для каждой функции $f \in L^1(0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0, 1)$, совпадающую с f на E и ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i a_i \varphi_i; \qquad \text{где} \quad \delta_i = 0 \quad \text{или} \quad 1,$$

который сходится к $\tilde{f}$ *в* $L^1(0,1)$.

Следствие 2.1 *Для любого* $0 < \epsilon < 1$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $\mid E \mid > 1-\epsilon$ *такое, что для каждой функции* $f \in L^1(E)$ *существует ряд вида*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{k_i} \quad \text{где} \quad a_i \searrow 0 \quad \text{и} \quad k_1 < k_2 < \dots,$$

который сходится к f *по норме* $L^1(E)$.

Замечание. *Необходимо отметить, что в теоремах 2.1-2.5 "исключительное" множество* $[0,1] \setminus E$*, на котором происходит изменение функции* f*, универсально (не зависит от функции).*

Следует отметить, что ряды по системе Хаара с монотонными коэффициентами были изучены еще в 1963г. и получен ряд интересных результатов П. Л. Ульяновым(см. [42]). В частности, им доказана следующая

Теорема(П. Л. Ульянов). *Пусть* $p > 1$ *и последовательность положительных чисел* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такова, что*

$$\|a_n \chi_n\|_2 \geq \|a_{n+1} \chi_{n+1}\|_2 \quad \text{для всех натуральных} \ \ n,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n \chi_n\|_2 = 0.$$

Тогда, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n$$

является рядом Фурье некоторой функции $f \in L^p(0,1)$*, то функция* $\left|f\right|$ *интегрируема в любой степени* $q \in [1,\infty)$.

Во втором параграфе для подсистемы $\chi_{\mathcal{S}}$ доказывается

Теорема 2.6 *Пусть* $\chi_{\mathcal{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *подсистема (см. (1.4),(1.5)) системы Хаара. Тогда для любого* $0 < \epsilon < 1$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $\mid E \mid > 1-\epsilon$ *такое, что для каждой функции* $f \in L^1(0,1)$ *можно найти функцию*

$\tilde{f} \in L^1(0,1)$ *совпадающую с* f *на* E *для которой*

$$\|G_m(\tilde{f}, \chi_{\mathcal{S}})\| \ \le \ 3\|\tilde{f}\| \le 12\|f\|, \quad \text{для } m = 1, 2, \dots$$

и

$$\lim_{m\to\infty} \|G_m(\tilde{f}, \chi_{\mathcal{S}}) - \tilde{f}\| = 0.$$

В связи с этой теоремой отметим, что какова бы не была подсистема $\chi_{\mathcal{S}}$ (см. (1.4)-(1.5)) системы Хаара, существует функция $f \in \overline{span(\chi_{\mathcal{S}})}$, ($\overline{span(\chi_{\mathcal{S}})}$ - замыкание линейной оболочки подсистемы $\chi_{\mathcal{S}}$ в $L^1(0,1)$), жадный алгоритм которой в $L^1(0,1)$ по системе Хаара не сходится к f. Это следует из теоремы 1.1.

Теорему, аналогичную к 2.2 для тригонометрической системы доказал М. Г. Григорян в работе [13]. А именно

Теорема С(М. Г. Григорян). *Для любого* $0 < \epsilon < 1$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $| E | > 1 - \epsilon$ *такое, что для каждой функции* $f \in L^1(0,1)$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^1(0,1)$*, совпадающую с* f *на* E*, и члены разложения* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\tilde{f})\varphi_n$ *функции* $\tilde{f}$ *по тригонометрической системе* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *можно переставить так, чтобы для всех натуральных т выполнялись соотношения*

$$1) \quad | a_{\sigma(m)}(\tilde{f}) | > | a_{\sigma(m+1)}(\tilde{f}) |,$$

и

$$2) \quad \lim_{m\to\infty} \| \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)}(\tilde{f})\varphi_{\sigma(k)} - \tilde{f}\| = 0.$$

Отметим, что в теореме 2.2 все коэффициенты $\{c_n(\tilde{f}, \chi)\}_{n=1}^{\infty}$ положительны, а в доказательстве теоремы С не видно, можно ли исправленную функцию выбрать таким образом, чтобы ее коэффициенты по тригонометрической системе были положительны.

В третьем параграфе рассматривается X-жадный (X-гриди) алгоритм. Напомним ее определение. Пусть $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полная, минимальная система в банаховом пространстве X и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ее сопряженная система. Предположим, что для каждого элемента $x \in X$ существуют числа $\hat{\alpha}$, $\hat{k}$ и $\hat{p}$ для которых выполняются равенства

$$\inf_{\alpha,k} \|x - \alpha\varphi_k\|_X = \|x - \hat{\alpha}\varphi_{\hat{k}}\|_X$$

и

$$\inf_p \|x - <x, \psi_p> \varphi_p\|_X = \|x - <x, \psi_{\hat{p}}> \varphi_{\hat{p}}\|_X.$$

Положим $G_1(x, \varphi) = \hat{\alpha}\varphi_{\hat{k}}$ и $\tilde{G}_1(x, \varphi) =< x, \psi_{\hat{p}} > \varphi_{\hat{p}}$. Фактически $G_1(x, \varphi)$ есть одночленный наилучший аппроксимант элемента x по системе φ. Отметим, что $\hat{\alpha}, \hat{k}$ и $\hat{p}$ могут определяться неоднозначно.

Для любого $x \in X$ определим последовательности $\{G_k(x, \varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{G}_k(x, \varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ индукцией по k. Для натурального k определим

$$G_{k+1}(x, \varphi) = G_k(x, \varphi) + G_1(x - G_k(x, \varphi), \varphi)$$

и

$$\tilde{G}_{k+1}(x, \varphi) = \tilde{G}_k(x, \varphi) + \tilde{G}_1(x - \tilde{G}_k(x, \varphi), \varphi).$$

Обозначим

$$R_k(x, \varphi) = x - G_k(x, \varphi)$$

и

$$\tilde{R}_k(x, \varphi) = x - \tilde{G}_k(x, \varphi).$$

Пользуясь этими обозначениями легко видеть, что

$$R_{k+1}(x, \varphi) = x - G_{k+1}(x, \varphi) = x - G_k(x, \varphi) -$$

$$-G_1(x - G_k(x, \varphi), \varphi) = R_1(x - G_k(x, \varphi), \varphi)$$

т.е.

$$R_{k+1}(x, \varphi) = R_1(R_k(x, \varphi), \varphi).$$

Аналогично,

$$\tilde{R}_{k+1}(x, \varphi) = \tilde{R}_1(\tilde{R}_k(x, \varphi), \varphi).$$

Но $R_1(x,\varphi)$ получается из элемента x , вычитанием одночленного наилучшего аппроксиманта. Итак, последовательность $\{R_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ строится так, что каждый ее член является остатком наилучшего одночленного приближения предыдущего члена. Последовательность $\{G_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ называется X-жадным алгоритмом элемента x по системе φ (см. [1]). Последовательность $\{\tilde{G}_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем X-жадным по разложению алгоритмом x по системе φ.

Последовательности $\{G_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{G}_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ могут определяться неоднозначно (из-за возможности неоднозначности выбора $\hat{\alpha}$, $\hat{k}$ и $\hat{p}$) и поэтому для каждого $x \in X$ могут оказаться много X-жадных и X-жадных по разложению алгоритмов по системе φ.

Легко заметить, что когда $X = L^2$ а φ является ортогональной системой, то L^2-жадный и L^2-жадный по разложению алгоритмы совпадают и $G_m(x,\varphi)$ есть m-членный наилучший аппроксимант функции x по системе φ.

В. Н. Темляковым был поставлен вопрос: сходятся ли все L^p - жадные алгоритмы всех функций $x \in L^p(0,1)$ при $p > 1$ к x по системе Хаара (см. [1] стр 7,20).

В третьем параграфе доказывается, что существует L^1-жадный алгоритм по системе Хаара для каждой функции $f \in L^1(0,1)$.

Теорема 3.1 *Для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существуют числа $\hat{\alpha}$ и $\hat{k}$ для которых выполняется равенство*

$$\inf_{\alpha,k} \|f - \alpha\chi_k\|_1 = \|f - \hat{\alpha}\chi_{\hat{k}}\|_1.$$

Следует отметить, что не всякие ортогональные системы обладают этим свойством (см. [1], [43]).

Вопрос, аналогичный поставленному В. Н. Темляковым (см. выше) для $p = 1$ имеет отрицательный ответ по следующим соображениям. Для функции $f = \chi_1 + \chi_2$ справедливо $\inf_{\alpha,k} \|f - \alpha\chi_k\|_{L^1(0,1)} = \|f\|_{L^1(0,1)}$, следовательно можем выбрать $G_1(f,\chi) = 0$. Далее выбирая $G_m(f,\chi) = 0$ для $m = 2,3,\ldots$ получим L^1-жадный алгоритм функции f, который не сходится к f по L^1 норме. Но мы можем выбрать

$G_1(f,\chi) = \chi_1$ и тогда получится, что $G_2(f,\chi) = \chi_1 + \chi_2 = f$. В этом случае получается последовательность $G_m(f,\chi) = f,\ m = 2, 3, \ldots$, сходящийся к f.

Возникает вопрос: можно ли для любой функции $f \in L^1(0,1)$ выбрать L^1-жадный алгоритм по системе Хаара сходящийся к f по норме $L^1(0,1)$.

В третьем параграфе доказывается, что этот вопрос имеет отрицательный ответ.

Теорема 3.2 *Существует функция $f \in L^1(0,1)$, для которой ни один L^1 -жадный алгоритм по системе Хаара не сходится к f.*

Теорема 3.3 *Существует функция $f \in L^1(0,1)$, для которой ни один L^1 -жадный по разложению алгоритм по системе Хаара не сходится к f.*

§ 1 Жадный алгоритм и подсистемы системы Хаара

В этом параграфе мы изучим жадный алгоритм по подсистемам системы Хаара и систем типа Хаара. Для напоминания их определений (нормированные в $L^1(0,1)$) положим $t_0 = 0,\ t_1 = 1$ и $\Delta_0^{(1)} = [0,1)$. Далее выберем произвольную внутреннюю точку $t_2 \in \Delta_0^{(1)}$ и обозначим $\Delta_1^{(1)} = [0,t_2)$ и $\Delta_1^{(2)} = [t_2,1)$. И вообще выберем произвольную внутреннюю точку $t_{2^i+j} \in \Delta_i^{(j)} = [a,b)$ для любых $i = 1,2,\dots$ и $j = 1,2,\dots,2^i$ и положим $\Delta_{i+1}^{(2j-1)} = [a,t_{2^i+j})$ и $\Delta_{i+1}^{(2j)} = [t_{2^i+j},b)$. Единственное требование, возлагаемое на $\{\Delta_i^{(j)}\}$ это

$$\lim_{i\to+\infty}\max_{1\le j\le 2^i} m(\Delta_i^{(j)}) = 0,$$

где $m(A)$ лебегого мера множества A, т. е. множество точек $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ должна быть плотной в $[0,1]$. Положим $h_1 = h_0^{(0)} \equiv 1$ и для $n = 2^i + j;\quad j = 1,2,...2^i,\ i = 0,1,2,...$

$$h_n(x) = h_i^{(j)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2m(\Delta_{i+1}^{(2j-1)})} \quad, & \text{для} \quad x \in \Delta_{i+1}^{(2j-1)}; \\ -\frac{1}{2m(\Delta_{i+1}^{(2j)})} \quad, & \text{для} \quad x \in \Delta_{i+1}^{(2j)}; \\ 0 \quad, & \text{для остальных} \quad x. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\int_0^1 h_i^{(j)}(x)dx = 0 \text{ и } \|h_i^{(j)}\|_1 = 1.$$

Множество функций $\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ назовем системой типа Хаара, соответствующий делению $\mathcal{T} = \{t_n\}_{n=0}^{\infty}$. Когда $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\chi = \{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8}\dots\}$ получается система Хаара $\chi = \{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ нормированная в $L^1(0,1)$.

Пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ нормированный базис в банаховом пространстве X. Тогда для каждого элемента $f \in X$ имеем разложение

$$f=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f,\Psi)\psi_k.$$

Назовем перестановку натуральных чисел $\varrho,\ \varrho(j)=k_j,\ j=1,2,...$ понижающим и будем писать $\varrho\in D(f)$ если

$$\mid c_{k_1}(f,\Psi)\mid\geq\mid c_{k_2}(f,\Psi)\mid\geq\cdots$$

В случае строгих неравенств, в $D(f)$ будет содержаться только один элемент. Определим m-тый жадный аппроксимант элемента f относительно базиса Ψ и перестановке $\varrho\in D(f)$ следующим образом

$$G_m(f)=G_m(f,\Psi,\varrho)=\sum_{j=1}^{m} c_{k_j}(f,\Psi)\psi_{k_j}.$$

Этот метод нелинейной аппроксимации известен как жадный алгоритм (см. например [7]). Если базис Ψ безусловный в X, то

$$\lim_{m\to+\infty}\|f-G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X=0, \tag{1.1}$$

для всех $\varrho\in D(f)$. Но в общем случае, последовательность $\{G_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ может не сходится к f.

Определение 1.1 *Базис $\Psi=\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется квази-гриди базисом в X если для всех $f\in X$ существует $\varrho\in D(f)$ для которой выполняется (1.1).*

В работе [8] доказана следующая теорема:

Теорема А (П. Войтащик). *Для того, чтобы базис Ψ являлся квази-гриди базисом, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $C>0$ такое, что для всех $f\in X,\ \varrho\in D(f)$ и $m\in N$ имело место неравенство*

$$\|G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X\leq C\|f\|_X.$$

Для квази-гриди базисов имеет смысл говорить об эффективности жадного алгоритма. Для этого определим m-членное наилучшее приближение для $f\in X$ следующим образом

$$\sigma_m(f,\Psi) = \inf_{b_k,\Lambda} \|f - \sum_{k\in\Lambda} b_k\psi_k\|_X,$$

где inf берется по всем коэффициентам b_k и множествам натуральных чисел с $\#\Lambda = m$. Наилучшее, что можно ожидать от $G_m(f,\Psi,\varrho)$ это

$$\|f - G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X = \sigma_m(f,\Psi).$$

Определение 1.2 *Базис Ψ называется гриди базисом в X если для всех $f \in X$ существует перестановка $\varrho \in D(f)$ для которой*

$$\|f - G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X \le C\sigma_m(f,\Psi), \tag{1.2}$$

где C н зависит от f, ϱ и m.

В работе [7] доказана, что если Ψ является квази-гриди (гриди) базисом, то (1.1) (соот. (1.2)) выполняется для всех $\varrho \in D(f)$.

Определение 1.3 *Базис Ψ называется демократическим, если существует постоянное C такое, что для любых двух множеств индексов P и Q с $\#P = \#Q$ справедливо неравенство*

$$\|\sum_{k\in P}\psi_k\|_X \le C\|\sum_{k\in Q}\psi_k\|_X.$$

В работе [7] доказана следующая теорема

Теорема (С. Конягин, В. Темляков). *Для того, чтобы базис являлся гриди базисом, необходимо и достаточно, чтобы он был безусловным и демократическим.*

Итак, если базис Ψ не является безусловным, то $\|f - G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X$ по порядку уступает наилучшему приближению.

Определение 1.4 *Базис Ψ называется почти гриди базисом в X если существует постоянное C такое, что для всех $f \in X$ существует $\varrho \in D(f)$ для которой*

$$\|f - G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X \le C \inf_{\Lambda,\#\Lambda=m} \|f - \sum_{k\in\Lambda} c_k(f,\Psi)\psi_k\|_X, \quad m = 1,2,\dots$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема B(С. Дилуорт, Н. Калтон, Д. Кутцарова, В. Темляков). *Для того, чтобы базис являлся почти гриди базисом необходимо и достаточно, чтобы он был квази-гриди и демократическим базисом.*

Ясно, что в $L^2(0,1)$ всякий ортогональный базис будет гриди базисом, а неравенство (1.2) будет выполняться при $C=1$.

В. Темляковым доказано (см. [4]), что система Хаара является гриди базисом в $L^p(0,1)$ при $1<p<+\infty$. Аналогичный результат для систем типа Хаара получила А. Камонт (см. [10]). Но в $L^1(0,1)$ ситуация другая. С. Дилуорт, Д. Кутцарова и П. Войтащик доказали (см. [9]) что система Хаара не является квази-гриди базисом в $L^1(0,1)$. Для формулировки результат первого параграфа диссертации сделаем некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{I}$ есть множество последовательностей $\mathcal{M}=\{m_1,m_2,\ldots\}$ возрастающих натуральных чисел. Положим

$$\overline{\mathcal{M}}=Z_+\setminus\mathcal{M}=\{n_0,n_1,n_2,\ldots\},\ (n_0<n_1<n_2<\ldots)$$

$$V[0]=\{1,2\}\quad \text{и}\quad V[k]=\{2^k+1,2^k+2,\ldots,2^{k+1}\}\quad \text{для}\quad k\geq 1,$$

$$\Theta[\mathcal{H},\mathcal{M}]=\bigcup_{\substack{k\in\mathcal{M}\\ s\in V[k]}} h_s,\qquad L[\mathcal{H},\mathcal{M}]=\overline{span\{\Theta[\mathcal{H},\mathcal{M}]\}},$$

где операция замыкания берется по $L^1(0,1)$ норме. Для системы Хаара условимся писать $\Theta[\mathcal{M}]$ и $L[\mathcal{M}]$. В работе [9] доказано, что существует $\mathcal{M}\in\mathcal{I}$ такая, что система $\Theta[\mathcal{M}]$ является квази-гриди базисом в $L[\mathcal{M}]$. Но члены этой последовательности $\mathcal{M}$ возрастают не медленнее чем геометрическая прогрессия, а именно $\frac{m_{i+1}}{m_i}>2$. В первом параграфе настоящей работы доказывается теорема, которая описывает все последовательности $\mathcal{M}$ для которых система $\Theta[\mathcal{M}]$ является квази-гриди базисом в $L[\mathcal{M}]$.

Теорема 1.1 *Следующие условия эквивалентны*

1) $\Theta[\mathcal{M}]$ *является квази-гриди базисом в* $L[\mathcal{M}]$*,*

2) $\Theta[\mathcal{M}]$ *демократический,*

3) $\Theta[\mathcal{M}]$ *является почти гриди базисом в* $L[\mathcal{M}]$*,* *4) $\mathcal{M}$ удовлетворяет соотношениям*

$$\#\overline{\mathcal{M}} = +\infty \quad \text{и} \quad H(\overline{\mathcal{M}}) = \sup_{i \in Z_+}(n_{i+1} - n_i) < +\infty. \tag{1.6}$$

Замечание. *Согласно теореме B достаточно доказать эквивалентность 1), 2) и 4).*

Следствие 1.1 *Подсистема $\Theta[\mathcal{M}]$, $\mathcal{M} = \{2, 4, 6, \dots\}$ является квази-гриди базисом в $L[\mathcal{M}]$.*

Известно, что существует квази-гриди базис в $L^1(0,1)$ (см. [19]). В первом параграфе доказывается, что ни одна система типа Хаара не обладает этим свойством, а именно

Теорема 1.2 *Ни одна система типа Хаара не является квази-гриди базисом в $L^1(0,1)$.*

Теорема 1.3 *Существует система типа Хаара $\mathcal{H}_T$ для которой подсистема $\Theta[\mathcal{H}, \mathcal{M}]$, $\mathcal{M} = \{2, 4, 6, ...\}$ не является квази-гриди базисом в $L[\mathcal{H}, \mathcal{M}]$.*

Доказательства основных лемм

Через $\|f\|_\Delta$ обозначим $L^1(0,1)$ норму функции f на Δ. Также положим $supp(\chi_n) = \Delta_n$ и $supp(\chi_n^{(k)}) = \Delta_n^{(k)}$. Напомним, что система Хаара является монотонным базисом в $L^1(0,1)$, то есть из $m > n$ следует, что $\|S_m(f)\| \geq \|S_n(f)\|$, где $S_m(f)$ есть m -тая частичная сумма Фурье-Хаар ряда функции f. В этой секции мы предположим, что $\#\overline{\mathcal{M}} = +\infty$.

Лемма 1.1 *Пусть $f \in L^1(0,1)$ и $k \in \mathcal{N}$. Тогда для всех $n \in \mathcal{N}$*

$$\|f\|_{\Delta_k} \geq | c_n(f) |, \quad \text{если} \quad \Delta_n \subseteq \Delta_k. \tag{1.7}$$

Доказательство леммы 1.1 Функция $S_{n-1}(f)$ постоянна на Δ_n. Обозначим это значение через H. Ясно, что

$$\|S_n(f)\|_{\Delta_n} = \|S_{n-1}(f) + c_n(f)\chi_n\|_{\Delta_n} = \frac{m(\Delta_n)}{2}\left(\left| H + \frac{c_n(f)}{m(\Delta_n)} \right| + \left| H - \frac{c_n(f)}{m(\Delta_n)} \right|\right) =$$

$$\max(| H \cdot m(\Delta_n) |, | c_n(f) |) \geq | c_n(f) | .$$

Учитывая, что система Хаара является монотонным базиом, имеем, что

$$\|f\|_{\Delta_k} \geq \|f\|_{\Delta_n} \geq \|S_n(f)\|_{\Delta_n} \geq | c_n(f) | .$$

Лемма 1.1 доказана.

Для любой последовательности $\mathcal{M} \in \mathcal{I}$ и для любого натурального k положим

$$P^{(k)} = P^{(k)}(\mathcal{M}) = \{f = \sum_{i=1, i\in\mathcal{M}}^{n_k-1} \sum_{s=1}^{2^i} p_i^{(s)} \chi_i^{(s)} \quad : \quad p_i^{(s)} = 0 \text{ или } | p_i^{(s)} | \geq 1\}$$

и

$$Q^{(k)} = Q^{(k)}(\mathcal{M}) = \{f = \sum_{i=1, i\in\mathcal{M}}^{n_k-1} \sum_{s=1}^{2^i} q_i^{(s)} \chi_i^{(s)} \quad : \quad | q_i^{(s)} | \leq 1\}.$$

Заметим, что для всех $f \in P^{(k)}$ или $f \in Q^{(k)}$ имеем, что $c_1(f) = c_2(f) = 0$. Обозначим

$$Q = Q(\mathcal{M}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q^{(k)}(\mathcal{M}),$$

и положим

$$\tilde{P}^{(k)}(\mathcal{M}) = \{p \in P^{(k)}(\mathcal{M}) \quad : \quad p(x) = p(x + m(\delta)); \quad x \in \delta = \Delta_{n_i+1}^{(2s-1)},$$

$$i = 0, 1, \ldots, k-1; \ s = 1, \ldots 2^{n_i}\},$$

и

$$\tilde{Q}^{(k)}(\mathcal{M}) = \{q \in Q^{(k)}(\mathcal{M}) \quad : \quad q(x) = q(x + m(\delta)); \quad x \in \delta = \Delta_{n_i+1}^{(2s-1)},$$

$$i = 0, 1, \ldots, k-1; \ s = 1, \ldots 2^{n_i}\}.$$

Заметим, что для любой $\mathcal{M} \in \mathcal{I}$ и $k \in \mathcal{N}$

$$\|f\|_\delta < 1, \qquad \text{если} \quad f \in Q^{(k)}(\mathcal{M}), \tag{1.8}$$

где δ любой интервал Хаара $\Delta_{n_k}^{(s)}$, $1 \leq s \leq 2^{n_k}$. Действительно, абсолютное значение функции f на δ не превосходит $2^{n_k-1} + 2^{n_k-2} + \ldots + 2^1 < 2^{n_k}$, и $m(\delta) = 2^{-n_k}$.

Положим $sp(f) = \{k \in \mathcal{N} \ : \ c_k(f) \neq 0\}$. Для любой $\mathcal{M} \in \mathcal{I}$ и $k \in \mathcal{N}$ обозначим

$$\Lambda(k, \mathcal{M}) = \sup_{\substack{p \in P^{(k)}, q \in Q \\ sp(p) \cap sp(q) = \emptyset}} \frac{\|p\|}{\|p+q\|}$$

и

$$\tilde{\Lambda}(k, \mathcal{M}) = \sup_{\substack{p \in \tilde{P}^{(k)}, q \in \tilde{Q}^{(k)} \\ sp(p) \cap sp(q) = \emptyset}} \frac{\|p\|}{\|p+q\|}.$$

Лемма 1.2 *Пусть $f, g \in L^1(0,1)$, $\|f+g\| \neq 0$ и постоянное B определяется из условии*

$$\|f\| = B\|f+g\|. \tag{1.9}$$

Тогда для любого интервала $\Delta = (a,b) \subseteq (0,1)$ справедливо хотья бы одно из следующих неравенств

$$\|f_1^{(\Delta)}\| \geq B\|f_1^{(\Delta)} + g_1^{(\Delta)}\|, \tag{1.10}$$

$$\|f_2^{(\Delta)}\| \geq B\|f_2^{(\Delta)} + g_2^{(\Delta)}\|, \tag{1.11}$$

где функции $f_1^{(\Delta)}, f_2^{(\Delta)}, g_1^{(\Delta)}$ и $g_2^{(\Delta)}$ определяются согласно

$$f_1^{(\Delta)}(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin [\frac{a+b}{2}, b) \\ \\ f(x - \frac{b-a}{2}), & x \in [\frac{a+b}{2}, b) \end{cases},$$

$$g_1^{(\Delta)}(x) = \begin{cases} g(x), & x \notin [\frac{a+b}{2}, b) \\ \\ g(x - \frac{b-a}{2}), & x \in [\frac{a+b}{2}, b) \end{cases},$$

$$f_2^{(\Delta)}(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin [a, \frac{a+b}{2}) \\ \\ f(x + \frac{b-a}{2}), & x \in [a, \frac{a+b}{2}) \end{cases},$$

$$g_2^{(\Delta)}(x) = \begin{cases} g(x), & x \notin [a, \frac{a+b}{2}) \\ \\ g(x + \frac{b-a}{2}), & x \in [a, \frac{a+b}{2}) \end{cases}.$$

Более того, равенства в (1.10) и (1.11) выполняются одновременно.

Доказательство леммы 1.2 Положим $\delta_1 = [a, \frac{a+b}{2})$ и $\delta_2 = [\frac{a+b}{2}, b)$. Ясно, что справедливо хотья бы одно из следующих неравенств

$$\|f\| - \|f\|_{\delta_2} + \|f\|_{\delta_1} \geq B(\|f+g\| - \|f+g\|_{\delta_2} + \|f+g\|_{\delta_1}), \tag{1.12}$$

$$\|f\| + \|f\|_{\delta_2} - \|f\|_{\delta_1} \geq B(\|f+g\| + \|f+g\|_{\delta_2} - \|f+g\|_{\delta_1}). \tag{1.13}$$

Для окончания доказательства остается заметить, что из (1.12) следует (1.10), а из (1.13) следует (1.11). Лемма 1.2 доказана.

Для $f, g \in L^1(0,1)$, $\|f+g\| \neq 0$ положим

$$S(f,g,\Delta) = \begin{cases} (f_1^{(\Delta)}, g_1^{(\Delta)}), & \text{если (1.9) и (1.10) справедливы и } \|f_1^{(\Delta)} + g_1^{(\Delta)}\| \neq 0, \\ \\ (f_2^{(\Delta)}, g_2^{(\Delta)}), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 1.3 *Пусть даны $\mathcal{M} \in \mathcal{I}$, $k \in \mathcal{N}$, $f \in P^{(k)}(\mathcal{M})$ $(f \neq 0)$, $g \in Q^{(k)}(\mathcal{M})$ и $sp(f) \cap sp(g) = \emptyset$. Тогда для всякого $0 \leq i < k$, $1 \leq s \leq 2^{n_i}$ и функций $(f', g') = S(f, g, \Delta_{n_i}^{(s)})$ имеем, что*

1) $f' \in P^{(k)}(\mathcal{M})$ и $g' \in Q^{(k)}(\mathcal{M})$,

2) $sp(f') \cap sp(g') = \emptyset$,

3) $\frac{\|f\|}{\|f+g\|} \leq \frac{\|f'\|}{\|f'+g'\|}$,

4) $\|f'\| > 0$.

Доказательство леммы 1.3 Пункты 1) и 2) непосредственно следуют из определений f' и g', а 4) следует из 3) поскольку $\|f\| > 0$. Поэтому достаточно доказать 3). Имеем, что $\|f\| > 0$ и $sp(f) \cap sp(g) = \emptyset$, следовательно $\|f + g\| > 0$ и мы можем определить постоянное $B > 0$ из (1.9). Если $(f', g') = (f_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})}, g_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})})$ тогда имеем (1.10) и $\|f' + g'\| \neq 0$, следовательно 3) справедливо. Если $(f', g') = (f_2^{(\Delta_{n_i}^{(s)})}, g_2^{(\Delta_{n_i}^{(s)})})$, тогда либо (1.10) не справедливо, либо $\|f_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})} + g_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})}\| = 0$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1. $\|f_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})}\| < B\|f_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})} + g_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})}\|$. Согласно лемме 1.2 имеем, что

$$\|f'\| > B\|f' + g'\|.$$

Это означает, что $\|f'\| > 0$. Поскольку $sp(f') \cap sp(g') = \emptyset$, имеем, что $\|f' + g'\| > 0$ и следовательно

$$\frac{\|f\|}{\|f + g\|} = B < \frac{\|f'\|}{\|f' + g'\|}.$$

2. $\|f_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})} + g_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})}\| = 0$. Ясно, что $sp(f_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})}) \cap sp(g_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})}) = \emptyset$, следовательно $f_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})} = g_1^{(\Delta_{n_i}^{(s)})} = 0$, и

$$f(x) = g(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \notin \Delta_{n_i+1}^{2s}.$$

Итак $\|f'\| = 2\|f\|$ и $\|f' + g'\| = 2\|f + g\| > 0$, следовательно заключаем, что

$$\frac{\|f\|}{\|f + g\|} = \frac{\|f'\|}{\|f' + g'\|}.$$

Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4 *Для всякой* $\mathcal{M} \in \mathcal{I}$ *и* $k \in \mathcal{N}$ *имеет место*

$$\Lambda(k, \mathcal{M}) = \tilde{\Lambda}(k, \mathcal{M}). \tag{1.14}$$

Доказательство леммы 1.4 Равенство (1.14) очевидна, если $P^{(k)}(\mathcal{M}) = \{f \ : \ f = 0\}$. Пусть $p \in P^{(k)}(\mathcal{M})$, $(p \neq 0)$, $q \in Q(\mathcal{M})$ и $sp(p) \cap sp(q) = \emptyset$. Обозначим $\overline{q} = S_{2^{n_k}}(q) \in Q^{(k)}(\mathcal{M})$. Ясно, что

$$sp(p) \cap sp(\overline{q}) = \emptyset, \quad \|p + q\| \geq \|S_{2^{n_k}}(p + q)\| = \|p + \overline{q}\| > 0.$$

Положим

$$(p_0,q_0)=S(S(\dots(S(p,\overline{q},\Delta^{(1)}_{n_{k-1}}),\Delta^{(2)}_{n_{k-1}}),\Delta^{(3)}_{n_{k-1}}),\dots),$$

$$\Delta^{(2^{n_{k-1}})}_{n_{k-1}}),\Delta^{(1)}_{n_{k-2}}),\Delta^{(2)}_{n_{k-2}}),\dots),\Delta^{(2^{n_0})}_{n_0})\dots).$$

Согласно лемме 1.3 имеем, что $sp(p_0)\cap sp(q_0)=\emptyset$ и

$$\frac{\|p\|}{\|p+q\|}\le\frac{\|p\|}{\|p+\overline{q}\|}\le\frac{\|p_0\|}{\|p_0+q_0\|}. \tag{1.15}$$

Заметим, что $p_0\in\tilde{P}^{(k)}(\mathcal{M}),\ q_0\in\tilde{Q}^{(k)}(\mathcal{M})$ и $p_0\neq 0$. Учитывая (1.15) имеем, что

$$\Lambda(k,\mathcal{M})\le\tilde{\Lambda}(k,\mathcal{M}).$$

Но, согласно определений $\Lambda(k,\mathcal{M})$ и $\tilde{\Lambda}(k,\mathcal{M})$ непосредственно следует, что

$$\Lambda(k,\mathcal{M})\ge\tilde{\Lambda}(k,\mathcal{M}).$$

Из двух последних неравенств следует (1.14). Лемма 1.4 доказана.

Подсистемы Хаара как квази-гриди базис

Начнем со следующей леммы

Лемма 1.5 *Пусть $\mathcal{M}\in\mathcal{I}$ удовлетворяет соотношениям (1.6). Тогда для всех $k\in\mathcal{N}$, $p\in\tilde{P}^{(k)}(\mathcal{M})$, $q\in\tilde{Q}^{(k)}(\mathcal{M})$ для которых $sp(p)\cap sp(q)=\emptyset$ и для всякого интервала Хаара $\Delta^{(s)}_{n_i}$, $i=0,1,\dots k$; $s=1,2,\dots,2^{n_i}$ имеем, что*

$$\|p\|_{\Delta^{(s)}_{n_i}}\le 2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1}\|p+q\|_{\Delta^{(s)}_{n_i}}+2 \quad \text{если} \quad p \quad \text{постоянна} \quad \text{на} \quad \Delta^{(s)}_{n_i}, \tag{1.16.1}$$

$$\|p\|_{\Delta^{(s)}_{n_i}}\le 2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1}\|p+q\|_{\Delta^{(s)}_{n_i}}-2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1} \quad \text{если} \quad p \quad \text{не постоянна} \quad \text{на} \quad \Delta^{(s)}_{n_i}. \tag{1.16.2}$$

Доказательство леммы 1.5 Докажем это по индукции по i. Пусть $i=k$. Функция p постоянна на $\Delta^{(s)}_{n_k}$; $s=1,\dots 2^{n_k}$ и следовательно (см. (1.8))

$$\|p\|_{\Delta^{(s)}_{n_k}}\le\|p+q\|_{\Delta^{(s)}_{n_k}}+\|q\|_{\Delta^{(s)}_{n_k}}<$$

$$< \|p+q\|_{\Delta^{(s)}_{n_k}} + 1 < 2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1}\|p+q\|_{\Delta^{(s)}_{n_k}} + 2.$$

Допустим, что (1.16.1) и (1.16.2) справедливы для некоторой $1 \le i \le k$ и докажем для $i-1$. Если p постоянна на $\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}$, то, учитывая свойство монотонности системы Хаара, имеем, что

$$\|p\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} \le \|p + S_{2^{n_{i-1}}}(q)\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} + \|S_{2^{n_{i-1}}}(q)\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} <$$

$$< \|p + S_{2^{n_{i-1}}}(q)\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} + 1 \le \|p+q\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} + 1 < 2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1}\|p+q\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} + 2.$$

Рассмотрим случай, когда p не постоянна на $\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}$. Заметим, что

$$\Delta^{(s)}_{n_{i-1}} = \Delta^{(2^{n_i-n_{i-1}}(s-1)+1)}_{n_i} \cup \Delta^{(2^{n_i-n_{i-1}}(s-1)+2)}_{n_i} \cup \ldots \cup \Delta^{(2^{n_i-n_{i-1}}s)}_{n_i}. \quad (1.17)$$

Поскольку $p \in \tilde{P}^{(k)}(\mathcal{M})$, количество интервалов в правой части (1.17), на которых $p \ne const$ является четным числом. Обозначим это значение через $2d$. Если $d \ne 0$ то для некоторых $2d$ интервалах правой части (1.17) справедливо (1.16.2). На остальных $2^{n_i-n_{i-1}} - 2d$ интервалах будет справедлива (1.16.1). Суммируя все эти неравенства заключаем, что

$$\|p\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} \le 2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1}\|p+q\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} - 2d\cdot 2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1} + 2(2^{n_i-n_{i-1}} - 2d) <$$

$$< 2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1}\|p+q\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} - 2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1},$$

следовательно (1.16.2) справедливо для $i-1$.

Осталось рассмотреть случай, когда $d = 0$ (p постоянна на всех интервалах правой части (1.17)). Заметим, что p не постоянна на интервалах $\Delta^{(2s-1)}_{n_{i-1}+1}$ и $\Delta^{(2s)}_{n_{i-1}+1}$. Поскольку $p \in \tilde{P}^{(k)}(\mathcal{M})$ и $sp(p) \cap sp(q) = \emptyset$, согласно лемме 1.1 будем иметь, что

$$\|p+q\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} = \|p+q\|_{\Delta^{(2s-1)}_{n_{i-1}+1}} + \|p+q\|_{\Delta^{(2s)}_{n_{i-1}+1}} \ge 2 \quad (1.18)$$

С другой стороны (см. (1.8)),

$$\|S_{2^{n_i}}(q)\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} \le \|S_{2^{n_{i-1}}}(q)\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} + \|S_{2^{n_i}}(q) - S_{2^{n_{i-1}}}(q)\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} <$$

$$< 1 + \|S_{2^{n_i}}(q) - S_{2^{n_{i-1}}}(q)\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} \le 1 + (2 + 2^2 + \ldots + 2^{n_i - n_{i-1} - 1}) \le 2^{H(\overline{\mathcal{M}})} - 1. \quad (1.19)$$

Из (1.18) и (1.19) заключаем, что

$$2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1}\|p+q\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} - \|p\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} \ge (2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1} - 1)\|p+q\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} + \|p + S_{2^{n_i}}(q)\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} -$$

$$-\|p\|_{\Delta^{(s)}_{n_{i-1}}} \ge 2(2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1} - 1) - (2^{H(\overline{\mathcal{M}})} - 1) \ge 2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1}.$$

Лемма 1.5 доказана.

Эквивалентность соотношений 1) и 4) теоремы 1.1 *1)⇒ 4).* Пусть $H(\overline{\mathcal{M}}) = +\infty$ или $\#\overline{\mathcal{M}} < +\infty$. Тогда для любого натурального числа B можем найти $m \in \mathcal{N}$ такое, что $\{m+1, m+2, \ldots, m+2B\} \subset \mathcal{M}$. Для функции $f = \sum_{k=m+1}^{m+2B} \chi_k^{(1)} \in L[\mathcal{M}]$ имеем, что

$$\|f\| = 2 - 2^{1-2B} < 2.$$

С другой стороны, если $\varrho \in D(f)$ такое, что

$$G_B(f, \chi, \varrho) = \sum_{s=1}^{B} \chi^{(1)}_{m+2s},$$

то $\|G_B(f, \chi, \varrho)\| > B/4$.

4)⇒ 1). Пусть $H(\overline{\mathcal{M}}) < +\infty$ и $\#\overline{\mathcal{M}} = +\infty$. Выберем любую функцию $f \in L[\mathcal{M}]$, $\varrho \in D(f)$ и $m \in \mathcal{N}$. Если $G_m(f) = f$, то $\|G_m(f)\| = \|f\|$. Если $G_m(f) \ne f$ то $c_{k_m}(f, \chi) \ne 0$, поэтому можем полагать $p = \frac{G_m(f,\chi,\varrho)}{c_{k_m}(f,\chi)}$ и $q = \frac{f - G_m(f,\chi,\varrho)}{c_{k_m}(f,\chi)}$. Ясно, что $sp(p) \cap sp(q) = \emptyset$, $q \in Q(\mathcal{M})$ и $p \in P^{(\alpha)}(\mathcal{M})$ при некотором α. Отсюда имеем, что

$$\frac{\|G_m(f)\|}{\|f\|} = \frac{\|p\|}{\|p+q\|} \le \Lambda(\alpha, \mathcal{M}).$$

Применяя (1.16.2) при $i = 0$ и $s = 1$ заключаем, что

$$\tilde{\Lambda}(\alpha, \mathcal{M}) < 2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1},$$

и согласно лемме 1.4

$$\|G_m(f)\| \leq 2^{H(\overline{\mathcal{M}})+1}\|f\|.$$

Эквивалентность 1) и 4) доказана.

Подсистема Хаара как демократический базис

Пусть дан $\mathcal{M} \in \mathcal{I}$ ($\#\overline{\mathcal{M}} = +\infty$) и $\overline{\mathcal{M}} = \{n_0, n_1, n_2, \ldots\}$. Для любого $n \in \mathcal{N}$ можем однозначным образом определить $i \geq 0$ и $1 \leq s \leq 2^{n_i+1}$ из условии $n = 2^{n_0+1} + 2^{n_1+1} + \ldots + 2^{n_{i-1}+1} + s$. Определим множество

$$\Gamma_n(\mathcal{M}) = \Gamma_i^{(s)}(\mathcal{M}) = \{k \in \mathcal{N} \quad : \quad \chi_k = \chi_\alpha^{(\beta)};\ \ n_i < \alpha < n_{i+1};\ supp(\chi_\alpha^{(\beta)}) \subseteq supp(\chi_{n_i+1}^{(s)})\}.$$

Заметим, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(\mathcal{M}) = \Theta[\mathcal{M}]$. Для любой функции $f \in L^1(0,1)$ определим Γ-спектр функции f следующим образом

$$sp\Gamma(\mathcal{M}, f) = \{n \in \mathcal{N} \quad : \quad \Gamma_n(\mathcal{M}) \cap sp(f) \neq \emptyset\}$$

Для любого множества натуральных чисел Λ обозначим

$$Id_\Lambda = \sum_{k \in \Lambda} \chi_k.$$

Лемма 1.6 *Пусть P конечное мноество натуральных чисел. Тогда*

$$\|Id_P\| \geq \frac{\#sp\Gamma(\mathcal{M}, Id_P)}{2}. \tag{1.20}$$

Доказательство леммы 1.6 Докажем это по индукции по $\#sp\Gamma(\mathcal{M}, Id_P)$. Согласно лемме 1.1 при $\#sp\Gamma(\mathcal{M}, Id_P) = 1$ имеем, что

$$\|Id_P\| \geq 1 > \frac{\#sp\Gamma(\mathcal{M}, Id_P)}{2}.$$

Допустим, что (1.20) справедливо, если $\#sp\Gamma(\mathcal{M}, Id_P) \le i$ и пусть P любое множество натуральных чисел, для которого $\#sp\Gamma(\mathcal{M}, Id_P) = i+1$. Определим α и s из соотношения $\Gamma_\alpha^{(s)} = \Gamma_{\max sp\Gamma(\mathcal{M},P)}$ и положим

$$\overline{P} = P \setminus \Gamma_\alpha^{(s)}.$$

Ясно, что $\#sp\Gamma(\mathcal{M}, Id_{\overline{P}}) = i$ и следовательно

$$\|Id_{\overline{P}}\| \ge \frac{i}{2}. \tag{1.21}$$

Вне множества $\Delta_{n_\alpha+1}^{(s)}$ полиномы Id_P и $Id_{\overline{P}}$ совпадают и на $\Delta_{n_\alpha+1}^{(s)}$ полином $Id_{\overline{P}}$ постоянен. Обозначим это значение через H. ясно, что

$$\mid H \mid \le 2^{n_\alpha-1} + 2^{n_\alpha-2} + \ldots + 2^2 + 2 < 2^{n_\alpha},$$

следовательно

$$\|Id_{\overline{P}}\|_{\Delta_{n_\alpha+1}^{(s)}} \le \mid H \mid \cdot m(\Delta_{n_\alpha+1}^{(s)}) < \frac{1}{2}. \tag{1.22}$$

Согласно лемме 1.1 для полинома P имеем, что

$$\|Id_P\|_{\Delta_{n_\alpha+1}^{(s)}} \ge 1. \tag{1.23}$$

Из (1.21)-(1.23) следует, что

$$\|Id_P\| = \|Id_{\overline{P}}\| - \|Id_{\overline{P}}\|_{\Delta_{n_\alpha+1}^{(s)}} + \|Id_P\|_{\Delta_{n_\alpha+1}^{(s)}} > \frac{i+1}{2}.$$

Лемма 1.6 доказана.

Эквивалентность соотношений 2) и 4) теоремы 1.1 *2)⇒ 4).* Пусть $H(\overline{\mathcal{M}}) = +\infty$ или $\#\overline{\mathcal{M}} < +\infty$. Тогда для всякого натурального B можно найти $m \in \mathcal{N}$ такое, что $\{m+1, m+2, \ldots, m+2B\} \subset \mathcal{M}$. Следовательно имеем, что

$$\|\sum_{k=m+1}^{m+2B} \chi_k^{(1)}\| < 2 \qquad \text{и} \qquad \|\sum_{k=m+1}^{m+2B} \chi_k^{(2)}\| = 2B,$$

т. е. система $\Theta[\mathcal{M}]$ не демократична.

4)⇒ 2). Пусть $H(\overline{\mathcal{M}}) < +\infty$ и $\#\overline{\mathcal{M}} = +\infty$. Заметим, что

$$\#\Gamma_i^{(s)}(\mathcal{M}) = 2^{n_{i+1}-n_i-1} - 1 < 2^{H(\overline{\mathcal{M}})-1} \text{ для всех } s = 1, 2, \ldots, 2^{n_i+1};\ i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Согласно лемме 1.6 для всякого конечного множества P натуральных чисел имеем, что

$$\|Id_P\| \geq \frac{\#sp\Gamma(\mathcal{M}, Id_P)}{2} > \frac{\#P}{2^{H(\overline{\mathcal{M}})}}.$$

С другой стороны

$$\|Id_P\| \leq \#P.$$

Итак, для всякого конечного множества P натуральных чисел имеем, что

$$\frac{\#P}{2^{H(\overline{\mathcal{M}})}} \leq \|\sum_{i\in P} \chi_i\| \leq \#P,$$

т. е. $\Theta[\mathcal{M}]$ демократична. Теорема 1.1 доказана.

Системы типа Хаара

Для всякого интервала $\delta \subseteq (0,1)$ положим

$$\chi(\delta, x) = \begin{cases} \frac{1}{m(\delta)} \quad , & \text{если } x \in \delta, \\ \\ 0 \quad , & \text{для остальных} \quad x. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ система типа Хаара, соответствующая $\mathcal{T}$. Согласно определению системы Хаара имеем, что

$$\begin{aligned} \chi(\Delta_{i+1}^{(2j-1)}) &= \chi(\Delta_i^{(j)}) + \tfrac{2m(\Delta_{i+1}^{(2j)})}{m(\Delta_i^{(j)})} h_i^{(j)}, \\ \chi(\Delta_{i+1}^{(2j)}) &= \chi(\Delta_i^{(j)}) - \tfrac{2m(\Delta_{i+1}^{(2j-1)})}{m(\Delta_i^{(j)})} h_i^{(j)}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Отсюда следует, что

$$\mid c_i^{(j)}(\chi(\Delta_{i+1}^{(\tilde{j})})) \mid \geq 1, \text{ если } \ m(\Delta_{i+1}^{(\tilde{j})}) \leq \frac{m(\Delta_i^{(j)})}{2}, \tag{1.25}$$

$$\mid c_i^{(j)}(\chi(\Delta_{i+1}^{(\tilde{j})})) \mid \leq 1, \text{ если } \ m(\Delta_{i+1}^{(\tilde{j})}) \geq \frac{m(\Delta_i^{(j)})}{2},$$

где $\tilde{j} = 2j-1, 2j$, и $c_i^{(j)}(f) = c_{2^i+j}(f)$ есть коэффициент при $h_i^{(j)}$ в разложении функции f по системе $\{h_i^{(j)}\}$.

Доказательство теоремы 1.2 Пусть $k_0 = 0,\ j_0 = 1$. Для всякого $i = 0, 1, 2, \ldots$ определим k_{i+1} и $j_{k_i+1}, \ldots, j_{k_{i+1}}$ из условий

$$\Delta_{k_i}^{(j_{k_i})} \supset \Delta_{k_i+1}^{(j_{k_i+1})} \supset \ldots \supset \Delta_{k_{i+1}-1}^{(j_{k_{i+1}-1})} \supset \Delta_{k_{i+1}}^{(j_{k_{i+1}})},$$

$$m(\Delta_{k_{i+1}-2}^{(j_{k_{i+1}-2})}) \geq \frac{m(\Delta_{k_i}^{(j_{k_i})})}{2} \text{ и } m(\Delta_{k_{i+1}-1}^{(j_{k_{i+1}-1})}) < \frac{m(\Delta_{k_i}^{(j_{k_i})})}{2}, \tag{1.26}$$

$$m(\Delta_{s+1}^{(j_{s+1})}) \geq \frac{m(\Delta_s^{(j_s)})}{2} \text{ для } s = k_i, \ldots, k_{i+1} - 2, \tag{1.27}$$

$$m(\Delta_{k_{i+1}}^{(j_{k_{i+1}})}) \leq \frac{m(\Delta_{k_{i+1}-1}^{(j_{k_{i+1}-1})})}{2}. \tag{1.28}$$

Рассмотрим функцию

$$F_s = \chi(\Delta_{k_s}^{(j_{k_s})}),$$

где s произвольное натуральное число. Из (1.24) заключаем, что

$$F_s = \sum_{i=0}^{k_s-1} c_i^{(j_i)} h_i^{(j_i)} + h_1.$$

Согласно (1.25),(1.27) и (1.28) имеем, что

$$| \, c_{k_i-1}^{(j_{k_i-1})}(F_s) \, | \geq 1 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{1.29}$$

и

$$| \, c_m^{(j_m)}(F_s) \, | \leq 1 \quad \text{для} \quad m \neq k_1 - 1, k_2 - 1, \ldots, k_s - 1.$$

Итак, для некоторого $\varrho \in D(F_s)$ имеем, что

$$G_s(F_s, \mathcal{H}_{\mathcal{T}}, \varrho) = \sum_{i=1}^{s} c_{k_i-1}^{j_{k_i-1}}(F_s) \cdot h_{k_i-1}^{(j_{k_i-1})},$$

и учитывая (1.26) и (1.29) заключаем, что

$$\|G_s(F_s)\| \geq \frac{s}{4}.$$

Заметим также, что

$$\|F_s\| = \|\chi(\Delta_{k_s}^{(j_{k_s})})\| = 1$$

Из двух последних неравенств, в силу произвольности s, следует, что система $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ не является квази-гриди базисом в $L^1(0,1)$. Теорема 1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.3 Пусть $\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ система типа Хаара определяемая из соотношений

$$m(\Delta_{2i+1}^{(2j-1)}) = m(\Delta_{2i+1}^{(2j)}) \quad \text{для всех} \;\; j = 1, 2, \ldots, 2^{2i}; \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.30}$$

$$m(\Delta_{2i}^{(2j-1)}) = 2^i m(\Delta_{2i}^{(2j)}) \quad \text{для всех} \;\; j = 1, 2, \ldots, 2^{2i-1}; \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Пусть C произвольное натуральное число. Из соотношений (1.24) и (1.30) следует, что

$$\chi(\Delta_{2C+1}^{(1)}) = \sum_{i=1}^{C} h_{2i}^{(1)} + \sum_{i=1}^{C} \frac{2h_{2i-1}^{(1)}}{2^i + 1} + h_2 + h_1,$$

следовательно, для функции $f = \sum_{i=1}^{C} h_{2i}^{(1)}$ имеем, что

$$\|f\| \leq 2 + \sum_{i=1}^{C} \frac{2}{2^i + 1} + \|\chi(\Delta_{2C+1}^{(1)})\| < 4 + \|\chi(\Delta_{2C+1}^{(1)})\| = 5.$$

Заметим, что для некоторого $\varrho \in D(f)$

$$G_{C/2}(f) = \| \sum_{i=1}^{C/2} h_{4i}^{(1)} \|.$$

Легко проверить, что $\|G_{C/2}(f)\| \geq C/8$. Для завершения доказательства остается заметить, что $f \in L[\mathcal{T}, \mathcal{M}]$, где $\mathcal{M} = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Теорема 1.3 доказана.

§ 2 Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и исправления функций

Идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Н. Лузину. Им в 1912 г. был получен следующий знаменитый результат (см. [20]).

Теорема A(C- свойство Н. Н. Лузина). *Для любой измеримой, почти всюду конечной на [0,1] функции f и для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество E с мерой $\mid E \mid> 1-\epsilon$ и непрерывная на [0,1] функция g, совпадающая с f на E.*

В 1939г. Д.Е.Меньшов [21] доказал следующую фундаментальную теорему

Теорема B (Усиленное C- свойство Д.Е.Меньшова). *Пусть f измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 2\pi]$. Каково бы не было $\epsilon > 0$, можно определить непрерывную функцию g, совпадающую с f на некотором множестве E, $|E| > 2\pi - \epsilon$ и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.*

Далее в этом направлении интересные результаты получены А. А. Талаляном [22], Ф. Г. Арутюняном [23], О. Д. Церетели [24], У. Прайсом [25], К. И. Осколковым [26], Б. С. Кашином [27-28], К. С. Казаряном [29-30], Р. И. Осиповым [31], М. Г. Григоряном [30,32-36] и другими авторами (см. [30], [37]-[41]).

В этом параграфе мы изучим некоторые вопросы о поведении жадного алгоритма по системе Хаара, после исправления функции. Для этого напомним определение жадного алгоритма.

Пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ нормированный базис в банаховом пространстве X. Для каждого $f \in X$ будем иметь разложение

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f, \Psi)\psi_k.$$

Пусть $\mathcal{S} \subset N$ некоторое бесконечное подмножество натуральных чисел. Положим $\Psi_{\mathcal{S}} = \{\psi_k\}_{k\in\mathcal{S}}$. Пусть $\varrho = \{\varrho(k)\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая перестановка чисел множества $\mathcal{S}$, для которой имеет место

$$| c_{\varrho(k+1)}(f,\Psi) |_X \leq | c_{\varrho(k)}(f,\Psi) |_X \quad \text{для всех натуральных} \quad k.$$

Множество всех таких перестановок обозначим через $D(f,\Psi_{\mathcal{S}})$. Когда имеют место строгие неравенства, то $D(f,\Psi_{\mathcal{S}})$ содержит только один элемент $\{\varrho(k)\}$.

Для каждой функции $f \in X$ и для любого элемента $\varrho = \{\varrho(k)\} \in D(f,\Psi_{\mathcal{S}})$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f,\Psi_{\mathcal{S}},\varrho)\}_{m=1}^{\infty}$, следующим образом

$$G_m(f) = G_m(f,\Psi_{\mathcal{S}}) = G_m(f,\Psi_{\mathcal{S}},\varrho) = \sum_{k=1}^{m} c_{\varrho(k)}(f,\Psi)\Psi_{\varrho(k)}.$$

Заметим, что при $\mathcal{S} = N$ будем иметь $G_m(f,\Psi)$. Метод приближения элемента $f \in X$ последовательностью $\{G_m(f,\Psi)\}_{m=1}^{\infty}$ называется жадным алгоритмом по системе Ψ (подробно об этом см. обзорную статью В. Н. Темлякова [1]). Говорят, что жадный алгоритм элемента f по системе Ψ сходится в X, если при некотором $\varrho \in D(f,\Psi)$ имеет место

$$\lim_{m\to\infty} \|G_m(f,\Psi,\varrho) - f\|_X = 0.$$

Жадные алгоритмы для банаховых пространств изучены Р. ДеВором [2], В. Н. Темляковым [2-7], П. Войтащиком [8-9], С.В. Конягином [7], М. Г. Гри-горяном [13-14] и другими авторами (см. [6],[9-12], [15-19]). В работе [8] доказана следующая теорема.

Теорема (П. Войтащик). *Пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ базис в банаховом пространстве X. Для того, чтобы жадный алгоритм для всех элементов из X сходился в X, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная $C > 0$ такая, что для каждого элемента $f \in X$ и для любых $\varrho \in D(f,\Psi)$ и $m \in N$ выполнялось неравенство*

$$\|G_m(f,\Psi,\varrho)\|_X \leq C \cdot \|f\|_X.$$

Обозначим

$$V[0] = \{1,2\} \quad \text{и} \quad V[p] = \{2^p+1, 2^p+2, \dots, 2^{p+1}\} \quad \text{при} \quad p = 1,2,\dots.$$

Ниже под выражением $\|f\|_\Delta$ будем подразумевать $L^1(0,1)$ норму функции f на множестве Δ и напишем $\|f\|$, если $\Delta = (0,1)$. А под выражением $\|f\|_2$ будем подразумевать $L^2(0,1)$ норму функции f.

Хорошо известно, что система Хаара $\chi = \{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $L^1(0,1)$ (см. например [44]). Коэффициенты разложения $c_n(f,\chi)$ будут определяться по формулам

$$c_n(f,\chi) = \frac{1}{\left(\|\chi_n\|_2\right)^2} \int_0^1 f(t)\chi_n(t)dt$$

(здесь система Хаара нормирована в $L^1(0,1)$). В наших дальнейших рассуждениях будем считать, что последовательность целых чисел $M = \{M_s\}_{s=1}^{\infty}$ фиксирована и удовлетворяет условиям

$$0 \le M_1 < M_2 \le M_3 < M_4 \le \ldots < M_{2s-2} \le M_{2s-1} < M_{2s} \ldots$$

и

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}(M_{2s} - M_{2s-1}) = +\infty.$$

Определим возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(M) = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} = \{n \in V[p] \quad : \quad M_{2s-1} \le p < M_{2s}, \quad s = 1,2,\ldots\}.$$

где множества $V[p]$ определяются согласно (1.3). Положим $\chi_{\mathcal{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

В работе [9] доказана, что жадный алгоритм в $L^1(0,1)$ по системе Хаара сходится не для всех функций из $L^1(0,1)$, т. е. (по теореме A) каково бы не было положительное число C, существуют функция $f \in L^1(0,1)$, перестановка $\varrho \in D(f,\chi)$ и натуральное число m такие, что

$$\|G_m(f,\chi,\varrho)\| > C\|f\|.$$

Оказывается, что этот результат может быть усилен следующим образом

Теорема 2.1 *Для любого множества $E \subset [0,1]$ с мерой $0 <| E |\le 1$ существуют функция $f \in L^1(0,1)$ и перестановка $\varrho \in D(f,\chi)$ такие, что*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\|G_m(f,\chi,\varrho)\|_E = +\infty.$$

Естественен вопрос: существует ли измеримое множество e сколь угодно малой меры такое, что при некотором положительном C, после изменения значений любой функции $f \in L^1(0,1)$ на e, операторы $G_m(\tilde{f}, \chi, \varrho)$ для вновь полученной функции $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ удовлетворяли условиям

$$\|G_m(\tilde{f}, \chi, \varrho)\| \leq C\|f\|, \quad \text{для всех} \;\; m \geq 1, \;\; \varrho \in D(\tilde{f}, \chi).$$

В настоящем параграфе доказывается, что поставленный вопрос имеет положительный ответ. Верна следующая теорема

Теорема 2.2 *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E, и члены разложения $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\tilde{f}, \chi)\chi_n$ функции $\tilde{f}$ по системе Хаара можно переставить так, чтобы для всех натуральных m выполнялись соотношения*

$$1) \; c_{\varrho(m)}(\tilde{f}, \chi) \; > \; c_{\varrho(m+1)}(\tilde{f}, \chi),$$

$$2) \; \|G_m(\tilde{f}, \chi)\| \; \leq \; 3\|\tilde{f}\| \leq 12\|f\|,$$

$$3) \; \lim_{m \to \infty} \|G_m(\tilde{f}, \chi) - \tilde{f}\| = 0.$$

В связи с первым утверждением теоремы 2.2 отметим, что исправленную функцию $\tilde{f}$ невозможно выбрать так, чтобы

$$c_m(\tilde{f}, \chi) \; \geq \; c_{m+1}(\tilde{f}, \chi), \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Более того, верна следующая теорема

Теорема 2.3 *Каково бы не было измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $0 <| E |< 1$ существует функция $f_0 \in L^1(0,1)$ такая, что если некоторая функция $f \in L^1(0,1)$ совпадает с f_0 на E, то последовательность $\{| c_n(f, \chi) |\}_{n=1}^{\infty}$ не может быть монотонно убывающей.*

Вместе с тем имеет место

Теорема 2.4 *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E, такое, что все ненулевые члены в последовательности $\{c_n(\tilde{f}, \chi)\}$ расположены в убывающем порядке.*

Эта теорема следует из более общей теоремы

Теорема 2.5 *Пусть $\{\varphi_k\} = \chi_{\mathcal{S}}$ (см. (1.4),(1.5)) подсистема системы Хаара. Тогда для любого $0 < \epsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1-\epsilon$ и ряд вида*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i, \quad \text{с} \quad a_i \searrow 0,$$

такие, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E и ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i a_i \varphi_i; \quad \text{где} \ \ \delta_i = 0 \quad \text{или} \ \ 1,$$

который сходится к $\tilde{f}$ в $L^1(0,1)$.

Следствие 2.1 *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(E)$ существует ряд вида*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{k_i} \quad \text{где} \quad a_i \searrow 0 \quad \text{и} \quad k_1 < k_2 < \dots,$$

который сходится к f по норме $L^1(E)$.

Замечание. *Необходимо отметить, что в теоремах А и Б "исключительное"множество $e = [0,1] \setminus E$, на котором происходит изменение функции f, зависит от функции, а в теоремах 2.1-2.6 множество E универсально (не зависит от функции).*

В этом параграфе для подсистемы $\chi_{\mathcal{S}}$ доказывается

Теорема 2.6 *Пусть $\chi_{\mathcal{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ подсистема (см. (1.4),(1.5)) системы Хаара. Тогда для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию*

$\tilde{f} \in L^1(0,1)$ *совпадающую с* f *на* E *для которой*

$$\|G_m(\tilde{f}, \chi_{\mathcal{S}})\| \ \leq \ 3\|\tilde{f}\| \leq 12\|f\|, \quad \text{для всех натуральных } m,$$

и

$$\lim_{m\to\infty} \|G_m(\tilde{f}, \chi_{\mathcal{S}}) - \tilde{f}\| = 0.$$

В связи с этой теоремой отметим, что какова бы не была подсистема $\chi_{\mathcal{S}}$ (см. (1.4),(1.5)) системы Хаара, существует функция $f \in \overline{span(\chi_{\mathcal{S}})}$, ($\overline{span(\chi_{\mathcal{S}})}$ - замыкание линейной оболочки подсистемы $\chi_{\mathcal{S}}$ в $L^1(0,1)$), жадный алгоритм которой не сходится в $L^1(0,1)$ по системе Хаара. Это следует из теоремы 1.1.

Теорему, аналогичную к 2.2 для тригонометрической системы доказал М. Г. Григорян в работе [13]. А именно

Теорема С(М. Г. Григорян). *Для любого* $0 < \epsilon < 1$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $\mid E \mid > 1-\epsilon$ *такое, что для каждой функции* $f \in L^1(0,1)$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, *совпадающую с* f *на* E, *и члены разложения* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\tilde{f})\varphi_n$ *функции* $\tilde{f}$ *по тригонометрической системе* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *можно переставить так, чтобы для всех натуральных m выполнялись соотношения*

$$1) \quad \mid a_{\sigma(m)}(\tilde{f}) \mid > \mid a_{\sigma(m+1)}(\tilde{f}) \mid,$$

и

$$2) \quad \lim_{m\to\infty} \| \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)}(\tilde{f})\varphi_{\sigma(k)} - \tilde{f}\| = 0.$$

Отметим, что в теореме 2.2 все коэффициенты $\{c_n(\tilde{f}, \chi)\}_{n=1}^{\infty}$ положительны, а в доказательстве теоремы С не видно, можно ли исправленную функцию выбрать таким образом, чтобы ее коэффициенты по тригонометрической системе были положительны.

Доказательства основных лемм

Лемма 2.1 *Пусть даны числа* $N_0 \in \mathcal{N}$, $\gamma \neq 0$, $\delta > 0$, ν, $q \geq 1$ *и двоичный интервал* $\Delta = (\frac{i-1}{2^\nu}, \frac{i}{2^\nu})$, $i \in [1; 2^\nu]$. *Тогда существуют измеримое множество* $E \subset \Delta$ *и полином* Q *по подсистеме* $\chi_{\mathcal{S}} = \{\chi_{n_k}\} = \{\varphi_k\}$ *Хаара вида*

$$Q = \sum_{k=N_0}^{N} a_k \varphi_k = a \sum_{i=1}^{n} \varphi_{k_i} \quad \text{где} \quad a_k \geq 0, \quad a > 0 \quad \text{и}$$

$$N_0 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n \leq N,$$

такие, что

1) $\mid E \mid \geq (1 - 2^{-q}) \mid \Delta \mid$,

2) $Q = \begin{cases} \gamma & : \quad \text{на } E \\ \\ 0 & : \quad \text{вне } \Delta \end{cases}$,

3) $\int_0^1 \mid Q(x) \mid dx = 2 \mid \gamma \mid \cdot \mid \Delta \mid (1 - 2^{-q})$,

4) $\sum_{k=N_0}^{N} \left(a_k \|\varphi_k\|_2 \right)^2 < 2^q \gamma^2 \mid \Delta \mid$ и $0 < a_{k_i} = a < \delta$, при $1 \leq i \leq n$.

Доказательство леммы 2.1 Пусть

$$\mathcal{I}_1(x) = \begin{cases} 1 & : \quad \text{при } x \in [0, 1 - \frac{1}{2^q}), \\ \\ 1 - 2^q : & \quad \text{при } x \in [1 - \frac{1}{2^q}, 1), \end{cases}$$

и

$$\mathcal{I}_2(x) = \begin{cases} 1 & : \quad \text{при } x \in [\frac{1}{2^q}, 1), \\ \\ 1 - 2^q : & \quad \text{при } x \in [0, \frac{1}{2^q} \end{cases} . \tag{2.1}$$

Функции $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ продолжим с периодом 1 с $[0, 1)$ на всю ось. Очевидно, что

$$\int_0^1 \mathcal{I}_1(x) dx = \int_0^1 \mathcal{I}_2(x) dx = 0. \tag{2.2}$$

Возьмем натуральное число j настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$M_{2j-1} > \left| log_2 \frac{|\gamma|}{\delta} \right| + log_2 N_0 + \nu, \qquad \text{и} \qquad M_{2j} - M_{2j-1} > q + \nu + 2 \qquad (\text{см. } (1.4)). \tag{2.3}$$

Положим

$$m = M_{2j} - q - 2, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \gamma \cdot \mathcal{I}_1(2^m x) \cdot \chi_\Delta(x) \\ Q_2(x) &= \gamma \cdot \mathcal{I}_2(2^m x) \cdot \chi_\Delta(x), \end{aligned} \tag{2.5}$$

(здесь χ_Δ характеристическая функция множества Δ) и

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \Delta \quad : \quad Q_1(x) = \gamma\} \\ E_2 &= \{x \in \Delta \quad : \quad Q_2(x) = \gamma\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

В силу (2.1),(2.5) и (2.6) заключаем, что

$$| E_1 | = | E_2 | = (1 - \frac{1}{2^q}) | \Delta |,$$

Определим множество E и функцию Q следующим образом

$$E = \begin{cases} E_1 & : \quad \text{если} \quad \gamma > 0, \\ \\ E_2 & : \quad \text{если} \quad \gamma < 0. \end{cases} \qquad \text{и} \quad Q = \begin{cases} Q_1 & : \quad \text{если} \quad \gamma > 0, \\ \\ Q_2 & : \quad \text{если} \quad \gamma < 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

В силу (2.1)-(2.5) имеем, что

$$a_s^{(i)}(Q, \chi) = \frac{1}{\left(\|\chi_s^{(i)}\|_2\right)^2} \int_0^1 Q(t)\chi_s^{(i)}(t)dt = 0, \quad \text{при } s \notin [M_{2j-1}, M_{2j}) \quad \text{и} \quad 1 \le i \le 2^s,$$

т. е. Q есть полином по системе $\chi_{\mathcal{S}}$. Ясно, что множество E и полином

$$Q = \sum_{s=M_{2j-1}}^{M_{2j}-1} \sum_{i=1}^{2^s} a_s^{(i)} \chi_s^{(i)} = \sum_{n=N_0}^{N} a_n \varphi_n$$

удовлетворяют требованиям 1) и 2) леммы. При $s \in [M_{2j-1}, M_{2j})$ имеем, что

$$a_s^{(i)}(Q_1) = \begin{cases} 0 & : \quad \text{если} \ \int_{\Delta_s^{(i)}} Q_1(t)\chi_s^{(i)}(t)dt = 0 \\ \\ 2^{-m}\gamma & : \quad \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$a_s^{(i)}(Q_2)=\begin{cases}0 & : \text{ если } \int_{\Delta_s^{(i)}} Q_2(t)\chi_s^{(i)}(t)dt=0\\ \\ -2^{-m}\gamma & : \quad \text{в противном случае,}\end{cases}$$

следовательно, учитывая (2.7) можем утверждать, что все ненулевые коэффициенты a_{k_i} полинома Q равны между собой и из (2.3) и (2.4) получим, что

$$0<a_{k_i}(Q)=a=2^{-m}\mid\gamma\mid<2^{-M_{2j-1}}\mid\gamma\mid<\delta.$$

Заметим, что (см. (2.1),(2.4) и (2.7))

$$\int_0^1\mid Q(x)\mid dx=\int_\Delta\mid Q(x)\mid dx=$$

$$=\mid\gamma\mid\cdot(1-\frac{1}{2^q})\mid\Delta\mid+\mid\gamma\mid(2^q-1)\frac{\mid\Delta\mid}{2^q}=2\mid\gamma\mid\cdot\mid\Delta\mid(1-\frac{1}{2^q}),$$

следовательно, имеем утверждение 3) леммы. Для окончания доказательства остается заметить, что

$$\sum_{k=N_0}^{N}\left(a_k\|\varphi_k\|_2\right)^2=\int_0^1 Q^2(x)dx=\gamma^2(1-\frac{1}{2^q})\mid\Delta\mid+(2^q-1)^2\gamma^2\frac{1}{2^q}\mid\Delta\mid<2^q\gamma^2\mid\Delta\mid.$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2 *Пусть даны подсистема* $\chi_{\mathcal{S}}=\{\chi_{n_k}\}=\{\varphi_k\}$, *числа* $\gamma\neq0$, $\epsilon\in(0,1)$, $\delta>0, N_0\in\mathcal{N}$ *и двоичный интервал* $\Delta=(\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n})$ $i\in[1;2^n]$, $n=0,1,2,\ldots$. *Тогда существуют измеримое множество* $E\subset\Delta$, *функция* $g\in L^1(0,1)$, *полином* Q *вида*

$$Q=\sum_{k=N_0}^{N}a_k\varphi_k \qquad \text{где} \quad a_k>0 \quad \text{для всех} \quad N_0\leq k\leq N,$$

и перестановка $\{\sigma(k)\}_{k=N_0}^{N}$ *натуральных чисел* $N_0,\ldots,N$ *удовлетворяющие условиям*

1) $\mid E\mid>(1-\epsilon)\mid\Delta\mid,$

2) $g = \begin{cases} \gamma & : \quad \text{на } E \\ & \\ 0 & : \quad \text{вне } \Delta \end{cases},$

3) $\mid \gamma \mid \cdot \mid \Delta \mid \leq \int_0^1 \mid g(x) \mid dx < (2-\epsilon) \mid \gamma \mid \cdot \mid \Delta \mid,$

4) $\int_0^1 \mid g(x) - Q(x) \mid dx < \delta,$

5) $\delta > a_{\sigma(N_0)} > a_{\sigma(N_0+1)} > \ldots > a_{\sigma(N)} > 0; \ \ \sum_{k=N_0}^N \left(a_k \|\varphi_k\|_2 \right)^{2+\epsilon} < \delta^{2+\epsilon},$

6) $\max_{N_0 \leq m \leq N} \int_0^1 \mid \sum_{k=N_0}^m a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \mid dx \leq 2 \mid \gamma \mid \left(\frac{|\Delta|}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}}.$

Доказательство леммы 2.2 Разделим интервал Δ на 2^{ν_0} равных интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{2^{\nu_0}}$, где значение ν_0 установлено ниже. Последовательным применением леммы 2.1, полагая

$$q = \left[\log_2 \frac{1}{\epsilon}\right] + 1, \tag{2.8}$$

можем определить множества $E_\nu \subset \Delta_\nu$ с мерой

$$\mid E_\nu \mid \geq (1 - 2^{-q}) \mid \Delta_\nu \mid > (1-\epsilon) \mid \Delta_\nu \mid, \tag{2.9}$$

и полиномы Q_ν $(\nu = 1, \ldots, 2^{\nu_0})$ по подсистеме $\{\varphi_k\}$ вида

$$Q_\nu = \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \overline{a}_k \varphi_k, \quad \text{с} \quad 0 \leq \overline{a}_k < \frac{\delta}{2}, \tag{2.10}$$

которые удовлетворяют условиям

$$Q_\nu = \begin{cases} \gamma & : \quad \text{на } E_\nu \\ & \\ 0 & : \quad \text{вне } \Delta_\nu \end{cases}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \left(\overline{a}_k \|\varphi_k\|_2 \right)^2 < 2^q \gamma^2 \mid \Delta_\nu \mid < \frac{2\gamma^2 \mid \Delta_\nu \mid}{\epsilon}. \tag{2.12}$$

Положим

$$E=\bigcup_{\nu=1}^{2^{\nu_0}}E_\nu, \qquad (2.13)$$

и

$$g=\sum_{\nu=1}^{2^{\nu_0}}Q_\nu=\sum_{k=N_0}^{N}\overline{a}_k\varphi_k, \quad \text{где} \quad N=N_{2^{\nu_0}}-1. \qquad (2.14)$$

Из (2.11),(2.13) и (2.14) вытекает, что

$$g=\begin{cases}\gamma & : \quad \text{на } E \\ & \\ 0 & : \quad \text{вне } \Delta\end{cases} \qquad \text{и} \quad \mid E\mid>(1-\epsilon)\mid\Delta\mid,$$

а согласно (2.12) имеем, что

$$\sum_{k=N_0}^{N}\Big(\overline{a}_k\|\varphi_k\|_2\Big)^2<\frac{2\gamma^2\mid\Delta\mid}{\epsilon}. \qquad (2.15)$$

Учитывая (2.12) и (2.15) будем иметь

$$\sum_{k=N_0}^{N}\Big(\overline{a}_k\|\varphi_k\|_2\Big)^{2+\epsilon}\leq\Big(\max_{N_0\leq k\leq N}\overline{a}_k\|\varphi_k\|_2\Big)^{\epsilon}\cdot\sum_{k=N_0}^{N}\Big(\overline{a}_k\|\varphi_k\|_2\Big)^2<\Big(\frac{2\gamma^2\mid\Delta\mid}{2^{\nu_0}\epsilon}\Big)^{\epsilon}\cdot\frac{2\gamma^2\mid\Delta\mid}{\epsilon}.$$

Выбирая ν_0 достаточно большим, будем иметь

$$\sum_{k=N_0}^{N}\Big(\overline{a}_k\|\varphi_k\|_2\Big)^{2+\epsilon}<\Big(\frac{\delta}{2}\Big)^{2+\epsilon}. \qquad (2.16)$$

Члены полинома $g=\sum_{k=N_0}^{N}\overline{a}_k\varphi_k$ переставим так, чтобы

$$\overline{a}_{\sigma(N_0)}\geq\overline{a}_{\sigma(N_0+1)}\geq\ldots\geq\overline{a}_{\sigma(N)}\geq 0,$$

(здесь $\{\sigma(k)\}_{k=N_0}^{N}$ некоторая перестановка натуральных чисел $[N_0,N])$. Положим

$$a_{\sigma(k)}=\overline{a}_{\sigma(k)}+\frac{\alpha}{2^k}, \quad \text{где} \quad \alpha=\min\{\frac{\mid\gamma\mid\cdot\mid\Delta\mid^{1/2}}{2}\cdot\Big(\sum_{k=N_0}^{N}\|\varphi_k\|_2^2\Big)^{-1/2};\frac{\delta}{2};\frac{\epsilon}{2}\}. \qquad (2.17)$$

Согласно (2.10) и (2.17) имеем, что $\delta>a_{\sigma(k)}>a_{\sigma(k+1)}>0$. Определим полином Q следующим образом

$$Q=\sum_{k=N_0}^{N}a_k\varphi_k.$$

Очевидно, что

$$Q = \sum_{k=N_0}^{N} \overline{a}_k \varphi_k + \sum_{k=N_0}^{N} \frac{\alpha}{2^k} \varphi_{\sigma(k)}. \qquad (2.18)$$

Отсюда и из (2.14) и (2.17) заключаем, что

$$\int_0^1 \mid Q(x) - g(x) \mid dx \le \sum_{k=N_0}^{N} \frac{\alpha}{2^k} < \alpha < \delta.$$

Согласно (2.8),(2.14) и утверждению 3 леммы 2.1 имеем, что

$$\mid \gamma \mid \cdot \mid \Delta \mid \le \int_0^1 \mid g(x) \mid dx = 2(1-2^{-q}) \mid \gamma \mid \cdot \mid \Delta \mid < (2-\epsilon) \mid \gamma \mid \cdot \mid \Delta \mid .$$

Из (2.16) и (2.17) вытекает, что

$$\left(\sum_{k=N_0}^{N} \big(a_k \|\varphi_k\|_2 \big)^{2+\epsilon} \right)^{\frac{1}{2+\epsilon}} \le \left(\sum_{k=N_0}^{N} \big(\overline{a}_k \|\varphi_k\|_2 \big)^{2+\epsilon} \right)^{\frac{1}{2+\epsilon}} + \alpha \left(\sum_{k=N_0}^{N} \big(\frac{1}{2^k} \big)^{2+\epsilon} \right)^{\frac{1}{2+\epsilon}} < \delta$$

Теперь проверим выполнение утверждения 6) леммы. Учитывая (2.15) и (2.17), получим

$$\max_{N_0 \le m \le N} \int_0^1 \mid \sum_{k=N_0}^{m} a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \mid dx \le \left(\sum_{k=N_0}^{N} \big(a_{\sigma(k)} \|\varphi_{\sigma(k)}\|_2 \big)^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=N_0}^{N} \big(\overline{a}_{\sigma(k)} \|\varphi_{\sigma(k)}\|_2 \big)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \alpha \left(\sum_{k=N_0}^{N} 2^{-2k} \big(\|\varphi_{\sigma(k)}\|_2 \big)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le 2 \mid \gamma \mid \left(\frac{\mid \Delta \mid}{\epsilon} \right)^{1/2}.$$

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3 *Пусть даны ступенчатая функция*

$$f = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu},$$

где $\{\Delta_\nu\}_{\nu=1}^{\nu_0}$ *непересекающиейся двоичные интервалы и* $\gamma_\nu \ne 0$, *целое* $0 < \epsilon < 1$ *и натуральное* $N_0 > 2$. *Тогда существуют измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *и полином по подсистеме Хаара* $\chi_{\mathcal{S}} = \{\chi_{n_k}\} = \{\varphi_k\}$ *вида*

$$Q = \sum_{j=1}^{M} A_j \varphi_{n_j}, \quad \text{где } N_0 < n_1 \quad \text{и} \quad \{n_j\}_{j=1}^{M} \quad \text{возрастающие натуральные числа,}$$

которые удовлетворяют следующим условиям

1) $\mid E \mid \geq 1-\epsilon$,

2) $Q(x)=f(x)$ для всех $x\in E$,

3) $\epsilon > A_j \geq A_{j+1} > 0$, при $j=1,\dots,M-1$,

4) $\int_0^1 \mid Q(x) \mid dx \leq 2\int_0^1 \mid f(x) \mid dx$,

Доказательство леммы 2.3 Последовательным применением леммы 2.1 можно определить множества $E_\nu \subset \Delta_\nu$ и полиномы

$$Q_\nu = \sum_{j=m_{\nu-1}}^{m_\nu - 1} A_j \varphi_{n_j}, \quad \text{где} \quad \{n_j\}_{j=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} \quad \text{возрастающие натуральные числа} \quad (m_0=1),$$

которые удовлетворяют условиям

$$\mid E_\nu \mid > (1-\epsilon) \mid \Delta_\nu \mid, \quad \nu = 1,2,\dots,\nu_0,$$

$$Q_\nu = \begin{cases} \gamma_\nu & : \quad \text{на } E_\nu \\ \\ 0 & : \quad \text{вне } \Delta_\nu \end{cases}, \quad \nu=1,2,\dots,\nu_0,$$

$$N_0 < n_{m_0} \quad \text{и} \quad n_{m_\nu - 1} < n_{m_\nu} \quad \text{для всех} \quad \nu \in [1, \nu_0 - 1],$$

$$\epsilon > A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_{m_\nu - 1} > A_{m_\nu} \geq \ldots \geq A_{m_{\nu_0}-1} \geq A_{m_{\nu_0}} > 0,$$

и

$$\mid \gamma_\nu \mid \cdot \mid \Delta_\nu \mid \leq \int_0^1 \mid Q_\nu(x) \mid dx < 2 \mid \gamma_\nu \mid \cdot \mid \Delta_\nu \mid .$$

Определим множество E и полином Q следующим образом

$$E = [0,1] \setminus \left(\cup_{\nu=1}^{\nu_0} (\Delta_\nu \setminus E_\nu) \right)$$

$$Q = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu = \sum_{j=1}^{M} A_j \varphi_{n_j},$$

где $M = m_{\nu_0} - 1$. Нетрудно убедиться, что определенные таким образом множество E и полином Q удовлетворяют утверждениям леммы. Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4 *Пусть $\chi_S = \{\chi_{n_k}\} = \{\varphi_k\}$. Тогда для любых $\epsilon \in (0,1)$, $f \in L^1(0,1)$, $\|f\| > 0$ и $N_0 > 1$ можно найти измеримое множество $E \subset [0,1]$, функцию g, полином Q вида*

$$Q = \sum_{k=N_0+1}^{M} a_k \varphi_k$$

и перестановку $\{\sigma(k)\}_{k=N_0+1}^{M}$ -натуральных чисел $N_0+1, ..., M$, удовлетворяющие условиям:

1) $\mid E \mid > 1 - \epsilon$

2) $g(x) = f(x)$, для всех $x \in E$,

3) $\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 |f(x)|dx < \int_0^1 |g(x)|dx < 3 \cdot \int_0^1 |f(x)|dx$,

4) $\int_0^1 |Q(x) - g(x)|dx < \epsilon$,

5) $\sum_{k=N_0+1}^{M} (a_k \|\varphi_k\|_2)^{2+\epsilon} < \epsilon$,

6) $a_{\sigma(k)} > a_{\sigma(k+1)} > 0, \quad \forall k \in (N_0, M)$,

7) $\max_{N_0+1 \le m \le M} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_0+1}^{m} a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \right| dx < 2 \cdot \int_0^1 |f(x)|dx$.

Доказательство леммы 2.4 Возьмем ступенчатую функцию

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \cdot \chi_{\Delta_\nu}, \tag{2.19}$$

(Δ_ν, $\nu = 1, 2, ..., \nu_0$-двоичные интервалы постоянства функции φ) такую, что

$$0 < \gamma_\nu |\Delta_\nu|^2 < \frac{\epsilon^3}{16^2} \cdot \left(\int_0^1 |f(x)|dx \right)^2, \quad 1 \le \nu \le \nu_0, \tag{2.20}$$

$$\int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|dx < \min\{\frac{\epsilon}{4}; \frac{\epsilon}{4} \int_0^1 |f(x)|dx\}, \tag{2.21}$$

Применим лемму 2.2, полагая в ее формулировке $\Delta = \Delta_1$, $\gamma = \gamma_1$, $N_0 = N_0 + 1$, $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{4\nu_0}, \frac{\epsilon}{4\nu_0}\|f\|\}$. Тогда определяются функция g_1, измеримое множество $E_1 \subset$

Δ_1, полином вида

$$Q_1 = \sum_{k=N_0+1}^{N_1} a_k^{(1)} \varphi_k$$

и перестановка $\{\sigma_1(k)\}_{k=N_0+1}^{N_1}$ -натуральных чисел $N_0+1, ..., N_1$ удовлетворяющие условиям

$$g_1(x) = \begin{cases} \gamma_1, & x \in E_1; \\ 0, & x \notin \Delta_1, \end{cases}, \quad |E_1| > (1-\epsilon) \cdot |\Delta_1|,$$

$$|\gamma_1| \cdot |\Delta_1| \leq \int_0^1 |g_1(x)| dx < (2-\epsilon) \cdot |\gamma_1| \cdot |\Delta_1|,$$

$$\int_0^1 |Q_1(x) - g_1(x)| dx < \alpha_0 = \min\{\frac{\epsilon}{4\nu_0}, \frac{\epsilon}{4\nu_0} \|f\|\},$$

$$\left(\sum_{k=N_0+1}^{N_1} (a_k^{(1)} \|\varphi_k\|_2)^{2+\epsilon} \right) < (\alpha_0)^{2+\epsilon},$$

$$\alpha_0 > a_{\sigma_1(N_0+1)}^{(1)} > \ldots > a_{\sigma_1(N_1)}^{(1)} > 0,$$

$$\max_{N_0+1 \leq m \leq N_1} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_0+1}^{m} a_{\sigma_1(k)} \varphi_{\sigma_1(k)}(x) \right| dx \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{|\Delta_1|}{\epsilon}} \cdot |\gamma_1|.$$

Положим

$$\alpha_1 = \min \left\{ \alpha_0; \min_{N_0+1 \leq k \leq N_1} \left(a_k^{(1)} \right) \right\}.$$

Снова применим лемму 2.2, полагая в ее формулировке $\Delta = \Delta_2$, $\gamma = \gamma_2$, $N_0 = N_1 + 1$, $\delta = \alpha_1$. Тогда определяются функция g_2, измеримое множество $E_2 \subset \Delta_2$, полином вида

$$Q_2 = \sum_{k=N_1+1}^{N_2} a_k^{(2)} \varphi_k$$

и перестановка $\{\sigma_2(k)\}_{k=N_1+1}^{N_2}$ -натуральных чисел $N_1+1, ..., N_2$, удовлетворяющие условиям:

$$g_2(x) = \begin{cases} \gamma_2, & x \in E_2; \\ 0, & x \notin \Delta_2, \end{cases}, \quad |E_2| > (1-\epsilon) \cdot |\Delta_1|,$$

$$|\gamma_2| \cdot |\Delta_2| \leq \int_0^1 |g_2(x)| dx < (2-\epsilon) \cdot |\gamma_2| \cdot |\Delta_2|,$$

$$\int_0^1 |Q_2(x) - g_2(x)| dx < \alpha_1,$$

$$\left(\sum_{k=N_1+1}^{N_2}(a_k^{(2)}\|\varphi_k\|_2)^{2+\epsilon}\right)<(\alpha_1)^{2+\epsilon},$$

$$\alpha_1>a^{(2)}_{\sigma_2(N_1+1)}>\ldots>a^{(2)}_{\sigma_2(N_2)}>0,$$

$$\max_{N_1+1\le m\le N_2}\int_0^1\left|\sum_{k=N_1+1}^{m}a_{\sigma_2(k)}\varphi_{\sigma_2(k)}(x)\right|dx\le 2\cdot\sqrt{\frac{|\gamma_2|}{\epsilon}}\cdot|\Delta_2|.$$

Продолжая эти рассуждения, мы можем, по индукции, определить числа $\alpha_1>\alpha_2>...>\alpha_{\nu_0-1}$, функции $g_1,...,g_{\nu_0}$, множества $E_1,...,E_{\nu_0}$, полиномы $Q_1,\ldots,Q_{\nu_0}$ вида

$$Q_\nu=\sum_{k=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu}a_k^{(\nu)}\varphi_k, \tag{2.22}$$

и перестановка $\{\sigma_\nu(k)\}_{k=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu}$ -натуральных чисел $N_{\nu-1}+1,...,N_\nu$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_0=\min\left\{\frac{\epsilon}{4\nu_0},\frac{\epsilon}{4\nu_0}\|f\|\right\},\quad \alpha_\nu=\min\left[\alpha_0;\ \min_{N_{\nu-1}\le k\le N_\nu}\left(a_k^{(\nu)}\right)\right],\quad 1\le\nu\le\nu_0. \tag{2.23}$$

$$g_\nu(x)=\begin{cases}\gamma_\nu, & x\in E_\nu;\\ 0, & x\notin\Delta_\nu,\end{cases},\quad |E_\nu|>(1-\epsilon)\cdot|\Delta_\nu|,\quad 1\le\nu\le\nu_0. \tag{2.24}$$

$$|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|\le\int_0^1|g_\nu(x)|dx<(2-\epsilon)\cdot|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|, \tag{2.25}$$

$$\int_0^1|Q_\nu(x)-g_\nu(x)|dx<\alpha_{\nu-1}, \tag{2.26}$$

$$\left(\sum_{k=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu}(a_k^{(\nu)}\|\varphi_k\|_2)^{2+\epsilon}\right)^{\frac{1}{2+\epsilon}}<\alpha_{\nu-1}, \tag{2.27}$$

$$\alpha_{\nu-1}>a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k)}>a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k+1)}>0,\ \forall k\in(N_{\nu-1},N_\nu), \tag{2.28}$$

$$\max_{N_{\nu-1}+1\le m\le N_\nu}\int_0^1\left|\sum_{k=N_{\nu-1}+1}^{m}a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k)}\varphi_{\sigma_\nu(k)}(x)\right|dx\le 2\cdot\sqrt{\frac{|\gamma_\nu|}{\epsilon}}\cdot|\Delta_\nu|,\quad 1\le\nu\le\nu_0. \tag{2.29}$$

Положим

$$g = \left(\sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu \right) + f - \varphi. \tag{2.30}$$

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu, \tag{2.31}$$

$$Q = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left(\sum_{k=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu} a_k^{(\nu)} \varphi_k \right) = \sum_{k=N_0+1}^{M} a_k \varphi_k, \tag{2.32}$$

где

$$M = N_{\nu_0}; \quad a_k = a_k^{(\nu)}, \quad k \in (N_{\nu-1}, N_\nu], \quad 1 \le \nu \le \nu_0, \tag{2.33}$$

$$\sigma(k) = \sigma_\nu(k), \quad k \in (N_{\nu-1}, N_\nu], \quad 1 \le \nu \le \nu_0, \tag{2.34}$$

Из (2.19)- (2.28) вытекает, что

$$g(x) = f(x) \qquad \text{при } x \in E; \qquad \frac{1}{2} \int_0^1 |f(x)| dx < \int_0^1 |g(x)| dx < 3 \cdot \int_0^1 |f(x)| dx,$$

$$|E| = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |E_\nu| > (1-\epsilon) \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |\Delta_\nu| \ge 1 - \epsilon,$$

$$\int_0^1 |Q(x) - g(x)| dx \le \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \int_0^1 |Q_\nu(x) - g_\nu(x)| dx + \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)| dx < \epsilon,$$

$$\left(\sum_{k=N_0+1}^{M} (a_k \|\varphi_k\|_2)^{2+\epsilon} \right)^{\frac{1}{2+\epsilon}} < \epsilon,$$

т.е. утверждения 1)- 5) Леммы 2.4 выполнены.

Согласно (2.23) и (2.28) для каждого $\nu \in [1, \nu_0]$ и для всех $k \in (N_{\nu-1}, N_\nu]$ имеем

$$a_k^{(\nu)} < \alpha_{\nu-1} \le \min_{N_{\nu-2} < i \le N_{\nu-1}} \left(a_i^{(\nu-1)} \right), \quad k \in (N_{\nu-1}, N_\nu].$$

Принимая во внимание также (2.33) и (2.34) будем иметь

$$a_{\sigma(k)} > a_{\sigma(k+1)} > 0, \quad \forall k \in (N_0, M).$$

Теперь проверим выполнение утверждения 7) леммы 2.4. Пусть $m \in (N_0, M)$, тогда для некоторого $\nu \in [1, \nu_0]$ имеем $N_{\nu-1} < m \le N_\nu$, следовательно из (2.22), (2.32)- (2.34) получим

$$\sum_{k=N_0+1}^{m} a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)} = \sum_{n=1}^{\nu-1} Q_n + \sum_{k=N_{\nu-1}+1}^{m} a_{\sigma_\nu(k)}^{(\nu)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}.$$

Отсюда и из соотношений (2.20),(2.21), (2.23), (2.26) и (2.29) будем иметь

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_0+1}^{m} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) \right| dx \le \sum_{n=1}^{\nu-1} \int_0^1 |Q_n(x)-g_n(x)|dx+$$

$$\sum_{n=1}^{\nu_0} \int_0^1 |g_n(x)|dx + \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{\nu-1}+1}^{m} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k)}\varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \right| dx <$$

$$\nu_0 \frac{\epsilon\cdot\int_0^1 |f(x)|dx}{4\nu_0} + (2-\epsilon)\int_0^1 |\varphi(x)|dx + 2\cdot\sqrt{\frac{\gamma_\nu}{\epsilon}}\cdot|\Delta_\nu| \le 2\cdot\int_0^1 |f(x)|dx.$$

Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5 *Пусть даны двоичный интервал* Δ*, множество* $E\subset\Delta$ *с* $\mid E\mid > 0$ *и число* $C>0$*. Тогда существуют полином по системе Хаара*

$$f=\sum_{k=N_1}^{N_2} a_k\chi_k,$$

перестановка $\varrho\in D(f,\chi)$ *и натуральное число* m*, которые удовлетворяют следующим требованиям*

1) $\|f\|<2$ и $f=0$ вне Δ,

2) $a_k\in\{-1,0,+1\}$ для всех $N_1\le k\le N_2$,

3) $\|G_m(f,\chi,\varrho)\|_E > C.$

При доказательстве леммы 2.5 мы будем пользоваться следующим свойством измеримых множеств. Пусть на интервале (a,b) дано измеримое множество E положительной меры. Тогда для любого $\delta>0$ существует интервал $(a_1,b_1)\subset(a,b)$, для которой

$$\big|E\cap(a_1,b_1)\big| > (1-\delta)(b_1-a_1).$$

Согласно этому можем утверждать следующее.

Утверждение. *Пусть дано измеримое множество* $E\subset[0,1]$ *с мерой* $\mid E\mid > 0$*. Тогда, для любого двоичного интервала* Δ *с* $\mid\Delta\cap E\mid>0$ *существует другой* *двоичный интервал $\tilde{\Delta} \subset \Delta$, для которой*

$$\mid \tilde{\Delta} \mid \leq \frac{\mid \Delta \mid}{16} \quad \text{и} \quad \mid \tilde{\Delta} \cap E \mid > \frac{7 \mid \tilde{\Delta} \mid}{8}.$$

Доказательство леммы 2.5 Согласно утверждению, можем выбрать последовательность двоичных интервалов $\{\Delta_{n_k}^{(i_{n_k})}\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$\Delta \supset \Delta_{n_1}^{(i_{n_1})} \supset \Delta_{n_2}^{(i_{n_2})} \supset \ldots \supset \Delta_{n_k}^{(i_{n_k})} \supset \Delta_{n_{k+1}}^{(i_{n_{k+1}})} \supset \ldots$$

$$\mid \Delta_{n_{k+1}}^{(i_{n_{k+1}})} \mid \leq \frac{\mid \Delta_{n_k}^{(i_{n_k})} \mid}{16} \quad \text{и} \quad \mid \Delta_{n_k}^{(i_{n_k})} \cap E \mid > \frac{7 \mid \Delta_{n_k}^{(i_{n_k})} \mid}{8} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.35}$$

Имея последовательность $\{i_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ мы можем однозначным образом определить последовательность $\{i_k\}_{k=n_1}^{\infty}$ так, чтобы

$$\Delta_k^{(i_k)} \supset \Delta_{k+1}^{(i_{k+1})} \quad \text{для всех} \ \ k \geq n_1.$$

Выберем произвольный натуральный s и рассмотрим функцию

$$F_s = -\sum_{k=n_1}^{n_s-1} (-1)^{i_{k+1}} \chi_k^{(i_k)}. \tag{2.36}$$

Легко проверить, что

$$F_s(x) = \begin{cases} 2^{n_s} - 2^{n_1} & : \quad \text{если } x \in \Delta_{n_s}^{(i_s)}, \\ -2^{n_1} & : \quad \text{если } x \in \Delta_{n_1}^{(i_1)} \setminus \Delta_{n_s}^{(i_s)}, \\ 0 & : \quad \text{для остальных } x. \end{cases} \tag{2.37}$$

Из (2.36) ясно, что при некотором $\tilde{\varrho} \in D(F_s, \chi)$

$$G_{s-1}(F_s, \chi, \tilde{\varrho}) = -\sum_{k=1}^{s-1} (-1)^{i_{n_k+1}} \chi_{n_k}^{(i_{n_k})}.$$

По индукции по l докажем, что

$$\| \sum_{k=1}^{l} (-1)^{i_{n_k+1}} \chi_{n_k}^{(i_{n_k})} \|_E > \frac{l}{4}. \tag{2.38}$$

При $l=1$, согласно (2.35) имеем, что

$$\|\chi_{n_1}^{(i_{n_1})}\|_E = 2^{n_1}\cdot \mid \Delta_{n_1}^{(i_{n_1})}\cap E \mid > 2^{n_1}\cdot\frac{7}{8}\mid \Delta_{n_1}^{(i_{n_1})}\mid = \frac{7}{8} > \frac{1}{4}.$$

Предположим, что неравенство (2.38) справедливо для некоторого $l\geq 1$ и докажем, что

$$\|\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^{i_{n_k}+1}\chi_{n_k}^{(i_{n_k})}\|_E > \frac{l+1}{4}.$$

Согласно (2.35) имеем, что $n_{l+1}\geq n_l+4$. Учитывая это легко видеть, что

$$\left|\sum_{k=1}^{l}(-1)^{i_{n_k}+1}\chi_{n_k}^{(i_{n_k})}(x)\right| \leq 2^{n_1}+2^{n_2}+\ldots+2^{n_l} < 2^{n_l+1} \leq \frac{2^{n_{l+1}}}{8}, \quad \text{если} \quad x\in\Delta_{n_l}^{(i_{n_l})},$$

и поэтому

$$\|\sum_{k=1}^{l}(-1)^{i_{n_k}+1}\chi_{n_k}^{(i_{n_k})}\|_{\Delta_{n_{l+1}}^{(i_{n_{l+1}})}} \leq \frac{1}{8}. \tag{2.39}$$

Заметим также, что

$$\|\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^{i_{n_k}+1}\chi_{n_k}^{(i_{n_k})}\|_{\Delta_{n_{l+1}}^{(i_{n_{l+1}})}\cap E} \geq 2^{n_{l+1}}\cdot\left|\Delta_{n_{l+1}+1}^{(i_{n_{l+1}+1})}\cap E\right| \geq 2^{n_{l+1}}\cdot\frac{3}{4}\left|\Delta_{n_{l+1}+1}^{(i_{n_{l+1}+1})}\right| = \frac{3}{8}. \tag{2.40}$$

Из (2.38)-(2.40) заключаем, что

$$\|\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^{i_{n_k}+1}\chi_{n_k}^{(i_{n_k})}\|_E = \|\sum_{k=1}^{l}(-1)^{i_{n_k}+1}\chi_{n_k}^{(i_{n_k})}\|_{E\setminus\Delta_{n_{l+1}}^{(i_{n_{l+1}})}} +$$

$$\|\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^{i_{n_k}+1}\chi_{n_k}^{(i_{n_k})}\|_{\Delta_{n_{l+1}}^{(i_{n_{l+1}})}\cap E} \geq \|\sum_{k=1}^{l}(-1)^{i_{n_k}+1}\chi_{n_k}^{(i_{n_k})}\|_E -$$

$$\|\sum_{k=1}^{l}(-1)^{i_{n_k}+1}\chi_{n_k}^{(i_{n_k})}\|_{\Delta_{n_{l+1}}^{(i_{n_{l+1}})}} + \|\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^{i_{n_k}+1}\chi_{n_k}^{(i_{n_k})}\|_{\Delta_{n_{l+1}}^{(i_{n_{l+1}})}\cap E} > \frac{l+1}{4}.$$

Итак

$$\|G_{s-1}(F_s)\|_E = \|\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{i_{n_k}+1}\chi_{n_k}^{(i_{n_k})}\|_E > \frac{s-1}{4}.$$

Согласно (2.37) имеем, что $\|F_s\|<2$ для любого s. Для окончания доказательства остается заметить, что если выбрать $s=[8C]+2$, то полином F_s и перестановка $\tilde{\varrho}$ удовлетворяют требованиям леммы при $m=s-1$. Лемма 2.5 доказана.

Доказательства теорем

Схема доказательства теорем 2.2 и 2.6 такова: функция $\tilde{f}$, полученная после изменения значений любой функции f вне множества E, представляется в метрике $L^1(0,1)$ рядом, членами которого являются непересекающиеся полиноми по системе Хаара , внутренные колебания которых стремятся к нулю по норме $L^1(0,1)$, а коэффициенты от полинома к полиному убывают.

Доказательство теорем 2.2 и 2.6 Пусть $0 < \epsilon < 1$ и $\{\varphi_k\} = \chi_S$ (см. (1.5)). Заметим, что в случае $\mathcal{S} = \mathcal{N}$ будем иметь доказательство теоремы 2.2 ($\{\varphi_k\} = \{\chi_k\}$ полная система Хаара). Если обозначим через

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \tag{2.41}$$

последовательность полиномов по системе Хаара $\{\chi\}$ с рациональными коэффициентами и последовательно применим лемму 2.4, то можем найти последовательности функций $\{\overline{g}_n\}$, множеств $\{E_n\}$ и полиномов

$$\overline{Q}_n = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k^{(n)} \varphi_{\sigma_n(k)}, \quad m_0 = 1; \qquad a_k^{(n)} > 0 \tag{2.42}$$

где $\{\sigma_n(k)\}_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}$ для каждого фиксированного n, некоторая перестановка натуральных чисел $m_{n-1}, m_{n-1}+1, ..., m_n - 1$, которые удовлетворяют условиям:

$$\overline{g}_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \tag{2.43}$$

$$|E_n| > 1 - \epsilon \cdot 4^{-8(n+2)}, \tag{2.44}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 |f_n(x)|dx < \int_0^1 |\overline{g}_n(x)|dx < 3 \cdot \int_0^1 |f_n(x)|dx, \tag{2.45}$$

$$\int_0^1 |\overline{Q}_n(x) - \overline{g}_n(x)|dx < 4^{-8(n+2)}, \tag{2.46}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\int_0^1\left|\sum_{k=m_{n-1}}^{N}a_k^{(n)}\varphi_{\sigma_n(k)}(x)\right|dx\le 2\cdot\int_0^1|f_n(x)|dx, \tag{2.47}$$

$$a_k^{(n)}>a_{k+1}^{(n)}>a_{m_n}^{(n+1)},\quad \forall n\ge 1,\quad \forall k\in[m_{n-1},m_n-1]. \tag{2.48}$$

$$\sum_{k=m_{n-1}}^{N}\left(a_k^{(n)}\cdot\|\varphi_{\sigma_n^{(k)}}\|_2\right)^{2+4^{-8(n+2)}}<4^{-8(n+2)}. \tag{2.49}$$

Положим

$$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n, \tag{2.50}$$

Очевидно, что (см. (2.44))

$$|E|>1-\epsilon.$$

Пусть $f\in L^1(0,1)$. Нетрудно видеть, что можно выбрать последовательность $\{f_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ из последовательности (2.41) такую, что

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{N}f_{k_n}(x)-f(x)\right|dx=0. \tag{2.51}$$

$$\int_0^1|f_{k_n}(x)|\,dx\le\overline{\epsilon}\cdot 4^{-8(n+2)},\quad n\ge 2\qquad \text{где } \overline{\epsilon}=\min\{\frac{\epsilon}{2},\int_E|f(x)|dx\} \tag{2.52}$$

Положим

$$g_1=\overline{g}_{k_1};\quad Q_1=\overline{Q}_{k_1}=\sum_{i=m_{k_1-1}}^{m_{k_1}-1}a_i^{(k_1)}\varphi_{\sigma_{k_1}(i)}. \tag{2.53}$$

Очевидно, что

$$\int_0^1|f(x)-f_{k_1}(x)|\,dx<\frac{\overline{\epsilon}}{2}. \tag{2.54}$$

Учитывая (2.45), (2.47) и (2.53), будем иметь

$$\max_{m_{k_1-1}\le m<m_{k_1}}\int_0^1\left|\sum_{i=m_{k_1-1}}^{m}a_i^{(k_1)}\varphi_{\sigma_{k_1}(i)}(x)\right|dx\le 2\int_0^1\left|f_{k_1}(x)\right|dx<4\int_0^1\left|g_1(x)\right|dx. \tag{2.55}$$

Положим

$$a_k=a_k^{(n)},\quad \sigma(k)=\sigma_n(k);\qquad k\in[m_{n-1},m_n),\quad n\ge k_1-1, \tag{2.56}$$

$$p(1)=1\quad \text{и}\quad b_1=\min\{\frac{\overline{\epsilon}}{2},a_{m_{k_1}-1}\}. \tag{2.57}$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{q-1}$, $1 = p(1) < p(2) < \ldots < p(q-1)$, $\{b_{p(k)}\}_{k=1}^{q-1}$, функции $g_n(x)$, $f_{\nu_n}(x)$, $1 \le n \le q-1$ и полиномы

$$Q_n = \sum_{k=M_n}^{\overline{M}_n} a_k \varphi_{\sigma(k)}, \quad M_n = m_{\nu_n - 1}, \quad \overline{M}_n = m_{\nu_n} - 1, \quad M_1 > N_1$$

удовлетворяющие условиям

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E_{\nu_n}, \quad 1 \le n \le q-1,$$

$$\int_0^1 |g_n(x)| dx < 4^{-3n}\overline{\epsilon}, \quad 1 \le n \le q-1$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=2}^{n} \left[\left(Q_k(x) + b_{p(k)} \cdot \varphi_{\sigma(p(k))}(x) \right) - g_k(x) \right] \right| dx < 4^{-8(n+1)}\overline{\epsilon}, \quad 1 \le n \le q-1, \tag{2.58}$$

$$\max_{M_n \le N < \overline{M}_n} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_n}^{N} a_k \varphi_{\sigma(k)}(x) \right| dx < 4^{-3n}\overline{\epsilon}, \quad 1 \le n \le q-1.$$

$$p(n) = \min\{k \in N : \quad k \notin \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} [M_j, \overline{M}_j] \right) \cup \{p(s)\}_{s=1}^{n-1}\},$$

$$a_{\overline{M}_n} > b_{p(n)} > a_{M_{n+1}}$$

Возьмем функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (2.41) такую, что

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{n=2}^{q-1} \left[\left(Q_n(x) + b_{p(n)} \cdot \varphi_{\sigma(p(n))}(x) \right) - g_n(x) \right] \right) \right| dx < 4^{-8(q+2)}\overline{\epsilon}. \tag{2.59}$$

$$a_{M_q} < b_{p(q-1)}, \quad M_q = m_{\nu_q - 1} \tag{2.60}$$

Согласно (2.52) и (2.58) имеем, что

$$\int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{n=2}^{q-1} \left[\left(Q_n(x) + b_{p(n)} \cdot \varphi_{\sigma(p(n))}(x) \right) - g_n(x) \right] \right| dx < 4^{-8q-1}\overline{\epsilon}.$$

Учитывая также (2.59) получим

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) \right| dx < 4^{-8q}\overline{\epsilon}. \tag{2.61}$$

Положим

$$Q_q = \overline{Q}_{\nu_q} = \sum_{k=M_q}^{\overline{M}_q} a_k \varphi_{\sigma(k)}, \quad \overline{M}_q = m_{\nu_q} - 1, \quad M_q = m_{\nu_q - 1}, \tag{2.62}$$

$$g_q = f_{k_q} + [\overline{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}],$$

$$p(q) = \min\{k \in N: \quad k \notin \left(\bigcup_{n=1}^{q-1}[M_n, \overline{M}_n]\right) \cup \{p(s)\}_{s=1}^{q-1}\}\}, \tag{2.63}$$

$$b_{p(q)} = \min\left(4^{-8(q+3)}\overline{\epsilon}; \quad \frac{a_{\overline{M}_q}}{2}\right). \tag{2.64}$$

Учитывая соотношения (2.43), (2.45)- (2.47), (2.56), (2.58)-(2.64), получим

$$g_q = f_{k_q}, \quad x \in E_{\nu_q}, \tag{2.65}$$

$$\int_0^1 |g_q(x)|dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{\sigma(p(j))}(x) \right) - g_j(x) \right] \right) \right| dx +$$

$$+ \int_0^1 |\overline{g}_{\nu_q}(x)|dx + \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{\sigma(p(j))}(x) \right) - g_j(x) \right] \right| dx < 4^{-3q}\overline{\epsilon}. \tag{2.66}$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{\sigma(p(j)}(x) \right) - g_j(x) \right] \right| dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q} \left[\left(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{\sigma(p(j))}(x) \right) - g_j(x) \right] \right) \right| dx +$$

$$+ \int_0^1 |b_{p(q)} \cdot \varphi_{\sigma(p(q))}(x)|dx + \int_0^1 |\overline{Q}_{\nu_q}(x) - \overline{g}_{\nu_q}(x)|dx < 4^{-8(q+1)}\overline{\epsilon}, \tag{2.67}$$

$$\max_{M_q \leq N < \overline{M}_q} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_q}^{N} a_k \varphi_{\sigma(k)}(x) \right| dx \leq 3 \cdot \int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|dx < 4^{-3q}\overline{\epsilon}. \tag{2.68}$$

$$a_{M_q} > ... > a_k > ... > a_{\overline{M}_q} > b_{p(q)}. \tag{2.69}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q\}$, числа $\{p(q)\}_{q=2}^{\infty}$, $\{b_{p(q)}\}_{q=2}^{\infty}$ и полиномов $\{Q_q\}$,удовлетворяющих условиям (2.63)-(2.69) для всех $q \geq 2$.

Учитывая выбор $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{[M_q, \overline{M}_q]\}_{q=1}^{\infty}$ и $\{p(q)\}_{q=1}^{\infty}$ (см. (2.42), (2.56), (2.62)) получим, что последовательность натуральных чисел

$$\sigma(1)...\sigma(m_{\nu_1}-1); \quad \sigma(M_2)...\sigma(\overline{M}_2); \quad p(2)...\sigma(M_n)...\sigma(k)...\sigma(\overline{M}_n); \quad p(n).... \tag{2.70}$$

есть некоторая перестановка последовательности $1, 2, ..., n, ...$

Последовательность (2.70) запишем в виде

$$\sigma_f(1), \quad \sigma_f(2), ..., \sigma_f(k), ...$$

и определим функцию $\tilde{f}$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{\sigma_f(k)}$ следующим образом

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k, \tag{2.71}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{\sigma_f(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=M_n}^{\overline{M}_n} a_k \varphi_{\sigma(k)} + b_{p(k)} \cdot \varphi_{\sigma(p(n))} \right], \tag{2.72}$$

где $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$- есть последовательность $a_1...a_{m_{\nu_1}-1}$, $a_{M_1}...a_{\overline{M}_1}$; $b_{p(1)}...a_{M_n}...a_{\overline{M}_n}$; $b_{p(n)}....$

Отсюда и из условий (2.48), (2.49), (2.54)- (2.56), (2.60), (2.65), (2.66) и (2.69) вытекает

$$c_k > c_{k+1}, \quad \forall k \geq 1.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \|\varphi_{\sigma(k)}\|_2 \right)^r < +\infty, \quad \forall r > 2.$$

$$\tilde{f} \in L^1(0,1), \quad \tilde{f}(x) = f(x), \quad \text{ при } \ x \in E \quad \text{ и } \quad \frac{1}{2}\|f\| < \|\tilde{f}\| < 4\|f\|.$$

Учитывая соотношения (2.64), (2.66)- (2.68), (2.71) получим, что ряд (2.72) сходится к $\tilde{f}$ в метрике $L^1(0,1)$ и следовательно является рядом Фурье функции $\tilde{f}$ по переставленной системе $\{\varphi_{\sigma_f(k)}\}$.

В силу (2.55),(2.64),(2.66),(2.68) и (2.71) для каждого натурального $m \in N$ будем иметь

$$\|G_m(\tilde{f})\| = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_{\sigma(k)}(x) \right| dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{M_n \leq m \leq \overline{M}_n} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_n}^{m} a_k \varphi_{\sigma(k)}(x) \right| dx \right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left|b_{p(k)}\right| \leq 2\int_0^1 |g_1(x)|\,dx + \overline{\epsilon}\sum_{n=2}^{\infty}4^{-n} \leq 3\int_0^1 \left|\tilde{f}(x)\right| dx \leq 12\int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

Теоремы 2.2 и 2.6 доказаны.

Доказательство теоремы 2.5 Рассмотрим множество пар $\{(\gamma, \Delta)\}$, где γ пробегает множество всех рациональных чисел, а Δ пробегает множество всех двоичных интервалов. Пронумеровав все ступенчатые функции

$$g = \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_k \chi_{\Delta_k} \quad \text{где} \quad (\gamma_k, \Delta_k) \in \{\gamma, \Delta\},$$

мы можем представить их в виде последовательности (2.41). Положим $n_0 = N_0 = 1$ и используя лемму 2.3 определим последовательности множеств $\{E_k\}$ и полиномов

$$Q_k = \sum_{i=N_{k-1}}^{N_k-1} A_{n_i}\varphi_{n_i} \quad \text{с возрастающим} \quad \{n_i\},$$

которые удовлетворяют условиям

$$| E_k | > 1 - \frac{\epsilon}{2^k},$$

$$Q_k = f_k \qquad \text{на} \;\; E_k, \tag{2.73}$$

$$\int_0^1 | Q_k(x) |\, dx \leq 2\int_0^1 | f_k(x) |\, dx, \tag{2.74}$$

и последовательность $\{A_{n_k}\}$ монотонно убывает и для $k = N_{i-1}$ выполняется неравенство $A_{n_k} < \frac{1}{i}$.

Для каждого натурального k определим $i \geq 0$ из условия $k \in [n_i, n_{i+1})$ и положим $A_k = A_{n_i}$. Далее положим

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

Ясно, что $| E | > 1 - \epsilon$ и $\{A_k\}$ монотонно стремится к нулю. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k.$$

Пусть $f \in L^1(0,1)$. Легко видеть, что можно выбрать последовательность $\{f_{s_k}\}_{k=1}^{\infty}$ из (2.41) такую, что

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1\Big|\sum_{k=1}^{N} f_{s_k}(x)-f(x)\Big|dx=0. \tag{2.75}$$

$$\int_0^1\big|f_{s_k}(x)\big|dx<2^{-2k} \quad \text{при} \quad k\geq 2. \tag{2.76}$$

Определим функцию $\tilde{f}$ и числа δ_k следующим образом

$$\tilde{f}=\sum_{k=1}^{\infty} Q_{s_k}, \tag{2.77}$$

$$\delta_k=\begin{cases} 1 & : \quad \text{если} \quad k=n_i \quad \text{где} \quad i\in\bigcup_{p=1}^{\infty}[N_{s_p-1},N_{s_p}-1] \\ \\ 0 & : \quad \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.78}$$

Из (2.73)-(2.77) следует, что

$$\tilde{f}\in L^1(0,1) \quad \text{и} \quad \tilde{f}=f \quad \text{на} \quad E,$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^1\Big|\sum_{k=1}^{m} Q_{s_k}(x)-\tilde{f}(x)\Big|dx=0.$$

В силу (2.77) и (2.78) имеем, что

$$\delta_i A_i=\frac{1}{\big(\|\varphi_i\|\big)^2}\int_0^1\tilde{f}(t)\varphi_i(t)dt.$$

Теорема 2.5 доказана.

Доказательство теоремы 2.3 Для доказательства теоремы нам понадобится следующая теорема из [23].

Теорема (Ф. Г. Арутюнян) *Для того, чтобы ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\chi_n$$

сходился п. в. на множестве $E\subset(0,1)$, $\mid E\mid>0$, *необходимо и достаточно, чтобы для п. в.* $x\in E$ *была конечна сумма ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\big(b_n\chi_n(x)\big)^2. \tag{2.79}$$

Выберем функцию $f \in L^1(0,1)$ такую, что $\int_E \mid f(t) \mid^2 dt = +\infty$ и пусть g любая функция из $L^1(0,1)$ для которой $\{\mid c_n \mid\}_{n=1}^{+\infty} = \{\mid c_n(g) \mid\}_{n=1}^{+\infty}$ убывает. Обозначим

$$d_n = c_n \|\chi_n\|_2.$$

Очевидно, что

$$\|\chi_1\|_2 = 1 \quad \text{и} \quad \|\chi_n\|_2 = \left(\int_0^1 \chi_n^2(t)dt\right)^{1/2} = 2^{\frac{k}{2}}, \quad \text{при} \quad n = 2^k + j, \quad 1 \le j \le 2^k,$$

и поэтому

$$d_k^{(i)} = c_k^{(i)} \|\chi_k^{(i)}\|_2 = 2^{\frac{k}{2}} c_k^{(i)}. \tag{2.80}$$

Так как $g \in L^1(0,1)$, то согласно теореме Ф. Г. Арутюняна, для п.в. $x \in (0,1)$ конечна сумма (2.79). Это означает, что для некоторой не двоично-рациональной точки $t \in (0,1)$ имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 \chi_n(t)^2 < +\infty.$$

Заметим, что среди функций $\{\chi_k^{(i)}\}_{i=1}^{2^k}$ $(k > 0)$ лишь одна не равняется нулю в точке t. Пусть это будет $\chi_k^{(i_k)}$. Положим также $i_0 = 1$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(c_n \chi_n(t)\big)^2 = c_1^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \big(c_k^{(i_k)} \chi_k^{(i_k)}(t)\big)^2 = d_1^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \big(d_k^{(i_k)}\big)^2 < +\infty. \tag{2.81}$$

Поскольку последовательность $\{\mid c_n(f) \mid\}_{n=1}^{+\infty}$ убывающая, то учитывая (2.80) имеем

$$\big(d_n^{(i_n)}\big)^2 = 2^n \big(c_n^{(i_n)}\big)^2 \ge 2^n \big(c_{n+1}^{(k)}\big)^2 = \frac{\big(d_{n+1}^{(k)}\big)^2}{2} \quad \text{для всех} \quad k = 1, 2, \ldots, 2^{n+1}.$$

Учитывая последнее неравенство, можем утверждать

$$2^n \big(d_n^{(i_n)}\big)^2 \ge \frac{1}{4}\left(\big(d_{n+1}^{(1)}\big)^2 + \big(d_{n+1}^{(2)}\big)^2 + \ldots + \big(d_{n+1}^{(2^{n+1})}\big)^2\right) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \big(d_{n+1}^{(k)}\big)^2.$$

Учитывая (2.81), получаем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\|c_n(g)\chi_n\|_2\Big)^2 =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n^2 = d_1^2 + d_2^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \big(d_{n+1}^{(k)}\big)^2 \le d_1^2 + d_2^2 + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \big(d_n^{(i_n)}\big)^2 < +\infty.$$

Отсюда заключаем, что $g \in L^2(0,1)$. Следовательно функция g не может совпадать с f на множестве E. Теорема 2.3 доказана.

Доказательство теоремы 2.1 Определим последовательность непересекающихся двоичных интервалов $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$| E \cap \Delta_k | > 0, \qquad \text{для всех} \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{2.82}$$

Для любой $g \in L^1(0,1)$ условимся писать

$$sp(g) = \{n \in \mathcal{N} \quad : \quad c_n(g) \neq 0\}.$$

Последовательным применением леммы 2.5, можем определить последовательности полиномов $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ и натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что

$$\|f_k\| < 2 \qquad \text{и} \quad f_k = 0 \quad \text{вне} \quad \Delta_k, \tag{2.83}$$

$$c_n(f_k) \in \{-1, 0, 1\} \qquad \text{для всех} \quad n \in sp(f_k), \tag{2.84}$$

$$\|G_{m_k}(f_k, \chi, \varrho_k)\|_E > 4^k \qquad \text{при некотором} \quad \varrho_k \in D(f_k, \chi). \tag{2.85}$$

Согласно (2.82) и (2.83) имеем, что $sp(f_i) \cap sp(f_j) = \emptyset$, если $i \neq j$. Рассмотрим функцию

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2^k}.$$

Учитывая (2.82) и (2.83) имеем, что

$$\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|f_k\|}{2^k} < 2.$$

Для каждого натурального k через α_k обозначим количество элементов множества $sp(f_k)$. Ясно, что $\alpha_k < +\infty$. Обозначим $s_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1} + m_k$. Учитывая (2.84) заключаем, что при некотором $\varrho \in D(f, \chi)$

$$G_{s_k}(f, \chi, \varrho) = \sum_{p=1}^{k-1} \frac{f_p}{2^p} + \frac{G_{m_k}(f_k)}{2^k} \qquad \text{для всех} \;\; k = 1, 2, \ldots$$

и поэтому, согласно (2.85)

$$\|G_{s_k}(f, \chi, \varrho)\|_E = \sum_{p=1}^{k-1} \frac{\|f_p\|_E}{2^p} + \frac{\|G_{m_k}(f_k)\|_E}{2^k} > 2^k.$$

Итак имеем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\|G_k(f,\chi,\varrho)\|_E \geq \overline{\lim_{k\to\infty}}\|G_{s_k}(f,\chi,\varrho)\|_E = +\infty.$$

Теорема 2.1 доказана.

§ 3 О расходимости L^1- жадного алгоритма по системе Хаара

Пусть $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полная, минимальная система в банаховом пространстве X и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ее сопряженная система. Предположим, что для каждого элемента $x \in X$ существуют числа $\hat{\alpha}$, $\hat{k}$ и $\hat{p}$ для которых выполняются равенства

$$\inf_{\alpha,k} \|x - \alpha\varphi_k\|_X = \|x - \hat{\alpha}\varphi_{\hat{k}}\|_X \tag{3.1.1}$$

и

$$\inf_{p} \|x- < x, \psi_p > \varphi_p\|_X = \|x- < x, \psi_{\hat{p}} > \varphi_{\hat{p}}\|_X. \tag{3.1.2}$$

Положим $G_1(x,\varphi) = \hat{\alpha}\varphi_{\hat{k}}$ и $\tilde{G}_1(x,\varphi) =< x, \psi_{\hat{p}} > \varphi_{\hat{p}}$. Фактически $G_1(x,\varphi)$ есть одночленный наилучший аппроксимант, а $\tilde{G}_1(x,\varphi)$ самое близкое слагаемое в разложении элемента x по системе φ. Отметим, что соотношения (3.1.1) и (3.1.2) могут удовлетворяться при многих значениях $\hat{\alpha}, \hat{k}$ и $\hat{p}$.

Для каждого элемента $x \in X$ определим последовательности $\{G_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{G}_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ индукцией по k. Для натурального k определим

$$G_{k+1}(x,\varphi) = G_k(x,\varphi) + G_1(x - G_k(x,\varphi),\varphi)$$

и

$$\tilde{G}_{k+1}(x,\varphi) = \tilde{G}_k(x,\varphi) + \tilde{G}_1(x - \tilde{G}_k(x,\varphi),\varphi).$$

Обозначим

$$R_k(x,\varphi) = x - G_k(x,\varphi)$$

и

$$\tilde{R}_k(x,\varphi) = x - \tilde{G}_k(x,\varphi).$$

Пользуясь этими обозначениями легко видеть, что

$$R_{k+1}(x,\varphi) = x - G_{k+1}(x,\varphi) = x - G_k(x,\varphi) -$$

$$-G_1(x - G_k(x,\varphi),\varphi) = R_1(x - G_k(x,\varphi),\varphi)$$

т.е.

$$R_{k+1}(x,\varphi) = R_1(R_k(x,\varphi),\varphi).$$

Аналогично,

$$\tilde{R}_{k+1}(x,\varphi) = \tilde{R}_1(\tilde{R}_k(x,\varphi),\varphi).$$

Но $R_1(x,\varphi)$ получается из элемента x , вычитанием одночленного наилучшего аппроксиманта. Итак, последовательность $\{R_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ строится так, что каждый ее член является остатком наилучшего одночленного приближения предыдущего члена. Последовательность $\{G_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ называется X-жадным алгоритмом элемента x по системе φ (см. [1]). Последовательность $\{\tilde{G}_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем X-жадный по разложению алгоритм элемента x по системе φ.

Последовательности $\{G_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{G}_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ могут определяться неоднозначно (из-за неоднозначности выбора $\hat{\alpha}$ и $\hat{k}$ из (3.1.1) и $\hat{p}$ из (3.1.2)) и поэтому для каждого $x \in X$ могут оказаться много X-жадных и X-жадных по разложению алгоритмов по системе φ.

Легко заметить, что когда $X = L^2$ а φ является ортогональной системой, то L^2-жадный и L^2-жадный по разложению алгоритмы совпадают и $G_m(x,\varphi)$ есть m-членный наилучший аппроксимант функции x по системе φ.

В. Н. Темляковым был поставлен вопрос: сходятся ли все L^p - жадные алгоритмы всех функций $x \in L^p(0,1)$ при $p > 1$ к x по системе Хаара (см. [1] стр 7,20).

$\{\chi_k^{(m)}\}_{m=1}^{2^k}$ назовем k-той пачкой системы Хаара. Нижний индекс функции $\chi_k^{(m)}$ назовем ее рангом.

В этом параграфе доказывается, что существует L^1-жадный алгоритм по системе Хаара для каждой функции $f \in L^1(0,1)$.

Теорема 3.1 *Для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существуют числа $\hat{\alpha}$ и $\hat{k}$ для которых выполняется равенство*

$$\inf_{\alpha,k} \|f - \alpha\chi_k\|_1 = \|f - \hat{\alpha}\chi_{\hat{k}}\|_1. \tag{3.2}$$

Следует отметить, что не всякие ортогональные системы обладают этим свойством (см. например [1],[43]). В частности, для полной ортонормированной системы $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ построенной М. Г. Григоряном [43], для любой функции $f \in L^1(0,1)$ имеет место равенство

$$\inf_{\alpha,k} \|f - \alpha\omega_k\|_1 = 0.$$

Вопрос аналогичный поставленному В. Н. Темляковым (см. выше) для $p = 1$ имеет отрицательный ответ по следующим соображениям. Для функции $f = \chi_1 + \chi_2$ справедливо $\inf_{\alpha,k} \|f - \alpha\chi_k\|_{L^1(0,1)} = \|f\|_{L^1(0,1)}$, следовательно можем выбрать $G_1(f,\chi) = 0$. Далее выбирая $G_m(f,\chi) = 0$ для $m = 2,3,\dots$ получим L^1-жадный алгоритм функции f, который не сходится к f по L^1 норме. Но мы можем выбрать $G_1(f,\chi) = \chi_1$ и тогда получится, что $G_2(f,\chi) = \chi_1 + \chi_2 = f$. В этом случае получается последовательность $G_m(f,\chi) = f,\ m = 2,3,\dots$, сходящийся к f.

Возникает вопрос: можно ли для любой функции $f \in L^1(0,1)$ выбрать L^1-жадный алгоритм по системе Хаара сходящийся к f по норме $L^1(0,1)$.

В этом параграфе доказывается что этот вопрос имеет отрицательный ответ.

Теорема 3.2 *Существует функция $f \in L^1(0,1)$ для которой ни один L^1 - жадный алгоритм по системе Хаара не сходится к f.*

Теорема 3.3 *Существует функция $f \in L^1(0,1)$ для которой ни один L^1 - жадный по разложению алгоритм по системе Хаара не сходится к f.*

Обозначения и вспомогательные утверждения

Для любых чисел $t_1 < t_2$ и для любой функции $f \in L^1(t_1,t_2)$ определим множества

$$\begin{aligned} M_\alpha = M_\alpha(f,t_1,t_2) = \{x \in (t_1,t_2)\ :\ f(x) \geq \alpha\} \\ N_\alpha = N_\alpha(f,t_1,t_2) = \{x \in (t_1,t_2)\ :\ f(x) < \alpha\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Определим также

$$B = B(f,t_1,t_2) = \big\{\alpha \in R\ :\ m\{x \in (t_1,t_2)\ :\ f(x) > \alpha\} > \frac{t_2 - t_1}{2}\big\}$$

и

$$D = D(f, t_1, t_2) = \big\{\alpha \in R \ : \ m\{x \in (t_1, t_2) \ : \ f(x) < \alpha\} > \frac{t_2 - t_1}{2}\big\}. \qquad (3.4)$$

где $m(A)$-мера Лебега множества A. Легко видеть, что справедливо

Утверждение 3.1. *Для любых чисел $t_1 < t_2$ и для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$ имеет место*

1) M_α является дополнением N_α на интервале (t_1, t_2),

2) $B \neq \emptyset$ и $D \neq \emptyset$,

3) $B \cap D = \emptyset$,

4) B и D суть полуоси,

5) $\alpha_1 \in B, \quad \alpha_2 \in D \Rightarrow \ \alpha_1 < \alpha_2$.

Обозначим

$$\alpha_* = \alpha_*(f, t_1, t_2) = \sup B(f, t_1, t_2)$$

$$\alpha^* = \alpha^*(f, t_1, t_2) = \inf D(f, t_1, t_2).$$

Из утверждения 3.1 следует, что α_* и α^* конечны и

$$\alpha_* \leq \alpha^*. \qquad (3.5)$$

Определим функцию

$$F(\alpha) = F_{(f,t_1,t_2)}(\alpha) = \|f - \alpha\|_{L^1(t_1,t_2)}. \qquad (3.6)$$

Лемма 3.1 *Для любых чисел $t_1 < t_2$ и для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$ функция $F(\alpha)$ удовлетворяет условиям*

1) $F(\alpha) \in C(-\infty, \infty)$,

2) $F(\alpha)$ строго убывает на $(-\infty, \alpha_*]$ и строго возрастает на $[\alpha^*, +\infty)$,

3) если $\alpha_* < \alpha^*$ (см. (3.5)), то $F(\alpha)$ постоянна на отрезке $[\alpha_*, \alpha^*]$.

Доказательство леммы 3.1 1) Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ имеем

$$\mid F(\alpha_2) - F(\alpha_1) \mid = \mid \|f(x) - \alpha_1\|_{L^1(t_1,t_2)} - \|f(x) - \alpha_2\|_{L^1(t_1,t_2)} \mid \leq$$

$$\leq \|\alpha_2 - \alpha_1\|_{L^1(t_1,t_2)} = (t_2 - t_1) \mid \alpha_2 - \alpha_1 \mid$$

откуда следует непрерывность $F(\alpha)$.

2) Пусть $\alpha_2 < \alpha_1$. Положим

$$M_1 = M_{\alpha_1},\ N_1 = N_{\alpha_1},\ M_2 = M_{\alpha_2},\ N_2 = N_{\alpha_2}.$$

Согласно (3.3),

$$M_1 \subseteq M_2,\ N_2 \subseteq N_1. \tag{3.7}$$

следовательно (см. пункт 1) утверждения 3.1),

$$M_2 \setminus M_1 = N_1 \setminus N_2. \tag{3.8}$$

Из (3.6) и (3.7) имеем, что

$$F(\alpha_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mid f(x) - \alpha_1 \mid dx = \int_{M_1} (f(x) - \alpha_1) dx + \int_{N_1} (\alpha_1 - f(x)) dx =$$

$$= \int_{M_2} (f(x) - \alpha_1) dx - \int_{M_2 \setminus M_1} (f(x) - \alpha_1) dx + \int_{N_2} (\alpha_1 - f(x)) dx +$$

$$+ \int_{N_1 \setminus N_2} (\alpha_1 - f(x)) dx = \int_{M_2} (f(x) - \alpha_2) dx + \int_{M_2} (\alpha_2 - \alpha_1) dx -$$

$$- \int_{M_2 \setminus M_1} (f(x) - \alpha_1) dx + \int_{N_2} (\alpha_2 - f(x)) dx + \int_{N_2} (\alpha_1 - \alpha_2) dx +$$

$$+ \int_{N_1 \setminus N_2} (\alpha_1 - f(x)) dx = F(\alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)[m(M_2) - m(N_2)] +$$

$$+ \int_{N_1 \setminus N_2} (\alpha_1 - f(x)) dx - \int_{M_2 \setminus M_1} (f(x) - \alpha_1) dx,$$

откуда, с учетом (3.8), получим

$$F(\alpha_1) = F(\alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)[m(M_2) - m(N_2)] + 2 \int_{N_1 \setminus N_2} [\alpha_1 - f(x)] dx. \tag{3.9}$$

Теперь пусть $\alpha_2 \in D$. Из определений (3.3) и (3.4) имеем

$$m(N_2) > \frac{t_2 - t_1}{2}.$$

Отсюда и из пункта 1) утверждения 3.1 следует что $m(M_2) < \frac{t_2-t_1}{2}$. Следовательно

$$m(M_2) - m(N_2) < 0. \tag{3.10}$$

На множестве N_1 имеем $f(x) < \alpha_1$. Поэтому

$$\int_{N_1/N_2} (\alpha_1 - f(x))dx \geq 0. \tag{3.11}$$

Учитывая (3.9)-(3.11), получим

$$F(\alpha_1) > F(\alpha_2).$$

Итак на полуоси D функция F строго возрастает. Учитывая также, что F является непрерывной функцией получим первую часть утверждения 2) леммы. Аналогичным образом можно доказать, что $F(\alpha)$ строго убывает на $(-\infty, \alpha_*]$.

3) Пусть $\alpha \in (\alpha_*, \alpha^*)$. Тогда $\alpha \notin B$ и $\alpha \notin D$ и согласно (3.4),

$$\begin{array}{c} m\{x \in (t_1, t_2) \ : \ f(x) > \alpha\} \leq \frac{t_2-t_1}{2} \\ m\{x \in (t_1, t_2) \ : \ f(x) < \alpha\} \leq \frac{t_2-t_1}{2}. \end{array} \tag{3.12}$$

Предположим, что существует $\overline{\alpha} \in (\alpha_*, \alpha^*)$, для которой во втором выражении (3.12) выполняется строгое неравенство, т. е. $m\{x \in (t_1, t_2) \ : \ f(x) < \overline{\alpha}\} < \frac{t_2-t_1}{2}$. Тогда

$$m\{x \in (t_1, t_2) \ : \ f(x) > \frac{\overline{\alpha} + \alpha_*}{2}\} \geq m\{x \in (t_1, t_2) \ : \ f(x) \geq \overline{\alpha}\} > \frac{t_2 - t_1}{2}.$$

Следовательно $\frac{\overline{\alpha}+\alpha_*}{2} \in B$, что противоречит тому, что $\frac{\overline{\alpha}+\alpha_*}{2} > \alpha_* = supB$. Значит

$$m\{x \in (t_1, t_2) \ : \ f(x) < \alpha\} = \frac{t_2 - t_1}{2} \text{ для всех } \alpha \in (\alpha_*, \alpha^*).$$

Итак, для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha_*, \alpha^*)$, $\alpha_2 < \alpha_1$ имеем $m(N_2) = m(M_2) = \frac{t_2-t_1}{2}$ и $m(N_1 \setminus N_2) = 0$ (так как $N_2 \subseteq N_1$ и $m(N_1) = m(N_2)$). Отсюда и из (3.9) заключаем, что

$$F(\alpha_1) = F(\alpha_2).$$

Это означает, что функция $F(\alpha)$ постоянна на интервале (α_*, α^*), следовательно (в силу непрерывности) на отрезке $[\alpha_*, \alpha^*]$. Лемма 3.1 доказана.

Из леммы 3.1 вытекает

Следствие 3.1 *Для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$, функция $F_{(f,t_1,t_2)}$ принимает свое минимальное значение только на отрезке $[\alpha_*, \alpha^*]$.*

Определим функцию

$$\chi_{(t_1,t_2)}(x) = \begin{cases} 1 & : \quad \text{если } t_1 < x \le \frac{t_1+t_2}{2}, \\ \\ -1 & : \quad \text{если } \frac{t_1+t_2}{2} < x < t_2 \end{cases}$$

и положим $f_{(t_1,t_2)} = f \cdot \chi_{(t_1,t_2)}$. Заметим, что

$$\|f - \alpha\chi_{(t_1,t_2)}\|_{L^1(t_1,t_2)} = \|f_{(t_1,t_2)} - \alpha\|_{L^1(t_1,t_2)} = F_{(f_{(t_1,t_2)},t_1,t_2)}(\alpha). \tag{3.13}$$

Из леммы 3.1 и (3.3) вытекает

Утверждение 3.2 *Для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$ равенство*

$$\inf_{\alpha} \|f - \alpha\chi_{(t_1,t_2)}\|_{L^1(t_1,t_2)} = \|f - \hat{\alpha}\chi_{(t_1,t_2)}\|_{L^1(t_1,t_2)} \tag{3.14}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\hat{\alpha} \in [\alpha_*(f_{(t_1,t_2)}, t_1, t_2), \alpha^*(f_{(t_1,t_2)}, t_1, t_2)].$$

Определение. *Пусть $f, g \in L^1(t_1, t_2)$ и*

$$M = \|f\|_{L^1(t_1,t_2)} - \inf_{\alpha} \|f - \alpha g\|_{L^1(t_1,t_2)}.$$

Если $M > 0$ то скажем, что функция g понижает норму f на M. А если $M = 0$ то скажем, что g не может понизить норму f.

Доказательство теоремы 3.1 Обозначим

$$\inf_{\alpha,k} \|f - \alpha\chi_k\|_{L^1(0,1)} = \Delta$$

Если $\Delta = \|f\|_{L^1(0,1)}$, то (3.2) имеет место при $\hat{\alpha} = 0$. Допустим $\Delta < \|f\|_{L^1(0,1)}$. Тогда при некоторых α_1 и k_1 имеет место

$$\|f-\alpha_1\chi_{k_1}\|_{L^1(0,1)} < \Delta + \frac{\|f\|_{L^1(0,1)}-\Delta}{2}.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\int_e \mid f(x) \mid dx < \frac{\|f\|_{L^1(0,1)}-\Delta}{2}, \text{ если } e \subset [0,1],\ m(e) < \delta_0.$$

Обозначим $r_0 = 1 + [-log_2\delta_0]$. Тогда для функции χ_n ранга $r > r_0$ будем иметь

$$m(supp(\chi_n)) = 2^{-r} < 2^{-r_0} < \delta_0,$$

и поэтому

$$\|f-\alpha\chi_n\|_{L^1(0,1)} \geq \|f-\alpha\chi_n\|_{L^1((0,1)\setminus supp(\chi_n))} = \|f\|_{L^1(0,1)} - \|f\|_{L^1(supp(\chi_n))} >$$

$$> \|f\|_{L^1(0,1)} - \frac{\|f\|_{L^1(0,1)}-\Delta}{2} > \|f-\alpha_1\chi_{k_1}\|_{L^1(0,1)}.$$

То есть фунцкии системы Хаара рангом больше r_0 понижают норму f меньше, чем функция χ_{k_1}. Следовательно лишь конечное число функций могут понизить норму f больше, чем функция χ_{k_1}. Для каждой из них, учитывая утверждение 3.2 (следствие 3.1 для функции χ_1), убеждаемся в справедливости теоремы 3.1.

Лемма 3.2 *Пусть для функции $f \in L^1(t_1,t_2)$ справедливы соотношения $0 \notin B(f,t_1,t_2)$ и $0 \notin D(f,t_1,t_2)$. Тогда функция $\Psi \equiv 1$ не может понизить норму f.*

Доказательство леммы 3.2 Учитывая (3.6) и следствие 3.1, можем утверждать, что

$$\inf_\alpha \|f-\alpha\Psi\|_{L^1(t_1,t_2)} = \inf_\alpha \|f-\alpha\|_{L^1(t_1,t_2)} = \inf_\alpha F_{(f,t_1,t_2)}(\alpha) = F(0) = \|f\|_{L^1(t_1,t_2)}.$$

Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3 *Пусть функция $f \in L^1(t_1,t_2)$ не меняет свой знак на интервале (t_1,t_2). Тогда функция $\chi_{(t_1,t_2)}$ не может понизить норму f.*

Доказательство леммы 3.3 Для определенности положим $f \geq 0$. Так как

$$m\{x \in (t_1, t_2) \ : \ f_{(t_1,t_2)}(x) > 0\} = m\{x \in (t_1, \frac{t_1+t_2}{2}] \ : \ f(x) > 0\} +$$

$$+ m\{x \in (\frac{t_1+t_2}{2}, t_2) \ : \ f(x) < 0\} \leq m(t_1, \frac{t_1+t_2}{2}) = \frac{t_2-t_1}{2}$$

то $0 \notin B(f_{(t_1,t_2)}, t_1, t_2)$. Аналогично,

$$m\{x \in (t_1, t_2) \ : \ f_{(t_1,t_2)}(x) < 0\} = m\{x \in (t_1, \frac{t_1+t_2}{2}] \ : \ f(x) < 0\} +$$

$$+ m\{x \in (\frac{t_1+t_2}{2}, t_2) \ : \ f(x) > 0\} \leq m(\frac{t_1+t_2}{2}, t_2) = \frac{t_2-t_1}{2}$$

и поэтому $0 \notin D(f_{(t_1,t_2)}, t_1, t_2)$. Согласно (3.13) и лемме 3.2 убеждаемся в справедливости леммы 3.3.

Расходимость L^1-жадного алгоритма.

Пусть

$$P(x) = \begin{cases} 1 \ : \ \text{если} \ \ 0 \leq x < \frac{5}{8}, \ \frac{3}{4} \leq x < \frac{7}{8} \\ -1 \ : \ \text{если} \ \ \frac{5}{8} \leq x < \frac{3}{4}, \ \frac{7}{8} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Для каждого натурального $r \in N$ обозначим через Φ_r совокупность всех функций вида

$$\varphi(x) = \begin{cases} P(2^{k+1}x - 1) : & \text{если} \quad 2^{-1-k} \leq x < 2^{-k} \quad k = r, r+1, \ldots \\ 0 : & \text{если} \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ g(x) : & \text{если} \ x \in [\frac{1}{2^r}, \frac{1}{2}], \end{cases} \tag{3.15}$$

где g неотрицательная, интегрируемая функция на $[\frac{1}{2^r}, \frac{1}{2}]$ для которой $m\{x \in (\frac{1}{2^{1+p}}, \frac{1}{2^p}) \ : \ g(x) = 0\} \geq \frac{3}{2^{p+3}}$ для всех $p = 1, 2, \ldots, r-1$.

Очевидно, что $\Phi_r \subset L^1(0,1)$ для всех натуральных r.

Лемма 3.4 *Пусть $\varphi \in \Phi_r$ при некотором натуральном r. Тогда*

1) ни одна функция Хаара $\chi_k^{(1)}$ не может понизить норму φ,

2) ни одна функция Хаара ранга меньше $(r+1)$ не может понизить норму φ.

Доказательство леммы 3.4 1) Докажем, что функция $\chi_{k-1}^{(1)}$ не может понизить норму φ при любом натуральном $k > 1$. Когда $k < r+1$ то,

$$m\{x \in (0,2^{1-k}) \ : \ \varphi_{(0,2^{1-k})}(x) > 0\} = m\{x \in (0,2^{-k}] \ : \ \varphi(x) > 0\} +$$

$$+ m\{x \in (2^{-k},2^{1-k}) \ : \ \varphi(x) < 0\} =$$

$$= m\{x \in (0,2^{-k}] \ : \ \varphi(x) > 0\} \leq 2^{-k} = \frac{m(0,2^{1-k})}{2}.$$

То есть $0 \notin B(\varphi_{(0,2^{1-k})}, 0, 2^{1-k})$. Аналогично,

$$m\{x \in (0,2^{1-k}) \ : \ \varphi_{(0,2^{1-k})}(x) < 0\} = m\{x \in (0,2^{-k}] \ : \ \varphi(x) < 0\} +$$

$$+ m\{x \in (2^{-k},2^{1-k}) \ : \ \varphi_(x) > 0\} = \frac{1}{4 \cdot 2^r} +$$

$$+ m\{x \in (2^{-k},2^{1-k}) \ : \ \varphi(x) > 0\} \leq \frac{1}{4 \cdot 2^r} + \frac{1}{4 \cdot 2^k} \leq \frac{m(0,2^{1-k})}{2}$$

и поэтому $0 \notin D(\varphi_{(0,2^{1-k})}, 0, 2^{1-k})$. Учитывая (3.13) и лемму 3.2, заключаем, что функция $\chi_{k-1}^{(1)}$, где $k < r+1$, не может понизить норму φ. Теперь пусть $k \geq r+1$. В этом случае

$$m\{x \in (0,2^{1-k}) \ : \ \varphi_{(0,2^{1-k})}(x) > 0\} = m\{x \in (0,2^{-k}] \ : \ \varphi(x) > 0\} +$$

$$+ m\{x \in (2^{-k},2^{1-k}) \ : \ \varphi_(x) < 0\} = 2^{-k}(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{m(0,2^{1-k})}{2}.$$

$$m\{x \in (0,2^{1-k}) \ : \ \varphi_{(0,2^{1-k})}(x) < 0\} = m\{x \in (0,2^{-k}) \ : \ \varphi(x) < 0\} +$$

$$+ m\{x \in (2^{-k},2^{1-k}) \ : \ \varphi_(x) > 0\} = 2^{-k}(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = \frac{m(0,2^{1-k})}{2}$$

то есть $0 \notin B(\varphi_{(0,2^{1-k})}, 0, 2^{1-k})$, $0 \notin D(\varphi_{(0,2^{1-k})}, 0, 2^{1-k})$ и поэтому функция $\chi_{k-1}^{(1)}$, где $k \geq r+1$ не может понизить норму φ. Первая часть леммы доказана.

2) Функция $\chi_1 \equiv 1$ не может понизить норму φ согласно лемме 3.2. То, что функции Хаара $\chi_k^{(1)}$ не могут понизить норму φ мы уже доказали. А функция $\chi_k^{(p)}$ с $p > 1$ и $k < r+1$ имеет носитель

$$(\frac{p-1}{2^k}, \frac{p}{2^k}) \subset [2^{-r}, 1],$$

где функция φ не меняет свой знак, а это, согласно лемме 3.3, означает, что функция $\chi_k^{(p)}$ не может понизить норму φ. Лемма 3.4 доказана.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 3.2 докажем следующую теорему

Теорема 3.4 *Для любого натурального r и для каждой функции $\varphi \in \Phi_r$ существуют единственные $\hat{k}, \hat{p}$ и $\hat{\alpha}$ для которых*

$$\min_{\alpha,k,p} \|\varphi - \alpha\chi_k^{(p)}\|_{L^1(0,1)} = \|\varphi - \hat{\alpha}\chi_{\hat{k}}^{(\hat{p})}\|_{L^1(0,1)} = \|\varphi\|_{L^1(0,1)} - \frac{1}{2^{r+2}},$$

при этом $R_1(\varphi, \chi) \in \Phi_{r+1}$.

Доказательство теоремы 3.4 Сначала вычислим насколько понижает норму φ функция $\chi_{r+1}^{(2)}$. Для каждой $\alpha < 1$

$$m\{x \in (\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r}) \ : \ \varphi_{(\frac{1}{2^{1+r}}, \frac{1}{2^r})}(x) > \alpha\} = \frac{1}{2^{r+2}} + \frac{1}{2^{r+3}} > \frac{m(\frac{1}{2^{1+r}}, \frac{1}{2^r})}{2},$$

то есть все числа меньше единицы принадлежат множеству $B(\varphi_{(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r})}, \frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r})$. Аналогичным образом можно показать, что все числа больше единицы принадлежат множеству $D(\varphi_{(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r})}, \frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r})$. Согласно утверждению 3.1,

$$\sup B(\varphi_{(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r})}, \frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r}) = \inf D(\varphi_{(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r})}, \frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r}) = 1.$$

С учетом утверждения 3.2 заключаем, что

$$\min_{\alpha} \|\varphi - \alpha\chi_{r+2}^{(2)}\|_{L^1(0,1)} = \|\varphi - \chi_{supp(\chi_{r+2}^{(2)})}\|_{L^1(0,1)} =$$

$$= \|\varphi\|_{L^1(0,1)} - \frac{1}{2^{r+2}}.$$

Это означает что функция $\chi^{(2)}_{r+1}$ понижает норму φ на $\frac{1}{2^{r+2}}$. Теперь покажем, что остальные функции $\chi^{(p)}_k$ системы Хаара понижают норму φ меньше, чем $\frac{1}{2^{r+2}}$ (или вообще не могут понизить).

Пусть $k \geq r+3$. Меры носителей таких функций не превосходят $\frac{1}{2^{r+3}}$. Там, где φ не меняет свой знак, функция $\chi^{(p)}_k$ не может понизить норму φ согласно лемме 3.3, а там, где φ меняет свой знак, справедливо неравенство $|\ \varphi\ |\leq 1$, следовательно функция $\chi^{(p)}_k$ не может понизить норму φ более, чем на $\frac{1}{2^{r+3}}$.

Функции рангом $k < r+1$ не могут понизить норму φ согласно лемме 3.4. Среди функций рангом $(r+1)$ или $(r+2)$ только $\chi^{(1)}_{r+1}, \chi^{(2)}_{r+1}, \chi^{(1)}_{r+2}, \chi^{(2)}_{r+2}$ и $\chi^{(4)}_{r+4}$ отличны от нуля в областях, где φ меняет свой знак (согласно лемме 3.3 это является необходимым условием для понижения нормы). Функции $\chi^{(1)}_{r+1}$ и $\chi^{(1)}_{r+2}$ не могут понизить норму φ согласно лемме 3.4. Нетрудно убедится, что $\chi^{(4)}_{r+2}$ не может понизить норму φ, а $\chi^{(2)}_{r+2}$ понижает на $\frac{1}{2^{r+3}}$.

Итак

$$R_1(\varphi,\chi) = \varphi - \chi_{supp(\chi^{(2)}_{r+1})} = \varphi - \frac{1}{2^{r+1}}\chi^{(2)}_{r+1}.$$

Легко убедиться, что $R_1(\varphi,\chi) \in \Phi_{r+1}$. Теорема 3.4 доказана.

Доказательство теоремы 3.2 В качестве f возьмем $f \in \Phi_1$ (в Φ_1 содержится только одна функция). Согласно теореме 3.4

$$R_1(f,\chi) = f - \frac{1}{4}\chi^{(2)}_2 \in \Phi_2,\ \|R_1(f,\chi)\| = \|f\| - \frac{1}{2^3}$$

Применив теорему 3.4 несколько раз можем утверждать, что

$$R_{n+1}(f,\chi) \in \Phi_{n+2}$$
$$\|R_{n+1}(f,\chi)\| = \|R_n(f,\chi)\| - \tfrac{1}{2^{n+3}} = \ldots = \|f\| - \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k}, \quad n = 1,2,\ldots$$

Заметим, что последовательность $R_n(f,\chi)$ определяется однозначно. Учитывая, что $\|f\|_{L^1(0,1)} = \frac{1}{2}$, заключаем

$$\lim_{n\to\infty} \|f - G_n(f,\chi)\|_{L^1(0,1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}(1+2^{-n}) = \frac{1}{4} > 0,$$

то есть единственный L^1-жадный алгоритм функции f по системе Хаара не сходится к f. Теорема 3.2 доказана.

Из доказательства теоремы ясно, что L^1-жадный алгоритм любой функции из $f \in \Phi_r$ по системе Хаара определяется однозначно и не сходится к f.

Вычислив коэффициенты Фурье функции f из доказательства теоремы 3.2, убеждаемся, что

$$f = \frac{\chi_0^{(0)} + \chi_0^{(1)}}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \left[\chi_k^{(2)} + \frac{\chi_{k+2}^{(7)} + \chi_{k+2}^{(8)}}{2} \right] \tag{3.16}$$

в то время как для L^1-жадного алгортма по системе Хаара для функции f получается

$$G_n(f, \chi) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\chi_k^{(2)}}{2^k} \tag{3.17}$$

Сравнивая эти выражения заметим, что коэффициент при $\chi_k^{(2)}$ в (3.17) вдвое больше, чем в (3.16). Может быть в этом и состоит причина, по которой L^1-жадный алгоритм по системе Хаара функции f не сходится к f? Может быть, условием (3.1.1) мы даем слишком большую свободу выбора для определения L^1-жадного алгоритма? Ответы на эти вопросы дает L^1-жадный по разложению алгоритм. Этот алгоритм отличается от L^1-жадного алгоритма тем, что коэффициент при φ_n в (3.1.2) не может быть произвольным, а является коэффициентом Фурье данной функции.

Лемма 3.5 *Для $f \in \Phi_1$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы соотношения*

$$< \tilde{R}_m(f, \chi), \chi_0^{(0)} >= \frac{1}{4}, \quad < \tilde{R}_m(f, \chi), \chi_0^{(1)} >= \frac{1}{4}. \tag{3.18}$$

где $\tilde{R}_0(f, \chi) = f$.

Доказательство леммы 3.5 Сначала заметим, что f имеет вид (3.16). Доказательство проведем индукцией по m. При $m = 0$ (3.18) следует из (3.16). Предположим, что (3.18) справедливо для некоторого $m = 0, 1, \ldots$ и докажем, что будет справедливым и для $m + 1$. Разложение Фурье функции $\tilde{R}_m(f, \chi)$ по системе Хаара будет отличаться от (3.16) только тем, что будут отсутствовать m слагаемых, при этом первые 2 слагаемые будут присутствовать (предположение индукции). Следовательно при некотором натуральном $k = K_m$ все три слагаемые в квадратных скобках (3.16) будут присутствовать в ряде Фурье функции $\tilde{R}_m(f,\chi)$ по системе Хаара. Именно эти три слагаемые вместе с $\chi_0^{(0)}$ и $\chi_0^{(1)}$ определяют значения функции f на $supp(\chi_{K_m}^{(2)})$. Следовательно на $supp(\chi_{K_m}^{(2)})$ функции f и $\tilde{R}_m(f,\chi)$ совпадают. Но легко заметить, что

$$\|f - < f, \chi_{K_m}^{(2)} > \chi_{K_m}^{(2)}\| = \|f - \frac{1}{2^{K_m+1}}\chi_{K_m}^{(2)}\| < \|f\|.$$

Следовательно,

$$\|\tilde{R}_m(f,\chi) - \frac{1}{2^{K_m+1}}\chi_{K_m}^{(2)}\| < \|\tilde{R}_m(f,\chi)\|.$$

Это означает, что $\|\tilde{R}_{m+1}(f,\chi)\| < \|\tilde{R}_m(f,\chi)\|$. Лемма будет доказана, если покажем что функции $\chi_0^{(0)}$ и $\chi_0^{(1)}$ не могут понизить норму $\tilde{R}_m(f,\chi)$. Это следует из леммы 3.2 и утверждения 3.2, так как функция $\tilde{R}_m(f,\chi)$ равняется нулю на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$. Лемма 3.5 доказана.

Доказательство теоремы 3.3 В качестве f опять возьмем функцию из Φ_1. Хотя L^1-жадный по разложению алгоритм для f определяется неоднозначно (как L^1-жадный алгоритм), для всех этих последовательностей справедлива лемма 3.5. Это означает, что ни один L^1-жадный по разложению алгоритм функции f по системе Хаара не сходится к f. Теорема 3.3 доказана.

Заключение

В диссертационной работе получены следующие результаты:

а) Описаны подсистемы системы Хаара, которые являются квази-гриди базисом в $L^1(0,1)$, на замыкании своей линейной оболочки.

б) Описаны подсистемы системы Хаара, которые являются почти гриди базисом в $L^1(0,1)$, на замыкании своей линейной оболочки.

в) Доказана, что ни одна система типа Хаара не является квази-гриди базисом в $L^1(0,1)$.

г) Построена система типа Хаара $\{\{h_i^{(j)}\}_{j=1}^{2^i}\}_{i=0}^{\infty}$, для которой подсистема $\{\{h_{2i}^{(j)}\}_{j=1}^{2^{2i}}\}_{i=0}^{\infty}$ не является квази-гриди базисом в $L^1(0,1)$, на замыкании своей линейной оболочки.

д) Для любого $0<\epsilon<1$ существует измеримое множество $E\subset[0,1]$ с мерой $\mid E\mid>1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f\in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f}\in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E, и члены разложения $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\tilde{f},\chi)\chi_n$ функции $\tilde{f}$ по системе Хаара можно переставить так, чтобы для всех натуральных m выполнялись соотношения

$$1)\quad c_{\varrho(m)}(\tilde{f},\chi)\ >\ c_{\varrho(m+1)}(\tilde{f},\chi),$$

$$2)\quad \|G_m(\tilde{f},\chi)\|\ \le\ 3\|\tilde{f}\|\le 12\|f\|,$$

$$3)\quad \lim_{m\to\infty}\|G_m(\tilde{f},\chi)-\tilde{f}\|=0.$$

е) Каково бы не было измеримое множество $E\subset[0,1]$ с мерой $0<\mid E\mid<1$ существует функция $f_0\in L^1(0,1)$ такая, что если некоторая функция $f\in L^1(0,1)$ совпадает с f_0 на E, то последовательность $\{\mid c_n(f,\chi)\mid\}_{n=1}^{\infty}$ не может быть монотонно убывающей.

ж) Для любого $0 < \epsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1-\epsilon$ и ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i, \quad \text{с} \quad a_i \searrow 0,$$

такие, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E и ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i a_i \varphi_i; \quad \text{где} \;\; \delta_i = 0 \quad \text{или} \;\; 1,$$

который сходится к $\tilde{f}$ в $L^1(0,1)$.

з) Существует функция $f \in L^1(0,1)$, для которой ни один L^1 -жадный алгоритм по системе Хаара не сходится к f.

Литература

[1] Temlyakov V. N., Nonlinear Methods of Approximation, Found. Comput. Math. (2003) 3:33-107.

[2] DeVore R. A., Temlyakov V. N., Some remarks on greedy algorythms, Advances in Computational Math. 1996, N5, 173-187.

[3] Temlyakov V. N., Greedy Algoritm and m-term Trigonometric approximation, Constructive Approx., v. 14(1998), 569-587.

[4] Temlyakov V. N., The best m-term approximation and Greedy Algorithms, Advances in Comp. Math. 1998, N8, 249-265.

[5] Temlyakov V. N., Non-linear m-term approximation with regard to the multivariate Haar system, East Journal on Approximations, v. 4(1998), N1, 87-106.

[6] Dilworth S.J. , Kalton N.J. , Kutzarova D. , Temlyakov V.N. , The Tresholding Greedy Algorithm, Greedy Basis, and Duality, IMI-Preprints Series 23(2001), 1-23.

[7] Konyagin S.V. and Temlyakov V.N., A remark on Greedy approximation in Banach spaces, East Journal on Approximations, v.5(1999), N1, 1-15.

[8] Wojtaszczyk P., Greedy Algoritm for General Biorthogonal Systems, Journal of Approximation Theory, v.107(2000), 293-314.

[9] Dilworth S.J., Kutzarova D. and Wojtaszczyk P., On Approximate l_1 systems in Banach spaces, Journal of Approximation Theory 114(2002), N2, 214-241.

[10] A. Kamont, General Haar systems and greedy approximation, Studia Mathematica 145(2001), N2, 165-184.

[11] Gevorkyan G. G., Kamont A., Unconditionality of general Franklin systems in $L^p(0,1), \quad 1 < p < \infty$, Studia Mathematica 164(2004), 161-201.

[12] Геворкян Г., Камонт А., Два замечания о квази-гриди базисах в пространстве L_1, Известия НАН Армении 2005, N1.

[13] Григорян М.Г., О сходимости в метрике L^p гриди алгоритма по тригонометрической системе, Изв. НАН Армении, 2004, N4, 89-116.

[14] M. G. Grigoryan, On convergence of greedy algorithm in the norm of L^1, International Conference, Mathematics in Armenia, Advances and Perspectives, September 30-October 7, 2003, Tsahkadzor.

[15] S. A. Episkoposian, On the systems is not Quasi-Greedy basis, ISAAC International Conference, 2002, Yerevan, Armenia.

[16] A. A. Sargsyan, Some Shauder subsystems as not quasi-greedy systems in $C[0,1]$, Dokladi NAN Armenii, v 105(2005), N4, 25-30.

[17] Саакян А. А., О сходимости гриди алгоритма для непрерывных функций после замены переменных, Известия НАН Армении, Математика, т.37(2002), N4, 63-72.

[18] Gribonval R. , Nielsen M. , Some remarks on nonlinear approximation with Shauder bases, East Journal on Approximations, v. 7(2001), N3, 267-285.

[19] Dilworth S.J. , Kalton N.J. , Kutzarova D., On the existence of almost greedy bases in Banach spaces, Studia Mathematica v. 159(2003), N1, 67-101.

[20] Лузин Н.Н., К основной теореме интегрального исчисления, Матем. Сб., т. 28(1912), N2, 266-294.

[21] Меньшов Д.Е., О равномерной сходимости рядов Фурье, Матем. Сб., т.53(1942), N2, 67-96.

[22] Талалян А. А., О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции, Мат. Заметки, т.33(1983), N5, 715-722.

[23] Арутюнян Ф. Г., О рядах по системе Хаара, Доклады АН Арм. ССР. т. 42(1966), N3, 134-140.

[24] Церетели О.Д., О сходимости почти всюду рядов Фурье, Сообщ. АН Груз. ССР, т. 57(1970), N1, 21-24.

[25] Price J. J., Walsh series and adjustment of functions on small sets, Illineis J. Math., v. 13(1969), 131-136.

[26] Осколков К.И., Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры, ДАН СССР, т. 228(1976), N2, 304-306.

[27] Кашин.Б. С., Об одной полной ортонормированной системе, Матем. Сб., т. 99(1976), 356-365.

[28] Кашин.Б. С., Кошелева Г. Г., Об одном подходе к теоремам об исправлении, Вестник МГУ, Сер. мат. мех., 1988, N 1, 6-8.

[29] Казарян К. С., О некоторых вопросах теории ортогональных рядов, Мат. сб., т.119(1982), N2, 278-298.

[30] Grigorian M. G. , Kazarian K. S. and Soria F., Mean convergence of orthonormal Fourier series of mod. functions, Trans. Amer. Math. Soc. (TAMS), v.352(2000), N8, 3777-3799.

[31] Осипов Р.И., О сходимости рядов по системе Уолша, Изв. АН Арм. ССР (сер. мат.), Т.1(1966), N4, 270-283.

[32] Григорян М.Г., О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам, Мат.Сб., т.181(1990), N8, 1011-1030.

[33] Григорян М.Г., О некоторых свойствах ортогональных систем, Изв. РАН. (сер. мат.), т.57(1993), N5, 75-105.

[34] Григорян М.Г., Об усиленном L^p_μ свойстве, Математический сборник, 2003, N10, 77-106.

[35] Grigorian M. G., On the convergence of Fourier series in the metric of L^1, Analysis Math., v. 17(1991), N3, 211-237.

[36] Grigorian M. G., On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces, Studia. Math., v. 134(1999), N3, 207-216.

[37] Меньшов Д.Е., О рядах Фурье непрерывных функций, Уч.Записки, "Математика 1951, N4, 108-132.

[38] Меньшов Д.Е., О рядах Фурье от суммируемых функций, Тр.Моск. матем. общ-ва, т.1(1952), 5-38.

[39] Хеладзе Ш.В., Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрике L^1, Мат. сб., т. 107(1978), N2, 245-258.

[40] Гоголадзе Л. Д., Зерекидзе Т. Ш., О сопряженных функциях нескольких

переменных, Сообщ. АН Груз. ССР, т. 94(1979), N3, 541-544.

[41] Гулисашвили А.Б., Перестановки, расстановки знаков и сходимость последовательностей операторов, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, т.107(1982), 45-59.

[42] Ульянов П. Л., О рядах по системе Хаара, Матем. сборник, т. 63(1964), N3, 356-391.

[43] Григорян М. Г., Представление функций классов $L^p(0,1),\ 1 \leq p < 2$ ортогональными рядами, ДАН Арм. ССР., т. 67(1978), N5.

[44] Кашин Б. С., Саакян А. А., Ортогональные ряды, Москва, АФЦ 1999.

[45] Gogyan S., On Greedy Approximation in $L^1(0,1)$ with respect to the Haar system, International Conference "Approximation and Probability"20-24 september, 2005, Bedlewo, Poland, p 17.

[46] Gogyan S., On the divergence of greedy approximation in $L^1(0,1)$ with respect to general Haar systems International Conference "Harmonic analysis and approximations, III 20-27 september, 2005, Tsahkadzor, Armenia, 26-27.

[47] Gogyan S., Grigoryan M., Greedy algorithm with respect to the Haar system and modification of functions International Conference "Harmonic analysis and approximations, III 20-27 september, 2005, Tsahkadzor, Armenia, 28.

[48] Гогян С., О сходимости L^1- гриди алгоритма по системе Хаара, Доклады НАН Армении, т. 104 (2004), N2, 102-105.

[49] Гогян С., Подсистема Хаара как квазигриди базис, Доклады НАН Армении, т. 105 (2005), N1, 5-9.

[50] Gogyan S., On divergence of the L^1-greedy algorithm by Haar's system, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, v. 39 (2004), N5, 23-34.

[51] Gogyan S., Greedy algorithm with regard to Haar subsystems, East Journal on Approximations, v. 11(2005), N2, 221-236.